WERKE CARL FRIEDRICH GAUSS: 4



CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

BAND IV.

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

VIERTER BAND.





HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

1873.

THEORIA
COMBINATIONIS OBSERVATIONUM
ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE

PARS PRIOR

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM EXHIBITA 1821. FEBR. 15.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. V.
Gottingae MDCCCXXIII.



THEORIA

COMBINATIONIS OBSERVATIONUM

ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE.

PARS PRIOR.

1.

Quantacunque cura instituantur observationes, rerum naturalium magnitudinem spectantes, semper tamen erroribus maioribus minoribusve obnoxiae manent. Errores observationum plerumque non sunt simplices, sed e pluribus fontibus simul originem trahunt: horum fontium duas species probe distinguere oportet. Quaedam errorum caussae ita sunt comparatae, ut ipsarum effectus in qualibet observatione a circumstantiis variabilibus pendeat, inter quas et ipsam observationem nullus nexus essentialis concipitur: errores hinc oriundi irregulares seu fortuiti vocantur, quatenusque illae circumstantiae calculo subiici nequeunt, idem etiam de erroribus ipsis valet. Tales sunt errores ab imperfectione sensuum provenientes, nec non a caussis extraneis irregularibus, e. g. a motu tremulo aeris visum tantillum turbante: plura quoque vitia instrumentorum vel optimorum huc trahenda sunt, e. g. asperitas partis interioris libellularum, defectus firmitatis absolutae etc. Contra aliae errorum caussae in omnibus observationibus ad idem genus relatis natura sua effectum vel absolute constantem exserunt, vel saltem talem, cuius magnitudo secundum legem determinatam unice a circumstantiis, quae tamquam essentialiter cum observatione nexae spectantur, pendet. Huiusmodi errores constantes seu regulares appellantur.

Ceterum perspicuum est, hanc distinctionem quodammodo relativam esse, et a sensu latiore vel arctiore, quo notio observationum ad idem genus pertinentium accipitur, pendere. E. g. vitia irregularia in divisione instrumentorum ad

angulos mensurandos errorem constantem producunt, quoties tantummodo de observatione anguli determinati indefinite repetenda sermo est, siquidem hic semper eaedem divisiones vitiosae adhibentur: contra error ex illo fonte oriundus tamquam fortuitus spectari potest, quoties indefinite de angulis cuiusvis magnitudinis mensurandis agitur, siquidem tabula quantitatem erroris in singulis divisionibus exhibens non adest.

2.

Errorum regularium consideratio proprie ab instituto nostro excluditur.. Scilicet observatoris est, omnes caussas, quae errores constantes producere valent, sedulo investigare, et vel amovere, vel saltem earum rationem et magnitudinem summo studio perscrutari, ut effectus in quavis observatione determinata assignari, adeoque haec ab illo liberari possit, quo pacto res eodem redit, ac si error omnino non affuisset. Longe vero diversa est ratio errorum irregularium, qui natura sua calculo subiici nequeunt. Hos itaque in observationibus quidem tolerare, sed eorum effectum in quantitates ex observationibus derivandas per scitam harum combinationem quantum fieri potest extenuare oportet. Cui argumento gravissimo sequentes disquisitiones dicatae sunt.

3.

Errores observationum ad idem genus pertinentium, qui a caussa simplici determinata oriuntur, per rei naturam certis *limitibus* sunt circumscripti, quos sine dubio exacte assignare liceret, si indoles ipsius caussae *penitus* esset perspecta. Pleraeque errorum fortuitorum caussae ita sunt comparatae, ut secundum legem continuitatis omnes errores intra istos limites comprehensi pro possibilibus haberi debeant, perfectaque caussae cognitio etiam doceret, utrum omnes hi errores aequali facilitate gaudeant an inaequali, et quanta probabilitas relativa, in casu posteriore, cuivis errori tribuenda sit. Eadem etiam respectu erroris totalis, e pluribus erroribus simplicibus conflati, valebunt, puta inclusus erit certis limitibus, (quorum alter aequalis erit aggregato omnium limitum superiorum partialium, alter aggregato omnium limitum inferiorum); omnes errores intra hos limites possibiles quidem erunt, sed prout quisque infinitis modis diversis ex erroribus partialibus componi potest, qui ipsi magis minusve probabiles sunt, alii maiorem, alii minorem facilitatem tribuere debebimus, eruique poterit lex probabilitatis re-

lativae, si leges errorum simplicium cognitae supponuntur, salvis difficultatibus analyticis in colligendis omnibus combinationibus.

Exstant utique quaedam errorum caussae. quae errores non secundum legem continuitatis progredientes, sed discretos tantum, producere possunt, quales sunt errores divisionis instrumentorum, (siquidem illos erroribus fortuitis annumerare placet): divisionum enim multitudo in quovis instrumento determinato est finita. Manifesto autem, hoc non obstante, si modo non omnes errorum caussae errores discretos producant, complexus omnium errorum totalium possibilium constituet seriem secundum legem continuitatis progredientem, sive plures eiusmodi series interruptas, si forte, omnibus erroribus discretis possibilibus secundum magnitudinem ordinatis, una alterave differentia inter binos terminos proximos maior evadat, quam differentia inter limites errorum totalium, quatenus e solis erroribus continuis demanant. Sed in praxi casus posterior vix umquam locum habebit, nisi divisio vitiis crassioribus laboret.

4.

Designando facilitatem relativam erroris totalis x. in determinato observationum genere, per characteristicam φx, hoc, propter errorum continuitatem, ita intelligendum erit, probabilitatem erroris inter limites infinite proximos x et $x + \mathrm{d}x$ esse $= \varphi x . \mathrm{d}x$. Vix, ac ne vix quidem, umquam in praxi possibile erit, hanc functionem a priori assignare: nihilominus plura generalia eam spectantia stabilire possunt, quae deinceps proferemus. Obvium est, functionem φx eatenus ad functiones discontinuas referendam esse, quod pro omnibus valoribus ipsius x extra limites errorum possibilium iacentibus esse debet $= 0$; intra hos limites vero ubique valorem positivum nanciscetur (omittendo casum, de quo in fine art. praec. locuti sumus). In plerisque casibus errores positivos et negativos eiusdem magnitudinis aeque faciles supponere licebit, quo pacto erit $\varphi(-x) = \varphi x$. Porro quum errores leviores facilius committantur quam graviores, plerumque valor ipsius φx erit maximus pro $x = 0$, continuoque decrescet, dum x augetur.

Generaliter autem valor integralis $\int \varphi x . \mathrm{d}x$, ab $x = a$ usque ad $x = b$ extensi exprimet probabilitatem, quod error aliquis nondum cognitus iaceat inter limites a et b. Valor itaque istius integralis a limite inferiore omnium errorum possibilium usque ad limitem superiorem semper erit $= 1$. Et quum φx

pro omnibus valoribus ipsius x extra hos limites iacentibus semper sit $= 0$, manifesto etiam

valor integralis $\int \varphi x . \mathrm{d}x$ *ab* $x = -\infty$ *usque ad* $x = +\infty$ *extensi semper fit* $= 1$.

5.

Consideremus porro integrale $\int x\varphi x . \mathrm{d}x$ inter eosdem limites, cuius valorem statuemus $= k$. Si omnes errorum caussae simplices ita sunt comparatae, ut nulla adsit ratio, cur errorum aequalium sed signis oppositis affectorum alter facilius producatur quam alter, hoc etiam respectu erroris totalis valebit, sive erit $\varphi(-x) = \varphi x$, et proin necessario $k = 0$. Hinc colligimus, quoties k non evanescat, sed e. g. sit quantitas positiva, necessario adesse debere unam alteramve errorum caussam, quae vel errores positivos tantum producere possit, vel certe positivos facilius quam negativos. Haecce quantitas k, quae revera est medium omnium errorum possibilium, seu valor medius ipsius x, commode dici potest erroris pars constans. Ceterum facile probari potest, partem constantem erroris totalis aequalem esse aggregato partium constantium, quas continent errores e singulis caussis simplicibus prodeuntes. Quodsi quantitas k nota supponitur, a quavis observatione resecatur, errorque observationis ita correctae designatur per x', ipsiusque probabilitas per $\varphi' x'$, erit $x' = x - k$, $\varphi' x' = \varphi x$ ac proin $\int x' \varphi' x' . \mathrm{d}x' = \int x \varphi x . \mathrm{d}x - \int k \varphi x . \mathrm{d}x = k - k = 0$, i. e. errores observationum correctarum partem constantem non habebunt, quod et per se clarum est.

6.

Perinde ut integrale $\int x\varphi x . \mathrm{d}x$, seu valor medius ipsius x, erroris constantis vel absentiam vel praesentiam et magnitudinem docet, integrale

$$\int xx\varphi x . \mathrm{d}x$$

ab $x = -\infty$ usque ad $x = +\infty$ extensum (seu valor medius quadrati xx) aptissimum videtur ad incertitudinem observationum in genere definiendam et dimetiendam, ita ut e duobus observationum systematibus, quae quoad errorum facilitatem inter se differunt, eae praecisione praestare censeantur, in quibus integrale $\int xx\varphi x . \mathrm{d}x$ valorem minorem obtinet. Quodsi quis hanc rationem pro arbitrio, nulla cogente necessitate, electam esse obiiciat, lubenter assentiemur.

Quippe quaestio haec per rei naturam aliquid vagi implicat, quod limitibus circumscribi nisi per principium aliquatenus arbitrarium nequit. Determinatio alicuius quantitatis per observationem errori maiori minorive obnoxiam, haud inepte comparatur ludo, in quo solae iacturae, lucra nulla, dum quilibet error metuendus iacturae affinis est. Talis ludi dispendium aestimatur e iactura probabili, puta ex aggregato productorum singularum iacturarum possibilium in probabilitates respectivas. Quantae vero iacturae quemlibet observationis errorem aequiparare conveniat, neutiquam per se clarum est; quin potius haec determinatio aliqua ex parte ab arbitrio nostro pendet. Iacturam ipsi errori aequalem statuere manifesto non licet; si enim errores positivi pro iacturis acciperentur, negativi lucra repraesentare deberent. Magnitudo iacturae potius per talem erroris functionem exprimi debet, quae natura sua semper fit positiva. Qualium functionum quum varietas sit infinita, simplicissima, quae hac proprietate gaudet, prae ceteris eligenda videtur, quae absque lite est quadratum: hoc pacto principium supra prolatum prodit.

III. LAPLACE simili quidem modo rem consideravit, sed errorem ipsum semper positive acceptum tamquam iacturae mensuram adoptavit. At ni fallimur haecce ratio saltem non minus arbitraria est quam nostra: utrum enim error duplex aeque tolerabilis putetur quam simplex bis repetitus, an aegrius, et proin utrum magis conveniat, errori duplici momentum duplex tantum, an maius, tribuere, quaestio est neque per se clara, neque demonstrationibus mathematicis decidenda, sed libero tantum arbitrio remittenda. Praeterea negari non potest, ista ratione continuitatem laedi: et propter hanc ipsam caussam modus ille tractationi analyticae magis refragatur, dum ea, ad quae principium nostrum perducit, mira tum simplicitate tum generalitate commendantur.

7.

Statuendo valorem integralis $\int xx\varphi x.\mathrm{d}x$ ab $x=-\infty$ usque ad $x=+\infty$ extensi $=mm$, quantitatem m vocabimus ***errorem medium metuendum***, sive simpliciter ***errorem medium*** observationum, quarum errores indefiniti x habent probabilitatem relativam φx. Denominationem illam non ad observationes immediatas limitabimus, sed etiam ad determinationes qualescunque ex observationibus derivatas extendemus. Probe autem cavendum est, ne error medius confundatur cum medio arithmetico omnium errorum, de quo in art. 5 locuti sumus.

Ubi plura observationum genera, seu plures determinationes ex observationibus petitae, quibus haud eadem praecisio concedenda est, comparantur, *pondus* earum relativum nobis erit quantitas ipsi mm reciproce proportionalis, dum *praecisio* simpliciter ipsi m reciproce proportionalis habetur. Quo igitur pondus per numerum exprimi possit, pondus certi observationum generis pro unitate acceptum esse debet.

8.

Si observationum errores partem constantem implicant, hanc auferendo error medius minuitur, pondus et praecisio augentur. Retinendo signa art. 5, designandoque per m' errorem medium observationum correctarum, erit

$$m'm' = \int x'x'\varphi'x'.\mathrm{d}x' = \int (x-k)^2\varphi x.\mathrm{d}x = \int xx\varphi x.\mathrm{d}x - 2k\int x\varphi x.\mathrm{d}x + kk\int\varphi x.\mathrm{d}x$$
$$= mm - 2kk + kk = mm - kk.$$

Si autem loco partis constantis veri k quantitas alia l ab observationibus ablata esset, quadratum erroris medii novi evaderet $= mm - 2kl + ll = m'm' + (l-k)^2$.

9.

Denotante λ coëfficientem determinatum, atque μ valorem integralis $\int\varphi x.\mathrm{d}x$ ab $x = -\lambda m$ usque ad $x = +\lambda m$, erit μ probabilitas, quod error alicuius observationis sit minor quam λm (sine respectu signi), nec non $1-\mu$ probabilitas erroris maioris quam λm. Si itaque valor $\mu = \frac{1}{2}$ respondet valori $\lambda m = \rho$, error aeque facile infra ρ quam supra ρ cadere potest, quocirca ρ commode dici potest error *probabilis*. Relatio quantitatum λ, μ manifesto pendet ab indole functionis φx, quae plerumque incognita est. Operae itaque pretium erit, istam relationem pro quibusdam casibus specialibus propius considerare.

I. Si limites omnium errorum possibilium sunt $-a$ et $+a$, omnesque errores intra hos limites aeque probabiles, erit φx inter limites $x = -a$ et $x = +a$ constans, et proin $= \frac{1}{2a}$. Hinc $m = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, nec non $\mu = \lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$, quamdiu λ non maior quam $\sqrt{3}$; denique $\rho = m\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}8660254\,m$, probabilitasque, quod error prodeat errore medio non maior, erit $= \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773503$.

II. Si ut antea $-a$ et $+a$ sunt errorum possibilium limites, errorumque ipsorum probabilitas inde ab errrore 0 utrimque in progressione arithmetica decrescere supponitur, erit

$\varphi x = \frac{a-x}{aa}$, pro valoribus ipsius x inter 0 et $+a$

$\varphi x = \frac{a+x}{aa}$, pro valoribus ipsius x inter 0 et $-a$

Hinc deducitur $m = a\sqrt{\tfrac{1}{6}}$, $\mu = \lambda\sqrt{\tfrac{2}{3}} - \tfrac{1}{6}\lambda\lambda$, quamdiu λ est inter 0 et $\sqrt{6}$, denique $\lambda = \sqrt{6} - \sqrt{(6-6\mu)}$, quamdiu μ inter 0 et 1, et proin

$$\rho = m(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 0{,}7174389\,m\cdot$$

Probabilitas erroris medium non superantis erit in hoc casu

$$= \sqrt{\tfrac{2}{3}} - \tfrac{1}{6} = 0{,}6498299$$

III. Si functionem φx proportionalem statuimus huic $e^{-\frac{xx}{hh}}$ (quod quidem in rerum natura proxime tantum verum esse potest), esse debebit

$$\varphi x = \frac{e^{-\frac{xx}{hh}}}{h\sqrt{\pi}}$$

denotante π semiperipheriam circuli pro radio 1, unde porro deducimus

$$m = h\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

(V. *Disquis. generales circa seriem infinitam* etc. art. 28). Porro si valor integralis

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-zz}\,\mathrm{d}z$$

a $z = 0$ inchoati denotatur per Θz, erit

$$\mu = \Theta(\lambda\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$

Tabula sequens exhibet aliquot valores huius quantitatis:

λ	μ
0,6744897	0,5
0,8416213	0,6
1,0000000	0,6826895
1,0364334	0,7
1,2815517	0,8
1,6448537	0,9
2,5758293	0,99
3,2918301	0,999
3,8905940	0,9999
∞	1

10.

Quamquam relatio inter λ et μ ab indole functionis φx pendet, tamen quaedam generalia stabilire licet. Scilicet qualiscunque sit haec functio, si modo ita est comparata, ut ipsius valor, crescente valore absoluto ipsius x, semper decrescat, vel saltem non crescat, certo erit

λ minor vel saltem non maior quam $\mu\sqrt{3}$, quoties μ est minor quam $\frac{2}{3}$;

λ non maior quam $\frac{2}{3\sqrt{(1-\mu)}}$, quoties μ est maior quam $\frac{2}{3}$.

Pro $\mu=\frac{2}{3}$ uterque limes coincidit, puta λ nequit esse maior quam $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

Ut hoc insigne theorema demonstremus, denotemus per y valorem integralis $\int\varphi z.\mathrm{d}z$ a $z=-x$ usque ad $z=+x$ extensi, quo pacto y erit probabilitas, quod error aliquis contentus sit intra limites $-x$ et $+x$. Porro statuamus

$$x=\psi y,\quad \mathrm{d}\psi y=\psi' y.\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}\psi' y=\psi'' y.\mathrm{d}y$$

Erit itaque $\psi 0=0$, nec non

$$\psi' y=\frac{1}{\varphi x+\varphi(-x)}$$

quare per hyp. $\psi' y$ ab $y=0$ usque ad $y=1$ semper crescet, saltem nullibi decrescet, sive, quod idem est, valor ipsius $\psi'' y$ semper erit positivus, vel saltem non negativus. Porro habemus $\mathrm{d}.y\psi' y=\psi' y.\mathrm{d}y+y\psi'' y.\mathrm{d}y$, adeoque

$$y\psi' y-\psi y=\int y\psi'' y.\mathrm{d}y$$

integratione ab $y=0$ inchoata. Valor expressionis $y\psi' y-\psi y$ itaque semper erit quantitas positiva, saltem non negativa, adeoque

$$1-\frac{\psi y}{y\psi' y}$$

quantitas positiva unitate minor. Sit f eius valor pro $y=\mu$, i. e. quum habeatur $\psi\mu=\lambda m$, sit

$$f=1-\frac{\lambda m}{\mu\psi'\mu}\quad \text{sive}\quad \psi'\mu=\frac{\lambda m}{(1-f)\mu}$$

His ita praeparatis, consideremus functionem ipsius y hanc

$$\frac{\lambda m}{(1-f)\mu}(y-\mu f)$$

quam statuemus $=Fy$, nec non $\mathrm{d}Fy=F'y.\mathrm{d}y$. Perspicuum est, fieri

$$F\mu = \lambda m = \psi\mu$$
$$F'\mu = \frac{\lambda m}{(1-f)\mu} = \psi'\mu$$

Quare quum $\psi' y$, aucta ipsa y, continuo crescat (saltem non decrescat, quod semper subintelligendum), $F' y$ vero constans sit, differentia $\psi' y - F' y = \frac{\mathrm{d}(\psi y - Fy)}{\mathrm{d}y}$ erit positiva pro valoribus ipsius y maioribus quam μ, negativa pro minoribus. Hinc facile colligitur, $\psi y - Fy$ semper esse quantitatem positivam, adeoque ψy semper erit absolute maior, saltem non minor, quam Fy, certe quamdiu valor ipsius Fy est positivus, i. e. ab $y = \mu f$ usque ad $y = 1$. Hinc valor integralis $\int (Fy)^2 \mathrm{d}y$ ab $y = \mu f$ usque ad $y = 1$ erit minor valore integralis $\int (\psi y)^2 \mathrm{d}y$ inter eosdem limites, adeoque a potiori minor valore huius integralis ab $y = 0$ usque ad $y = 1$, qui fit $= mm$. At valor integralis prioris invenitur

$$= \frac{\lambda\lambda mm(1-\mu f)^3}{3\mu\mu(1-f)^2}$$

unde colligimus, $\lambda\lambda$ esse minorem quam $\frac{3\mu\mu(1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, ubi f est quantitas inter 0 et 1 iacens. Iam valor fractionis $\frac{3\mu\mu(1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, cuius differentiale, si f tamquam quantitas variabilis consideratur, fit $=$

$$-\frac{3\mu\mu(1-f)}{(1-\mu f)^4}.(2 - 3\mu + \mu f)\,\mathrm{d}f$$

continuo decrescit, dum f a valore 0 usque ad valorem 1 transit, quoties μ minor est quam $\frac{2}{3}$, adeoque valor maximus possibilis erit is, qui valori $f = 0$ respondet, puta $= 3\mu\mu$, ita ut in hoc casu λ certo fiat minor vel non maior quam $\mu\sqrt{3}$. Q. E. P. Contra quoties μ maior est quam $\frac{2}{3}$, valor istius fractionis erit maximus pro $2 - 3\mu + \mu f = 0$, i. e. pro $f = 3 - \frac{2}{\mu}$, unde ille fit $= \frac{4}{9(1-\mu)}$, adeoque in hoc casu λ non maior quam $\frac{2}{3\sqrt{(1-\mu)}}$. Q. E. S.

Ita e. g. pro $\mu = \frac{1}{2}$ certo λ nequit esse maior quam $\sqrt{\frac{3}{4}}$, i. e. error probabilis superare nequit limitem $0,8660254\,m$, cui in exemplo primo art. 9 aequalis inventus est. Porro facile e theoremate nostro concluditur, μ non esse minorem quam $\lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$, quamdiu λ minor sit quam $\sqrt{\frac{4}{3}}$, contra μ non esse minorem quam $1 - \frac{4}{9\lambda\lambda}$, pro valore ipsius λ maiore quam $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

11.

Quum plura problemata infra tractanda etiam cum valore integralis $\int x^4 \varphi x.\mathrm{d}x$ nexa sint, operae pretium erit, eum pro quibusdam casibus speciali-

bus evolvere. Denotabimus valorem huius integralis ab $x = -\infty$ usque ad $x = +\infty$ extensi per n^4.

I. Pro $\varphi x = \frac{1}{2a}$, quatenus x inter $-a$ et $+a$ continetur, habemus $n^4 = \frac{1}{5}a^4 = \frac{9}{5}m^4$.

II. In casu secundo art. 6, ubi $\varphi x = \frac{a \mp x}{aa}$, pro valoribus ipsius x inter 0 et $\pm a$, fit $n^4 = \frac{1}{15}a^4 = \frac{12}{5}m^4$.

III. In casu tertio, ubi

$$\varphi x = \frac{e^{-\frac{xx}{hh}}}{a\sqrt{\pi}}$$

invenitur per ea, quae in commentatione supra citata exponuntur. $n^4 = \frac{3}{4}h^4 = 3m^4$.

Ceterum demonstrari potest, valorem ipsius $\frac{n^4}{m^4}$ certo non esse minorem quam $\frac{9}{5}$, si modo suppositio art. praec. locum habeat.

12.

Denotantibus x, x', x'' etc. indefinite errores observationum eiusdem generis ab invicem independentes, quorum probabilitates relativas exprimit praefixa characteristica φ; nec non y functionem datam rationalem indeterminatarum x, x', x'' etc.: integrale multiplex (I)

$$\int \varphi x . \varphi x' . \varphi x'' \ldots . . \mathrm{d}x . \mathrm{d}x' . \mathrm{d}x'' \ldots$$

extensum per omnes valores indeterminatarum x, x', x'', pro quibus valor ipsius y cadit intra limites datos 0 et η, exprimet probabilitatem valoris ipsius y indefinite intra 0 et η siti. Manifesto hoc integrale erit functio ipsius η, cuius differentiale statuemus $= \psi\eta . \mathrm{d}\eta$, ita ut integrale ipsum fiat aequale integrali $\int \psi\eta . \mathrm{d}\eta$ ab $\eta = 0$ incepto. Hoc pacto simul characteristica $\psi\eta$ probabilitatem relativam cuiusvis valoris ipsius y exprimere censenda est. Quum x considerari possit tamquam functio indeterminatarum y, x', x'' etc., quam statuemus

$$= f(y, x', x'' \ldots)$$

integrale (I) fiet

$$= \int \varphi . f(y, x', x'' \ldots) . \frac{\mathrm{d}f(y, x', x'' \ldots)}{\mathrm{d}y} . \varphi x' . \varphi x'' \ldots \mathrm{d}y . \mathrm{d}x' . \mathrm{d}x'' \ldots$$

ubi y extendi debet ab $y = 0$ usque ad $y = \eta$. indeterminatae reliquae vero per omnes valores, quibus respondet valor realis ipsius $f(y, x', x'' \ldots)$. Hinc

colligitur

$$\psi y = \int \varphi . f(y,\, x',\, x'' \ldots) . \frac{\mathrm{d} f(y,\, x',\, x'' \ldots)}{\mathrm{d} y} . \varphi x' . \varphi x'' \ldots . \mathrm{d} x' . \mathrm{d} x'' \ldots$$

integratione, in qua y tamquam constans considerari debet, extensa per omnes valores indeterminatarum x', x'' etc., qui ipsi $f(y,\, x',\, x'' \ldots)$ valorem realem conciliant.

13.

Ad hanc integrationem reipsa exsequendam cognitio functionis φ requireretur, quae plerumque incognita est: quin adeo, etiamsi haec functio cognita esset, in plerisque casibus integratio vires analyseos superaret. Quae quum ita sint, probabilitatem quidem singulorum valorum ipsius y assignare non poterimus: at secus res se habebit, si tantummodo desideratur valor medius ipsius y, qui oritur ex integratione $\int y \psi y . \mathrm{d} y$ per omnes valores ipsius y, quos quidem assequi potest, extensa. Et quum manifesto pro omnibus valoribus, quos y assequi nequit, vel per naturam functionis, quam exprimit (e. g. pro negativis, si esset $y = xx + x'x' + x''x'' +$ etc.), vel ideo, quod erroribus ipsis x, x', x'' etc. certi limites sunt positi, statuere oporteat $\psi y = 0$, manifesto res perinde se habebit, si integratio illa extendatur per omnes valores reales ipsius y, puta ab $y = -\infty$ usque ad $y = +\infty$. Iam integrale $\int y \psi y . \mathrm{d} y$ inter limites determinatos, puta ab $y = \eta$ usque ad $y = \eta'$ sumtum aequale est integrali

$$\int y \varphi . f(y,\, x',\, x'' \ldots) \frac{\mathrm{d} f(y,\, x',\, x'' \ldots)}{\mathrm{d} y} . \varphi x' . \varphi x'' \ldots . \mathrm{d} y . \mathrm{d} x' . \mathrm{d} x'' \ldots$$

integratione extensa ab $y = \eta$ usque ad $y = \eta'$, atque per omnes valores indeterminatarum x', x'' etc., quibus respondet valor realis ipsius $f(y,\, x',\, x'' \ldots)$, sive quod idem est, valori integralis

$$\int y \varphi x . \varphi x' . \varphi x'' \ldots . \mathrm{d} x . \mathrm{d} x' . \mathrm{d} x'' \ldots$$

adhibendo in hac integratione pro y eius valorem per x, x', x'' etc. expressum, extendendoque eam per omnes harum indeterminatarum valores, quibus respondet valor ipsius y inter η et η' situs. Hinc colligimus, integrale $\int y \psi y . \mathrm{d} y$ per omnes valores ipsius y, ab $y = -\infty$ usque ad $y = +\infty$ extensum obtineri ex integratione

$$\int y \varphi x . \varphi x' . \varphi x'' \ldots . \mathrm{d} x . \mathrm{d} x' . \mathrm{d} x'' \ldots$$

per omnes valores reales ipsarum x, x', x'' etc. extensa, puta ab $x = -\infty$ usque ad $x = +\infty$, ab $x' = -\infty$ usque ad $x' = +\infty$ etc.

14.

Reducta itaque functione y ad formam aggregati talium partium

$$A x^{\alpha} x'^{\beta} x''^{\gamma} \ldots$$

valor integralis $\int y \psi y . \mathrm{d}y$ per omnes valores ipsius y extensi, seu valor medius ipsius y, aequalis erit aggregato partium

$$A \times \int x^{\alpha} \varphi x . \mathrm{d}x \times \int x'^{\beta} \varphi x' . \mathrm{d}x' \times \int x''^{\gamma} \varphi x'' . \mathrm{d}x'' \ldots$$

ubi integrationes extendendae sunt ab $x = -\infty$ usque ad $x = +\infty$, ab $x' = -\infty$ usque ad $x' = +\infty$ etc.; sive quod eodem redit, aggregato partium quae oriuntur, dum pro singulis potestatibus x^{α}, x'^{β}, x''^{γ} etc. ipsarum valores medii substituuntur, cuius theorematis gravissimi veritas etiam ex aliis considerationibus facile derivari potuisset.

15.

Applicemus ea, quae in art. praec. exposuimus, ad casum specialem, ubi

$$y = \frac{xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}}{\sigma}$$

denotante σ multitudinem partium in numeratore. Valor medius ipsius y hic illico invenitur, $= mm$, accipiendo characterem m in eadem significatione ac supra. Valor verus quidem ipsius y in casu determinato maior minorve evadere potest medio, perinde ac valor verus termini simplicis xx: sed probabilitas quod valor fortuitus ipsius y a medio mm haud sensibiliter aberret, continuo magis ad certitudinem appropinquabit crescente multitudine σ. Quod quo clarius eluceat, quum probabilitatem ipsam exacte determinare non sit in potestate, investigemus errorem medium metuendum, dum supponimus $y = mm$. Manifesto per principia art. 6 hic error erit radix quadrata valoris medii functionis

$$\left(\frac{xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}}{\sigma} - mm\right)^2$$

ad quem eruendum sufficit observare, valorem medium termini talis $\frac{x^4}{\sigma\sigma}$ esse $= \frac{n^4}{\sigma\sigma}$ (utendo charactere n in significatione art. 11), valorem medium autem termini

talis $\frac{2xxx'x'}{\sigma\sigma}$ fieri $= \frac{2m^4}{\sigma\sigma}$, unde facillime deducitur valor medius istius functionis

$$= \frac{n^4 - m^4}{\sigma}$$

Hinc discimus, si copia satis magna errorum fortuitorum ab invicem independentium x, x', x'' etc. in promtu sit, magna certitudine inde peti posse valorem approximatum ipsius m per formulam

$$m = \sqrt{\frac{(xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.})}{\sigma}}$$

erroremque medium in hac determinatione metuendum, respectu quadrati mm, esse

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}}$$

Ceterum, quum posterior formula implicet quantitatem n, si id tantum agitur, ut idea qualiscunque de gradu praecisionis istius determinationis formari possit, sufficiet, aliquam hypothesin respectu functionis φ amplecti. E. g. in hypothesi tertia art. 9, 11 iste error fit $= mm\sqrt{\frac{2}{\sigma}}$. Quod si minus arridet, valor approximatus ipsius n^4 ex ipsis erroribus adiumento formulae

$$\frac{x^4 + x'^4 + x''^4 + \text{etc.}}{\sigma}$$

peti poterit. Generaliter autem affirmare possumus, praecisionem duplicatam in ista determinatione requirere errorum copiam quadruplicatam, sive pondus determinationis ipsi multitudini σ esse proportionale.

Prorsus simili modo, si observationum errores partem constantem involvunt, huius valor approximatus eo tutius e medio arithmetico multorum errorum colligi poterit, quo maior horum multitudo fuerit. Et quidem error medius in hac determinatione metuendus exprimetur per

$$\sqrt{\frac{mm - kk}{\sigma}}$$

si k designat partem constantem ipsam atque m errorem medium observationum parte constante nondum purgatarum, sive simpliciter per $\frac{m}{\sqrt{\sigma}}$, si m denotat errorem medium observationum a parte constante liberatarum (v. art. 8).

16.

In artt. 12—15 supposuimus, errores x, x', x'' etc. ad idem observationum genus pertinere, ita ut singulorum probabilitates per eandem functionem expri-

mantur. Sed sponte patet, disquisitionem generalem artt. 12—14 aeque facile ad casum generaliorem extendi, ubi probabilitates errorum x, x', x'' etc. per functiones diversas φx, $\varphi' x'$, $\varphi'' x''$ etc. exprimantur, i. e. ubi errores illi pertineant ad observationes praecisionis seu incertitudinis diversae. Supponamus x esse errorem observationis talis, cuius error medius metuendus sit $= m$; nec non x', x'' etc. esse errores aliarum observationum, quarum errores medii metuendi resp. sint m', m'' etc. Tunc valor medius aggregati $xx + x'x' + x''x'' +$ etc. erit $mm + m'm' + m''m'' +$ etc. Iam si aliunde constat, quantitates m, m', m'' etc. esse in ratione data, puta numeris 1, μ', μ'' etc. resp. proportionales, valor medius expressionis

$$\frac{xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

erit $= mm$. Si vero valorem eiusdem expressionis determinatum, prout fors errores x, x', x'' etc. offert, ipsi mm aequalem ponimus, error medius, cui haec determinatio obnoxia manet, simili ratione ut in art. praec. invenitur

$$= \frac{\sqrt{(n^4 + n'^4 + n''^4 + \text{etc.} - m^4 - m'^4 - m''^4 - \text{etc.})}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

ubi n', n'' etc. respectu observationum, ad quas pertinent errores x', x'' etc., idem denotare supponuntur, atque n respectu observationis primae. Quodsi itaque numeros n, n', n'' etc. ipsis m, m', m'' etc. proportionales supponere licet, error ille metuendus medius fit

$$= \frac{\sqrt{(n^4 - m^4)} \cdot \sqrt{(1 + \mu'^4 + \mu''^4 + \text{etc.})}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

At haecce ratio, valorem approximatum ipsius m determinandi non est ea, quae maxime ad rem facit. Quod quo clarius ostendamus, consideremus expressionem generaliorem

$$y = \frac{xx + \alpha'x'x' + \alpha''x''x'' + \text{etc.}}{1 + \alpha'\mu'\mu' + \alpha''\mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

cuius valor medius quoque erit $= mm$, quomodocunque eligantur coëfficientes α', α'' etc. Error autem medius metuendus, dum valorem determinatum ipsius y, prout fors errores x, x', x'' etc. offert, ipsi mm aequalem supponimus, invenitur per principia supra tradita

$$= \frac{\sqrt{(n^4 - m^4 + \alpha'\alpha'(n'^4 - m'^4) + \alpha''\alpha''(n''^4 - m''^4) + \text{etc.})}}{1 + \alpha'\mu'\mu' + \alpha''\mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

Ut hic error medius fiat quam minimus, statuere oportebit

$$\alpha' = \frac{n^4 - m^4}{n'^4 - m'^4} \cdot \mu'\mu'$$
$$\alpha'' = \frac{n^4 - m^4}{n''^4 - m''^4} \cdot \mu''\mu'' \text{ etc.}$$

Manifesto hi valores evolvi nequeunt, nisi insuper ratio quantitatum n, n', n'' etc. ad m, m', m'' etc. aliunde nota fuerit; qua cognitione exacta deficiente, saltem tutissimum videtur *), illas his proportionales supponere (v. art. 11), unde prodeunt valores

$$\alpha' = \frac{1}{\mu'\mu'}, \quad \alpha'' = \frac{1}{\mu''\mu''} \text{ etc.}$$

i. e. coëfficientes α', α'' etc. aequales statui debent ponderibus relativis observationum, ad quas pertinent errores x', x'' etc., assumto pondere observationis, ad quam pertinet error x, pro unitate. Hoc pacto, designante ut supra σ multitudinem errorum propositorum, habebimus valorem medium expressionis

$$\frac{xx + \alpha'x'x' + \alpha''x''x'' + \text{etc.}}{\sigma}$$

$= mm$, atque errorem medium metuendum, dum valorem fortuito determinatum huius expressionis pro valore vero ipsius mm adoptamus

$$\frac{\sqrt{(n^4 + \alpha'\alpha'n'^4 + \alpha''\alpha''n''^4 + \text{etc.} - \sigma m^4)}}{\sigma}$$

et proin, siquidem licet, ipsas n, n', n'' etc. ipsis m, m', m'' proportionales supponere,

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}}$$

quae formula identica est cum ea, quam supra pro casu observationum eiusdem generis inveneramus.

17.

Si valor quantitatis, quae ab alia quantitate incognita pendet, per observa-

*) Scilicet cognitionem quantitatum μ', μ'' etc. in eo solo casu in potestate esse concipimus, ubi per rei naturam errores x, x', x'' etc. ipsis $1, \mu', \mu''$ etc. proportionales, aeque probabiles censendi sunt, aut potius ubi

$$\varphi x = \mu'\varphi'(\mu'x) = \mu''\varphi''(\mu''x) \text{ etc.}$$

tionem praecisione absoluta non gaudentem determinata est, valor incognitae hinc calculatus etiam errori obnoxius erit, sed nihil in hac determinatione arbitrio relinquitur. At si *plures* quantitates ab eadem incognita pendentes per observationes haud absolute exactas innotuerunt, valorem incognitae vel per quamlibet harum observationum eruere possumus, vel per aliquam plurium observationum combinationem, quod infinitis modis diversis fieri potest. Quamquam vero valor incognitae tali modo prodiens errori semper obnoxius manet, tamen in alia combinatione maior, in alia minor error metuendus erit. Similiter res se habebit, si plures quantitates a pluribus incognitis simul pendentes sunt observatae: prout observationum multitudo multitudini incognitarum vel aequalis, vel hac minor vel maior fuerit, problema vel determinatum, vel indeterminatum, vel plus quam determinatum erit (generaliter saltem loquendo), et in casu tertio ad incognitarum determinationem observationes infinitis modis diversis combinari poterunt. E tali combinationum varietate eas eligere, quae maxime ad rem faciant, i. e. quae incognitarum valores erroribus minimis obnoxios suppeditent, problema sane est in applicatione matheseos ad philosophiam naturalem longe gravissimum.

In Theoria motus corporum coelestium ostendimus, quomodo valores incognitarum *maxime probabiles* eruendi sint, si lex probabilitatis errorum observationum cognita sit; et quum haec lex natura sua in omnibus fere casibus hypothetica maneat, theoriam illam ad legem maxime plausibilem applicavimus, ubi probabilitas erroris x quantitati exponentiali e^{-hhxx} proportionalis supponitur, unde methodus a nobis dudum in calculis praesertim astronomicis, et nunc quidem a plerisque calculatoribus sub nomine methodi quadratorum minimorum usitata demanavit.

Postea ill. Laplace, rem alio modo aggressus, idem principium omnibus aliis etiamnum praeferendum esse docuit, quaecunque fuerit lex probabilitatis errorum, si modo observationum multitudo sit permagna. At pro multitudine observationum modica, res intacta mansit, ita ut si lex nostra hypothetica respuatur, methodus quadratorum minimorum eo tantum nomine prae aliis commendabilis habenda sit, quod calculorum concinnitati maxime est adaptata.

Geometris itaque gratum fore speramus, si in hac nova argumenti tractatione docuerimus, methodum quadratorum minimorum exhibere combinationem ex omnibus optimam, non quidem proxime, sed absolute, quaecunque fuerit lex probabilitatis errorum, quaecunque observationum multitudo, si modo notionem

erroris medii non ad mentem ill. LAPLACE, sed ita, ut in artt. 5 et 6 a nobis factum est, stabiliamus.

Ceterum expressis verbis hic praemonere convenit, in omnibus disquisitionibus sequentibus tantummodo de erroribus irregularibus atque a parte constante liberis sermonem esse, quum proprie ad perfectam artem observandi pertineat, omnes errorum constantium caussas summo studio amovere. Quaenam vero subsidia calculator tales observationes tractare suscipiens, quas ab erroribus constantibus non liberas esse iusta suspicio adest, ex ipso calculo probabilium petere possit, disquisitioni peculiari alia occasione promulgandae reservamus.

18.

PROBLEMA. *Designante U functionem datam quantitatum incognitarum V, V', V'' etc., quaeritur error medius M in determinatione valoris ipsius U metuendus, si pro V, V', V'' etc. adoptentur non valores veri, sed ii, qui ex observationibus ab invicem independentibus, erroribus mediis m, m', m'' etc. resp. obnoxiis prodeunt.*

Sol. Denotatis erroribus in valoribus observatis ipsarum V, V', V'' etc. per e, e', e'' etc., error inde redundans in valorem ipsius U exprimi poterit per functionem linearem

$$\lambda e + \lambda' e' + \lambda'' e'' + \text{ etc.} = E$$

ubi $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. sunt valores quotientium differentialium $\frac{dU}{dV}, \frac{dU}{dV'}, \frac{dU}{dV''}$ etc. pro valoribus veris ipsarum V, V', V'' etc., siquidem observationes satis exactae sunt, ut errorum quadrata productaque negligere liceat. Hinc primo sequitur, quoniam observationum errores a partibus constantibus liberi supponuntur, valorem medium ipsius E esse $= 0$. Porro error medius in valore ipsius U metuendus erit radix quadrata e valore medio ipsius EE, sive MM erit valor medius aggregati

$$\lambda\lambda ee + \lambda'\lambda' e'e' + \lambda''\lambda'' e''e'' + \text{ etc.} + 2\lambda\lambda' ee' + 2\lambda\lambda'' ee'' + 2\lambda'\lambda'' e'e'' + \text{ etc.}$$

At valor medius ipsius $\lambda\lambda ee$ fit $\lambda\lambda mm$, valor medius ipsius $\lambda'\lambda' e'e'$ fit $= \lambda'\lambda' m'm'$ etc.; denique valores medii productorum $2\lambda\lambda' ee'$ etc. omnes fiunt $= 0$. Hinc itaque colligimus

$$M = \sqrt{(\lambda\lambda mm + \lambda'\lambda' m'm' + \lambda''\lambda'' m''m'' + \text{ etc.})}$$

3*

Huic solutioni quasdam annotationes adiicere conveniet.

I. Quatenus spectando observationum errores tanquam quantitates primi ordinis, quantitates ordinum altiorum negliguntur, in formula nostra pro $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. etiam valores eos quotientium $\frac{dU}{dV}$ etc. adoptare licebit, qui prodeunt e valoribus observatis quantitatum V, V', V'' etc. Quoties U est functio linearis, manifesto nulla prorsus erit differentia.

II. Si loco errorum mediorum observationum, harum pondera introducere malumus, sint haec, secundum unitatem arbitrariam, resp. p, p', p'' etc., atque P pondus determinationis valoris ipsius U e valoribus observatis quantitatum V, V', V'' etc. prodeuntis. Ita habebimus

$$P = \frac{1}{\frac{\lambda\lambda}{p} + \frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \text{etc.}}$$

III. Si T est functio alia data quantitatum V, V', V'' etc. atque, pro harum valoribus veris,

$$\frac{dT}{dV} = \varkappa, \quad \frac{dT}{dV'} = \varkappa', \quad \frac{dT}{dV''} = \varkappa'' \text{ etc.}$$

error in determinatione valoris ipsius T e valoribus observatis ipsarum V, V', V'' etc. petita, erit $= \varkappa e + \varkappa' e' + \varkappa'' e'' + \text{etc.}, = E'$, atque error medius in ista determinatione metuendus $= \sqrt{(\varkappa\varkappa mm + \varkappa'\varkappa' m'm' + \varkappa''\varkappa'' m''m'' + \text{etc.})}$. Errores E, E' vero manifesto ab invicem iam non erunt independentes, valorque medius producti EE', secus ac valor medius producti ee', non erit $= 0$, sed $= \varkappa\lambda mm + \varkappa'\lambda' m'm' + \varkappa''\lambda'' m''m'' + \text{etc.}$

IV. Problema nostrum etiam ad casum eum extendere licet, ubi valores quantitatum V, V', V'' etc. non immediate per observationes inveniuntur, sed quomodocunque ex observationum combinationibus derivantur, si modo singularum determinationes ab invicem sunt independentes, i. e. observationibus diversis superstructae: quoties autem haec conditio locum non habet, formula pro M erronea evaderet. E. g. si una alterave observatio, quae ad determinationem valoris ipsius V inserviit, etiam ad valorem ipsius V' determinandum adhibita esset, errores e et e' haud amplius ab invicem independentes forent, neque adeo producti ee' valor medius $= 0$. Si vero in tali casu nexus quantitatum V, V' cum observationibus simplicibus, e quibus deductae sunt, rite perpenditur, valor

medius producti ee' adiumento annotationis III. assignari, atque sic formula pro M completa reddi poterit.

19.

Sint V, V', V'' etc. functiones incognitarum x, y, z etc., multitudo illarum $= \pi$, multitudo incognitarum $= \rho$, supponamusque, per observationes vel immediate vel mediate valores functionum inventos esse $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc., ita tamen ut hae determinationes ab invicem fuerint independentes. Si ρ maior est quam π, incognitarum evolutio manifesto fit problema indeterminatum; si ρ ipsi π aequalis est, singulae x, y, z etc. in formam functionum ipsarum V, V', V'' etc. redigi vel redactae concipi possunt, ita ut ex harum valoribus observatis valores istarum inveniri possint, simulque adiumento art. praec. praecisionem relativam singulis his determinationibus tribuendam assignare liceat; denique si ρ minor est quam π, singulae x, y, z etc. infinitis modis diversis in formam functionum ipsarum V, V', V'' etc. redigi, adeoque illarum valores infinitis modis diversis erui poterunt. Quae determinationes exacte quidem quadrare deberent, si observationes praecisione absoluta gauderent; quod quum secus se habeat, alii modi alios valores suppeditabunt, nec minus determinationes e combinationibus diversis petitae inaequali praecisione instructae erunt.

Ceterum si in casu secundo vel tertio functiones V, V', V'' etc. ita comparatae essent, ut $\pi - \rho + 1$ ex ipsis, vel plures, tamquam functiones reliquarum spectare liceret, problema respectu posteriorum functionum etiamnum plus quam determinatum esset, respectu incognitarum x, y, z etc. autem indeterminatum; harum scilicet valores ne tunc quidem determinare liceret, quando valores functionum V, V', V'' etc. absolute exacti dati essent: sed hunc casum a disquisitione nostra excludemus.

Quoties V, V', V'' etc. per se non sunt functiones *lineares* indeterminatarum suarum, hoc efficietur, si loco incognitarum primitivarum introducuntur ipsarum differentiae a valoribus approximatis, quos aliunde cognitos esse supponere licet. Errores medios in determinationibus $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. metuendos resp. denotabimus per m, m', m'' etc., determinationumque pondera per p, p', p'' etc., ita ut sit $pmm = p'm'm' = p''m''m''$ etc. Rationem, quam inter se tenent errores medii, cognitam supponemus, ita ut pondera, quorum unum ad lubitum accipi potest, sint nota. Denique statuemus

$$(V-L)\sqrt{p} = v, \quad (V'-L')\sqrt{p'} = v', \quad (V''-L'')\sqrt{p''} = v'' \text{ etc.}$$

Manifesto itaque res perinde se habebit, ac si observationes immediatae, aequali praecisione gaudentes, puta quarum error medius $= m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''}$ etc., sive quibus pondus $= 1$ tribuitur, suppeditavissent

$$v = 0, \quad v' = 0, \quad v'' = 0 \text{ etc.}$$

20.

PROBLEMA. *Designantibus* v, v', v'' *etc. functiones lineares indeterminatarum* x, y, z *etc. sequentes*

$$\left.\begin{aligned} v &= ax + by + cz + \text{etc.} + l \\ v' &= a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l' \\ v'' &= a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'' \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

ex omnibus systematibus coëfficientium $\varkappa, \varkappa', \varkappa''$ *etc., qui indefinite dant*

$$\varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \text{etc.} = x - k$$

ita ut k *sit quantitas determinata i. e. ab* x, y, z *etc. independens, eruere id, pro quo* $\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' +$ *etc. nanciscatur valorem minimum.*

Solutio. Statuamus

$$\left.\begin{aligned} av + a'v' + a''v'' + \text{etc.} &= \xi \\ bv + b'v' + b''v'' + \text{etc.} &= \eta \\ cv + c'v' + c''v'' + \text{etc.} &= \zeta \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

etc.: eruntque etiam ξ, η, ζ etc. functiones lineares ipsarum x, y, z etc., puta

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\Sigma aa + y\Sigma ab + z\Sigma ac + \text{etc.} + \Sigma al \\ \eta &= x\Sigma ab + y\Sigma bb + z\Sigma bc + \text{etc.} + \Sigma bl \\ \zeta &= x\Sigma ac + y\Sigma bc + z\Sigma cc + \text{etc.} + \Sigma cl \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

(ubi Σaa denotat aggregatum $aa + a'a' + a''a'' +$ etc., ac perinde de reliquis) multitudoque ipsarum ξ, η, ζ etc. multitudini indeterminatarum x, y, z etc. aequalis, puta $= \rho$. Per eliminationem itaque elici poterit aequatio talis *)

*) Ratio, cur ad denotandos coëfficientes e tali eliminatione prodeuntes, hos potissimum characteres elegerimus, infra elucebit.

$$x = A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc.}$$

in qua substituendo pro ξ, η, ζ etc. valores earum ex III, aequatio identica prodire debet. Quare statuendo

$$\left.\begin{array}{l} a[\alpha\alpha] + b[\alpha\beta] + c[\alpha\gamma] + \text{etc.} = \alpha \\ a'[\alpha\alpha] + b'[\alpha\beta] + c'[\alpha\gamma] + \text{etc.} = \alpha' \\ a''[\alpha\alpha] + b''[\alpha\beta] + c''[\alpha\gamma] + \text{etc.} = \alpha'' \text{ etc.} \end{array}\right\} \text{(IV)}$$

necessario erit indefinite

$$\alpha v + \alpha' v' + \alpha'' v'' + \text{etc.} = x - A \quad \text{(V)}$$

Haec aequatio docet, inter systemata valorum coëfficientium $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. certo etiam referendos esse hos $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc., nec non, pro systemate quocunque, fieri debere indefinite

$$(\varkappa - \alpha)v + (\varkappa' - \alpha')v' + (\varkappa'' - \alpha'')v'' + \text{etc.} = A - k$$

quae aequatio implicat sequentes

$$\begin{array}{l} (\varkappa - \alpha)a + (\varkappa' - \alpha')a' + (\varkappa'' - \alpha'')a'' + \text{etc.} = 0 \\ (\varkappa - \alpha)b + (\varkappa' - \alpha')b' + (\varkappa'' - \alpha'')b'' + \text{etc.} = 0 \\ (\varkappa - \alpha)c + (\varkappa' - \alpha')c' + (\varkappa'' - \alpha'')c'' + \text{etc.} = 0 \text{ etc.} \end{array}$$

Multiplicando has aequationes resp. per $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc., et addendo, obtinemus propter (IV)

$$(\varkappa - \alpha)\alpha + (\varkappa' - \alpha')\alpha' + (\varkappa'' - \alpha'')\alpha'' + \text{etc.} = 0$$

sive quod idem est

$$\begin{array}{l} \varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' + \text{etc.} \\ = \alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.} + (\varkappa - \alpha)^2 + (\varkappa' - \alpha')^2 + (\varkappa'' - \alpha'')^2 + \text{etc.} \end{array}$$

unde patet, aggregatum $\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' + \text{etc.}$ valorem minimum obtinere, si statuatur $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc. Q. E. I.

Ceterum hic valor minimus ipse sequenti modo eruitur. Aequatio (V) docet, esse

$$\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \text{etc.} = 1$$
$$\alpha b + \alpha' b' + \alpha'' b'' + \text{etc.} = 0$$
$$\alpha c + \alpha' c' + \alpha'' c'' + \text{etc.} = 0 \text{ etc.}$$

Multiplicando has aequationes resp. per $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc. et addendo, protinus habemus adiumento aequationum (IV)

$$\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.} = [\alpha\alpha]$$

21.

Quum observationes suppeditaverint aequationes (proxime veras) $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$ etc., ad valorem incognitae x inde eliciendum combinatio illarum aequationum talis

$$\varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \text{etc.} = 0$$

adhibenda est, quae ipsi x coëfficientem 1 conciliet, incognitasque reliquas y, z etc. eliminet; cui determinationi per art. 18 pondus

$$= \frac{1}{\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' + \text{etc.}}$$

tribuendum erit. Ex art. praec. itaque sequitur, determinationem maxime idoneam eam fore, ubi statuatur $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc. Hoc pacto x obtinet valorem A, manifestoque idem valor etiam (absque cognitione multiplicatorum α, α', α'' etc.) protinus per eliminationem ex aequationibus $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. elici potest. Pondus huic determinationi tribuendum erit $= \frac{1}{[\alpha\alpha]}$, sive error medius in ipsa metuendus

$$= m\sqrt{p[\alpha\alpha]} = m'\sqrt{p'[\alpha\alpha]} = m''\sqrt{p''[\alpha\alpha]} \text{ etc.}$$

Prorsus simili modo determinatio maxime idonea incognitarum reliquarum y, z etc. eosdem valores ipsis conciliabit, qui per eliminationem ex iisdem aequationibus $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. prodeunt.

Denotando aggregatum indefinitum $vv + v'v' + v''v''$ etc., sive quod idem est hoc

$$p(V-L)^2 + p'(V'-L')^2 + p''(V''-L'')^2 + \text{etc.}$$

per Ω, patet, 2ξ, 2η, 2ζ etc. esse quotientes differentiales partiales functionis Ω, puta

$$2\xi = \frac{d\Omega}{dx}, \quad 2\eta = \frac{d\Omega}{dy}, \quad 2\zeta = \frac{d\Omega}{dz} \text{ etc.}$$

Quapropter valores incognitarum ex observationum combinatione maxime idonea prodeuntes, quos *valores maxime plausibiles* commode vocare possumus, identici erunt cum iis, per quos Ω valorem minimum obtinet. Iam $V-L$ indefinite exprimit differentiam inter valorem computatum et observatum. Valores itaque incognitarum maxime plausibiles iidem erunt, qui summam quadratorum differentiarum inter quantitatum V, V', V'' etc. valores observatos et computatos, per observationum pondera multiplicatorum, minimam efficiunt, quod principium in *Theoria Motus Corporum Coelestium* longe alia via stabiliveramus. Et si insuper praecisio relativa singularum determinationum assignanda est, per eliminationem indefinitam ex aequationibus (III) ipsas x, y, z etc. in tali forma exhibere oportet:

$$\left.\begin{aligned} x &= A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{ etc.} \\ y &= B + [\beta\alpha]\xi + [\beta\beta]\eta + [\beta\gamma]\zeta + \text{ etc.} \\ z &= C + [\gamma\alpha]\xi + [\gamma\beta]\eta + [\gamma\gamma]\zeta + \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \text{(VII)}$$
$$\text{etc.}$$

quo pacto valores maxime plausibiles incognitarum x, y, z etc. erunt resp. A, B, C etc., atque pondera his determinationibus tribuenda $\frac{1}{[\alpha\alpha]}$, $\frac{1}{[\beta\beta]}$, $\frac{1}{[\gamma\gamma]}$ etc., sive errores medii in ipsis metuendi

$$\begin{aligned} &\text{pro } x \ldots\ldots m\sqrt{p[\alpha\alpha]} = m'\sqrt{p'[\alpha\alpha]} = m''\sqrt{p''[\alpha\alpha]} \text{ etc.} \\ &\text{pro } y \ldots\ldots m\sqrt{p[\beta\beta]} = m'\sqrt{p'[\beta\beta]} = m''\sqrt{p''[\beta\beta]} \text{ etc.} \\ &\text{pro } z \ldots\ldots m\sqrt{p[\gamma\gamma]} = m'\sqrt{p'[\gamma\gamma]} = m''\sqrt{p''[\gamma\gamma]} \text{ etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

quod convenit cum iis, quae in *Theoria Motus Corporum Coelestium* docuimus.

22.

De casu omnium simplicissimo, simul vero frequentissimo, ubi unica incognita adest, atque $V = x$, $V' = x$, $V'' = x$ etc., paucis seorsim agere conveniet. Erit scilicet $a = \sqrt{p}$, $a' = \sqrt{p'}$, $a'' = \sqrt{p''}$ etc., $l = -L\sqrt{p}$, $l' = -L'\sqrt{p'}$, $l'' = -L''\sqrt{p''}$ etc., et proin

$$\xi = (p+p'+p''+ \text{etc.})x - (pL+p'L'+p''L''+ \text{etc.})$$

Hinc porro

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{p+p'+p''+ \text{etc.}}$$

$$A = \frac{pL+p'L'+p''L''+ \text{etc.}}{p+p'+p''+ \text{etc.}}$$

Si itaque e pluribus observationibus inaequali praecisione gaudentibus, et quarum pondera resp. sunt p, p', p'' etc., valor eiusdem quantitatis inventus est e prima $= L$, e secunda $= L'$, e tertia $= L''$ etc., huius valor maxime plausibilis erit

$$= \frac{pL+p'L'+p''L''+ \text{etc.}}{p+p'+p''+ \text{etc.}}$$

pondusque huius determinationis $= p+p'+p''$ etc. Si omnes observationes aequali praecisione gaudent, valor maxime plausibilis erit

$$= \frac{L+L'+L''+ \text{etc.}}{\pi}$$

i. e. aequalis medio arithmetico valorum observatorum, huiusque determinationis pondus $= \pi$, accepto pondere observationum pro unitate.

THEORIA

COMBINATIONIS OBSERVATIONUM

ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE

PARS POSTERIOR

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM EXHIBITA 1823. FEBR. 2.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. V.
Gottingae MDCCCXXIII.

THEORIA

COMBINATIONIS OBSERVATIONUM

ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE.

PARS POSTERIOR.

23.

Plures adhuc supersunt disquisitiones, per quas theoria praecedens tum illustrabitur tum ampliabitur.

Ante omnia investigare oportet, num negotium eliminationis, cuius adiumento indeterminatae x, y, z etc. per ξ, η, ζ etc. exprimendae sunt, semper sit possibile. Quum multitudo illarum multitudini harum aequalis sit, e theoria eliminationis in aequationibus linearibus constat, illam eliminationem, si ξ, η, ζ etc. ab invicem independentes sint, certo possibilem fore; sin minus, impossibilem. Supponamus aliquantisper, ξ, η, ζ etc. non esse ab invicem independentes, sed exstare inter ipsas aequationem identicam

$$0 = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K$$

Habebimus itaque

$$F\Sigma aa + G\Sigma ab + H\Sigma ac + \text{etc.} = 0$$
$$F\Sigma ab + G\Sigma bb + H\Sigma bc + \text{etc.} = 0$$
$$F\Sigma ac + G\Sigma bc + H\Sigma cc + \text{etc.} = 0$$

etc., nec non

$$F\Sigma al + G\Sigma bl + H\Sigma cl + \text{etc.} = -K$$

Statuendo porro

$$\left.\begin{aligned} aF + bG + cH + \text{etc.} &= \theta \\ a'F + b'G + c'H + \text{etc.} &= \theta' \\ a''F + b''G + c''H + \text{etc.} &= \theta'' \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

etc., eruitur

$$a\theta + a'\theta' + a''\theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$b\theta + b'\theta' + b''\theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$c\theta + c'\theta' + c''\theta'' + \text{etc.} = 0$$

etc., nec non

$$l\theta + l'\theta' + l''\theta'' + \text{etc.} = -K$$

Multiplicando itaque aequationes (I) resp. per $\theta, \theta', \theta''$ etc., et addendo, obtinemus:

$$0 = \theta\theta + \theta'\theta' + \theta''\theta'' + \text{etc.}$$

quae aequatio manifesto consistere nequit, nisi simul fuerit $\theta = 0, \theta' = 0, \theta'' = 0$ etc. Hinc primo colligimus, necessario esse debere $K = 0$. Dein aequationes (I) docent, functiones v, v', v'' etc. ita comparatas esse, ut ipsarum valores non mutentur, si valores quantitatum x, y, z etc. capiant incrementa vel decrementa ipsis F, G, H etc. resp. proportionalia, idemque manifesto de functionibus V, V', V'' etc. valebit. Suppositio itaque consistere nequit, nisi in casu tali, ubi vel e valoribus exactis quantitatum V, V', V'' etc. valores incognitarum x, y, z etc. determinare impossibile fuisset, i. e. ubi problema natura sua fuisset indeterminatum, quem casum a disquisitione nostra exclusimus.

24.

Denotemus per β, β', β'' etc. multiplicatores, qui eandem relationem habent ad indeterminatam y, quam habent $\alpha, \alpha', \alpha''$ etc. ad x, puta sit

$$a[\beta\alpha] + b[\beta\beta] + c[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta$$
$$a'[\beta\alpha] + b'[\beta\beta] + c'[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta'$$
$$a''[\beta\alpha] + b''[\beta\beta] + c''[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta''$$

etc., ita ut fiat indefinite

$$\beta v + \beta' v' + \beta'' v'' + \text{etc.} = y - B$$

Perinde sint $\gamma, \gamma', \gamma''$ etc. multiplicatores similes respectu indeterminatae z, puta

$$a[\gamma\alpha]+b[\gamma\beta]+c[\gamma\gamma]+\text{etc.}=\gamma$$
$$a'[\gamma\alpha]+b'[\gamma\beta]+c'[\gamma\gamma]+\text{etc.}=\gamma'$$
$$a''[\gamma\alpha]+b''[\gamma\beta]+c''[\gamma\gamma]+\text{etc.}=\gamma''$$

etc., ita ut fiat indefinite

$$\gamma v+\gamma' v'+\gamma'' v''+\text{etc.}=z-C$$

et sic porro. Hoc pacto, perinde ut iam in art. 20 inveneramus

$$\Sigma\alpha a=1,\quad \Sigma\alpha b=0,\quad \Sigma\alpha c=0,\ \text{etc.},\quad \text{nec non}\quad \Sigma\alpha l=-A$$

etiam habebimus

$$\Sigma\beta a=0,\quad \Sigma\beta b=1,\quad \Sigma\beta c=0,\ \text{etc.},\quad \text{atque}\quad \Sigma\beta l=-B$$
$$\Sigma\gamma a=0,\quad \Sigma\gamma b=0,\quad \Sigma\gamma c=1,\ \text{etc.},\quad \text{atque}\quad \Sigma\gamma l=-C$$

et sic porro. Nec minus, quemadmodum in art. 20 prodiit $\Sigma\alpha\alpha=[\alpha\alpha]$, etiam erit

$$\Sigma\beta\beta=[\beta\beta],\quad \Sigma\gamma\gamma=[\gamma\gamma]\ \text{etc.}$$

Multiplicando porro valores ipsorum $\alpha, \alpha', \alpha''$ etc. (art. 20. IV) resp. per β, β', β'' etc., et addendo, obtinemus

$$\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''\ \text{etc.}=[\alpha\beta],\quad \text{sive}\quad \Sigma\alpha\beta=[\alpha\beta]$$

Multiplicando autem valores ipsorum β, β', β'' etc. resp. per $\alpha, \alpha', \alpha''$ etc., et addendo, perinde prodit

$$\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''+\text{etc.}=[\beta\alpha],\quad \text{adeoque}\quad [\alpha\beta]=[\beta\alpha]$$

Prorsus simili modo eruitur

$$[\alpha\gamma]=[\gamma\alpha]=\Sigma\alpha\gamma,\quad [\beta\gamma]=[\gamma\beta]=\Sigma\beta\gamma\ \text{etc.}$$

25.

Denotemus porro per $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. valores functionum v, v', v'' etc., qui prodeunt, dum pro x, y, z etc. ipsarum valores maxime plausibiles A, B, C etc. substituuntur, puta

$$aA+bB+cC+\text{etc.}+l=\lambda$$
$$a'A+b'B+c'C+\text{etc.}+l'=\lambda'$$
$$a''A+b''B+c''C+\text{etc.}+l''=\lambda''$$

etc.; statuamus praeterea

$$\lambda\lambda+\lambda'\lambda'+\lambda''\lambda''+\text{etc.}=M$$

ita ut sit M valor functionis Ω valoribus maxime plausibilibus indeterminatarum respondens, adeoque per ea, quae in art. 20 demonstravimus, valor minimus huius functionis. Hinc erit $a\lambda+a'\lambda'+a''\lambda''+$ etc. valor ipsius ξ, valoribus $x=A$, $y=B$, $z=C$ etc. respondens, adeoque $=0$, i. e. habebimus

$$\Sigma a\lambda=0$$

et perinde fiet

$$\Sigma b\lambda=0,\quad \Sigma c\lambda=0 \text{ etc.};\quad \text{nec non}\quad \Sigma\alpha\lambda=0,\quad \Sigma\beta\lambda=0,\quad \Sigma\gamma\lambda=0 \text{ etc.}$$

Denique multiplicando expressiones ipsarum λ; λ', λ'' etc. per λ, λ', λ'' etc. resp., et addendo, obtinemus $l\lambda+l'\lambda'+l''\lambda''+$ etc. $=\lambda\lambda+\lambda'\lambda'+\lambda''\lambda''+$ etc., sive

$$\Sigma l\lambda=M$$

26.

Substituendo in aequatione $v=ax+by+cz+$ etc. $+l$, pro x, y, z etc. expressiones VII. art. 21, prodibit, adhibitis reductionibus ex praecedentibus obviis,

$$v=\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta+\text{etc.}+\lambda$$

et perinde erit indefinite

$$v'=\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta+\text{etc.}+\lambda'$$
$$v''=\alpha''\xi+\beta''\eta+\gamma''\zeta+\text{etc.}+\lambda''$$

etc. Multiplicando vel has aequationes, vel aequationes I art. 20 resp. per λ, λ', λ'' etc., et addendo, discimus esse indefinite

$$\lambda v+\lambda'v'+\lambda''v''+\text{etc.}=M$$

27.

Functio Ω indefinite in pluribus formis exhiberi potest, quas evolvere operae pretium erit. Ac primo quidem quadrando aequationes I art. 20 et addendo, statim fit

$$\Omega = xx\Sigma aa + yy\Sigma bb + zz\Sigma cc + \text{etc.} + 2xy\Sigma ab + 2xz\Sigma ac + 2yz\Sigma bc + \text{etc.}$$
$$+ 2x\Sigma al + 2y\Sigma bl + 2z\Sigma cl + \text{etc.} + \Sigma ll$$

quae est forma *prima*.

Multiplicando easdem aequationes resp. per v, v', v'' etc., et addendo, obtinemus:

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \text{etc.} + lv + l'v' + l''v'' + \text{etc.}$$

atque hinc, substituendo pro v, v', v'' etc. expressiones in art. praec. traditas,

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \text{etc.} - A\xi - B\eta - C\zeta - \text{etc.} + M$$

sive

$$\Omega = \xi(x-A) + \eta(y-B) + \zeta(z-C) + \text{etc.} + M$$

quae est forma *secunda*.

Substituendo in forma secunda pro $x-A$, $y-B$, $z-C$ etc. expressiones VII. art. 21, obtinemus formam *tertiam:*

$$\Omega = [\alpha\alpha]\xi\xi + [\beta\beta]\eta\eta + [\gamma\gamma]\zeta\zeta + \text{etc.} + 2[\alpha\beta]\xi\eta + 2[\alpha\gamma]\xi\zeta + 2[\beta\gamma]\eta\zeta + \text{etc.} + M$$

His adiungi potest forma *quarta*, ex forma tertia atque formulis art. praec. sponte demanans:

$$\Omega = (v-\lambda)^2 + (v'-\lambda')^2 + (v''-\lambda'')^2 + \text{etc.} + M, \text{ sive}$$
$$\Omega = M + \Sigma(v-\lambda)^2$$

quae forma conditionem minimi directe ob oculos sistit.

28.

Sint e, e', e'' etc. errores in observationibus, quae dederunt $V=L$, $V'=L'$, $V''=L''$ etc., commissi, i. e. sint valores veri functionum V, V', V'' etc. resp. $L-e$, $L'-e'$, $L''-e''$ etc. adeoque valores veri ipsarum v, v', v'' etc. resp. $-e\sqrt{p}$, $-e'\sqrt{p'}$, $-e''\sqrt{p''}$ etc. Hinc valor verus ipsius x erit

$$= A - \alpha e\sqrt{p} - \alpha' e'\sqrt{p'} - \alpha'' e''\sqrt{p''} - \text{etc.}$$

sive error valoris ipsius x, in determinatione maxime idonea commissus, quem per Ex denotare convenit,

$$= \alpha e\sqrt{p} + \alpha' e'\sqrt{p'} + \alpha'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Perindeerror valoris ipsius y in determinatione maxime idonea commissus, quem per Ey denotabimus, erit

$$= \beta e\sqrt{p} + \beta' e'\sqrt{p'} + \beta'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Valor medius quadrati $(Ex)^2$ invenitur

$$= mmp(\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.}) = mmp[\alpha\alpha]$$

valor medius quadrati $(Ey)^2$ perinde $= mmp[\beta\beta]$ etc., ut iam supra docuimus. Iam vero etiam valorem medium *producti* $Ex.Ey$ assignare licet, quippe qui invenitur

$$= mmp(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.}) = mmp[\alpha\beta]$$

Concinne haec ita quoque exprimi possunt. Valores medii quadratorum $(Ex)^2$, $(Ey)^2$ etc. resp. aequales sunt productis ex $\frac{1}{2}mmp$ in quotientes differentialium partialium secundi ordinis

$$\frac{dd\Omega}{d\xi^2}, \quad \frac{dd\Omega}{d\eta^2} \text{ etc.}$$

valorque medius producti talis, ut $Ex.Ey$, aequalis est producto ex $\frac{1}{2}mmp$ in quotientem differentialem $\frac{dd\Omega}{d\xi.d\eta}$, quatenus quidem Ω tamquam functio indeterminatarum ξ, η, ζ etc. consideratur.

29.

Designet t functionem datam linearem quantitatum x, y, z etc. puta sit

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k$$

Valor ipsius t, e valoribus maxime plausibilibus ipsarum x, y, z etc. prodiens hinc erit $= fA + gB + hC + \text{etc.} + k$, quem per K denotabimus. Qui si tamquam valor verus ipsius t adoptatur, error committitur, qui erit

$$= fEx + gEy + hEz + \text{etc.}$$

atque per Et denotabitur. Manifesto valor medius huius erroris fit $= 0$, sive error a parte constante liber erit. At valor medius quadrati $(Et)^2$, sive valor medius aggregati

$$\begin{aligned} ff(Ex)^2 &+ 2fgEx.Ey + 2fhEx.Ez + \text{etc.} \\ &+ gg(Ey)^2 \quad + 2ghEy.Ez + \text{etc.} \\ &\qquad + hh(Ez)^2 \quad + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

per ea, quae in art. praec. exposuimus, aequalis fit producto ex mmp in aggregatum

$$\begin{aligned} ff[\alpha\alpha] &+ 2fg[\alpha\beta] + 2fh[\alpha\gamma] + \text{etc.} \\ &+ gg[\beta\beta] + 2gh[\beta\gamma] + \text{etc.} \\ &\qquad + hh[\gamma\gamma] + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

sive producto ex mmp in valorem functionis $\Omega - M$, qui prodit per substitutiones

$$\xi = f, \quad \eta = g, \quad \zeta = h \text{ etc.}$$

Denotando igitur hunc valorem determinatum functionis $\Omega - M$ per ω, error medius metuendus, dum determinationi $t = K$ adhaeremus, erit $= m\sqrt{p\omega}$, sive pondus huius determinationis $= \frac{1}{\omega}$.

Quum indefinite habeatur

$$\Omega - M = (x - A)\xi + (y - B)\eta + (z - C)\zeta + \text{etc.}$$

patet, ω quoque aequalem esse valori determinato expressionis

$$(x - A)f + (y - B)g + (z - C)h + \text{etc.}$$

sive valori determinato ipsius $t - K$, qui prodit, si indeterminatis x, y, z etc. tribuuntur valores ii, qui respondent valoribus ipsarum ξ, η, ζ etc. his f, g, h etc.

Denique observamus, si t indefinite in formam functionis ipsarum ξ, η, ζ etc. redigatur, ipsius partem constantem necessario fieri $= K$. Quodsi igitur indefinite fit

$$t = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K, \qquad \text{erit} \quad \omega = fF + gG + hH + \text{etc.}$$

30.

Functio Ω valorem suum *absolute minimum* M, ut supra vidimus, nanciscitur, faciendo $x = A$, $y = B$, $z = C$ etc., sive $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. Si vero alicui illarum quantitatum valor *alius* iam tributus est, e. g. $x = A + \Delta$, variantibus reliquis Ω assequi potest valorem relative minimum, qui manifesto obtinetur adiumento aequationum

$$x = A + \Delta, \quad \frac{d\Omega}{dy} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dz} = 0 \text{ etc.}$$

Fieri debet itaque $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc., adeoque, quoniam

$$x = A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc.}, \quad \xi = \frac{\Delta}{[\alpha\alpha]}$$

Simul habebitur

$$y = B + \frac{[\alpha\beta]\Delta}{[\alpha\alpha]}, \quad z = C + \frac{[\alpha\gamma]\Delta}{[\alpha\alpha]} \text{ etc.}$$

Valor relative minimus ipsius Ω autem fit $= [\alpha\alpha]\xi\xi + M = M + \frac{\Delta\Delta}{[\alpha\alpha]}$. Vice versa hinc colligimus, si valor ipsius Ω limitem praescriptum $M + \mu\mu$ non superare debet, valorem ipsius x necessario inter limites $A - \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ et $A + \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ contentum esse debere. Notari meretur, $\mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ aequalem fieri errori medio in valore maxime plausibili ipsius x metuendo, si statuatur $\mu = m\sqrt{p}$, i. e. si μ aequalis sit errori medio observationum talium, quibus pondus $= 1$ tribuitur.

Generalius investigemus valorem minimum ipsius Ω, qui pro valore dato ipsius t locum habere potest, denotante t ut in art. praec. functionem linearem $fx + gy + hz +$ etc. $+ k$, et cuius valor maxime plausibilis $= K$: valor praescriptus ipsius t denotetur per $K + \varkappa$. E theoria maximorum et minimorum constat, problematis solutionem petendam esse ex aequationibus

$$\frac{d\Omega}{dx} = \theta\frac{dt}{dx}$$
$$\frac{d\Omega}{dy} = \theta\frac{dt}{dy}$$
$$\frac{d\Omega}{dz} = \theta\frac{dt}{dz} \text{ etc.}$$

sive $\xi = \theta f$, $\eta = \theta g$, $\zeta = \theta h$ etc., designante θ multiplicatorem adhuc indeterminatum. Quare si, ut in art. praec., statuimus, esse *indefinite*

$$t = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K$$

habebimus

$$K+\varkappa = \theta(fF+gG+hH+\text{ etc.})+K, \text{ sive}$$
$$\theta = \frac{\varkappa}{\omega}$$

accipiendo ω in eadem significatione ut in art. praec. Et quum $\Omega - M$, indefinite, sit functio homogenea secundi ordinis indeterminatarum ξ, η, ζ etc., sponte patet, eius valorem pro $\xi = \theta f$, $\eta = \theta g$, $\zeta = \theta h$ etc. fieri $= \theta\theta\omega$, et proin valorem minimum, quem Ω pro $t = K+\varkappa$ obtinere potest, fieri $= M + \theta\theta\omega = M + \frac{\varkappa\varkappa}{\omega}$. Vice versa, si Ω debet valorem aliquem praescriptum $M+\mu\mu$ non superare, valor ipsius t necessario inter limites $K - \mu\sqrt{\omega}$ et $K+\mu\sqrt{\omega}$ contentus esse debet, ubi $\mu\sqrt{\omega}$ aequalis fit errori medio in determinatione maxime plausibili ipsius t metuendo, si pro μ accipitur error medius observationum, quibus pondus $= 1$ tribuitur.

31.

Quoties multitudo quantitatum x, y, z etc. paullo maior est, determinatio numerica valorum A, B, C etc. ex aequationibus $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. per eliminationem vulgarem satis molesta evadit. Propterea in Theoria Motus Corporum Coelestium art. 182 algorithmum peculiarem addigitavimus, atque in *Disquisitione de elementis ellipticis Palladis* (Comm. recent. Soc. Gotting Vol. I) copiose explicavimus, per quem labor ille ad tantam quantam quidem res fert simplicitatem evehitur. Reducenda scilicet est functio Ω sub formam talem:

$$\frac{u^0 u^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{u'u'}{\mathfrak{B}'} + \frac{u''u''}{\mathfrak{C}''} + \frac{u'''u'''}{\mathfrak{D}'''} + \text{ etc. } + M$$

ubi divisores $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{D}'''$ etc. sunt quantitates determinatae; u^0, u', u'', u''' etc. autem functiones lineares ipsarum x, y, z etc., quarum tamen secunda u' libera est ab x, tertia u'' libera ab x et y, quarta u''' libera ab x, y et z, et sic porro, ita ut ultima $u^{(\pi-1)}$ solam ultimam indeterminatarum x, y, z etc. implicet; denique coëfficientes, per quos x, y, z etc. resp. multiplicatae sunt in u^0, u', u'' etc., resp. aequales sunt ipsis $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc. Quibus ita factis statuendum est $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$, $u''' = 0$ etc., unde valores incognitarum x, y, z etc. inverso ordine commodissime elicientur. Haud opus videtur, algorithmum ipsum, per quem haec transformatio functionis Ω absolvitur, hic denuo repetere.

Sed multo adhuc magis prolixum calculum requirit eliminatio indefinita, cuius adiumento illarum determinationum pondera invenire oportet. Pondus qui-

dem determinationis incognitae ultimae (quae sola ultimam $u^{(\pi-1)}$ ingreditur) per ea, quae in Theoria Motus Corporum Coelestium demonstrata sunt, facile invenitur aequale termino ultimo in serie divisorum $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc.; quapropter plures calculatores, ut eliminationem illam molestam evitarent, deficientibus aliis subsidiis, ita sibi consuluerunt, ut algorithmum, de quo diximus pluries, mutato quantitatum x, y, z etc., ordine, repeterent, singulis deinceps ultimum locum occupantibus. Gratum itaque geometris fore speramus, si modum novum pondera determinationum calculandi, e penitiori argumenti perscrutatione haustum hic exponamus, qui nihil amplius desiderandum relinquere videtur.

32.

Statuamus itaque esse (I)

$$\begin{aligned}
u^0 &= \mathfrak{A}^0 x + \mathfrak{B}^0 y + \mathfrak{C}^0 z + \text{ etc. } + \mathfrak{L}^0 \\
u' &= \qquad\quad\ \mathfrak{B}' y + \mathfrak{C}' z + \text{ etc. } + \mathfrak{L}' \\
u'' &= \qquad\qquad\qquad\ \mathfrak{C}'' z + \text{ etc. } + \mathfrak{L}'' \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Hinc erit indefinite

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\mathrm{d}\Omega &= \xi \mathrm{d}x + \eta \mathrm{d}y + \zeta \mathrm{d}z + \text{ etc.} \\
&= \frac{u^0 \mathrm{d}u^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{u' \mathrm{d}u'}{\mathfrak{B}'} + \frac{u'' \mathrm{d}u''}{\mathfrak{C}''} + \text{ etc.} \\
&= u^0\left(\mathrm{d}x + \frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0}\mathrm{d}y + \frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0}\mathrm{d}z + \text{ etc.}\right) \\
&\quad + u'\left(\mathrm{d}y + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'}\mathrm{d}z + \text{ etc.}\right) + u''(\mathrm{d}z + \text{ etc.}) + \text{ etc.}
\end{aligned}$$

unde colligimus (II)

$$\begin{aligned}
\xi &= u^0 \\
\eta &= \frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} u^0 + u' \\
\zeta &= \frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} u^0 + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} u' + u'' \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Supponamus, hinc derivari formulas sequentes (III)

$$u^0 = \xi$$
$$u' = A'\xi + \eta$$
$$u'' = A''\xi + B''\eta + \zeta$$
etc.

Iam e differentiali completo aequationis

$$\Omega = \xi(x-A) + \eta(y-B) + \zeta(z-C) + \text{etc.} + M$$

subtracta aequatione

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{d}\Omega = \xi\mathrm{d}x + \eta\mathrm{d}y + \zeta\mathrm{d}z + \text{etc.}$$

sequitur

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{d}\Omega = (x-A)\mathrm{d}\xi + (y-B)\mathrm{d}\eta + (z-C)\mathrm{d}\zeta + \text{etc.}$$

quae expressio identica esse debet cum hac ex III demanante:

$$\frac{u^0}{\mathfrak{A}^0}.\mathrm{d}\xi + \frac{u'}{\mathfrak{B}'}(A'\mathrm{d}\xi + \mathrm{d}\eta) + \frac{u''}{\mathfrak{C}''}(A''\mathrm{d}\xi + B''\mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\zeta) + \text{etc.}$$

Hinc colligimus (IV)

$$x = \frac{u^0}{\mathfrak{A}^0} + A'.\frac{u'}{\mathfrak{B}'} + A''.\frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + A$$
$$y = \frac{u'}{\mathfrak{B}'} + B''.\frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + B$$
$$z = \frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + C$$
etc.

Substituendo in his expressionibus pro u^0, u', u'' etc. valores earum ex III depromtos eliminatio indefinita absoluta erit. Et quidem ad pondera determinanda habebimus (V)

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{\mathfrak{A}^0} + \frac{A'A'}{\mathfrak{B}'} + \frac{A''A''}{\mathfrak{C}''} + \frac{A'''A'''}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.}$$
$$[\beta\beta] = \frac{1}{\mathfrak{B}'} + \frac{B''B''}{\mathfrak{C}''} + \frac{B'''B'''}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.}$$
$$[\gamma\gamma] = \frac{1}{\mathfrak{C}''} + \frac{C'''C'''}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.}$$
etc.

quarum formularum simplicitas nihil desiderandum relinquit. Ceterum etiam pro

coëfficientibus reliquis $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, $[\beta\gamma]$ etc. formulae aeque simplices prodeunt, quas tamen, quum illorum usus sit rarior, hic apponere supersedemus.

33.

Propter rei gravitatem, et ut omnia ad calculum parata sint, etiam formulas explicitas ad determinationem coëfficientium A', A'', A''' etc. B'', B''' etc. etc. hic adscribere visum est. Duplici modo hic calculus adornari potest, quum aequationes identicae prodire debeant, tum si valores ipsarum u^0, u', u'' etc. ex III depromti in II substituuntur, tum ex substitutione valorum ipsarum ξ, η, ζ etc. ex II in III. Prior modus haec formularum systemata subministrat:

$$\frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} + A' = 0$$
$$\frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} . A' + A'' = 0$$
$$\frac{\mathfrak{D}^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'} . A' + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} . A'' + A''' = 0$$

etc. unde inveniuntur A', A'', A''' etc.

$$\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} + B'' = 0$$
$$\frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} . B'' + B''' = 0$$

etc. unde inveniuntur B'', B''' etc.

$$\frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} + C''' = 0$$

etc. unde inveniuntur C''' etc. Et sic porro.

Alter modus has formulas suggerit:

$$\mathfrak{A}^0 A' + \mathfrak{B}^0 = 0$$

unde habetur A'.

$$\mathfrak{A}^0 A'' + \mathfrak{B}^0 B'' + \mathfrak{C}^0 = 0$$
$$\mathfrak{B}' B'' + \mathfrak{C}' = 0$$

unde inveniuntur B'' et A''.

$$\mathfrak{A}^0 A''' + \mathfrak{B}^0 B''' + \mathfrak{C}^0 C''' + \mathfrak{D}^0 = 0$$
$$\mathfrak{B}' B''' + \mathfrak{C}' C''' + \mathfrak{D}' = 0$$
$$\mathfrak{C}'' C''' + \mathfrak{D}'' = 0$$

unde inveniuntur C''', B''', A'''. Et sic porro.

Uterque modus aeque fere commodus est, si pondera determinationum cunctarum x, y, z etc. desiderantur; quoties vero e quantitatibus $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$ etc. una tantum vel altera requiritur, manifesto systema prius longe praeferendum erit.

Ceterum combinatio aequationum I cum IV ad easdem formulas perducit, insuperque calculum duplicem ad eruendos valores maxime plausibiles A, B, C etc. ipsos suppeditat, puta *primo*

$$A = -\frac{\mathfrak{L}^0}{\mathfrak{A}^0} - A'\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{B}'} - A''\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - A'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}$$
$$B = -\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{B}'} - B''\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - B'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}$$
$$C = -\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - C'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}$$
etc.

Calculus alter identicus est cum vulgari, ubi statuitur $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ etc.

34.

Quae in art. 32 exposuimus, sunt tantummodo casus speciales theorematis generalioris, quod ita se habet:

Theorema. *Designet t functionem linearem indeterminatarum x, y, z etc. hanc*

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k$$

quae transmutata in functionem indeterminatarum u^0, u', u'' etc. fiat

$$t = k^0u^0 + k'u' + k''u'' + \text{etc.} + K$$

Quibus ita se habentibus erit K valor maxime plausibilis ipsius t, atque pondus huius determinationis

$$= \frac{1}{\mathfrak{A}^0 k^0 k^0 + \mathfrak{B}' k' k' + \mathfrak{C}'' k'' k'' + \text{etc.}}$$

Dem. Pars prior theorematis inde patet, quod valor maxime plausibilis ipsius t valoribus $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ etc. respondere debet. Ad posterio-

6

rem demonstrandam observamus, quoniam $\frac{1}{2}\mathrm{d}\Omega = \xi\mathrm{d}x + \eta\mathrm{d}y + \zeta\mathrm{d}z +$ etc., atque $\mathrm{d}t = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y + h\mathrm{d}z +$ etc., esse, pro $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc., independenter a valoribus differentialium $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ etc.

$$\mathrm{d}\Omega = 2\mathrm{d}t$$

Hinc vero sequitur, pro iisdem valoribus $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc., fieri

$$\frac{u^0}{\mathfrak{A}^0}\mathrm{d}u^0 + \frac{u'}{\mathfrak{B}'}\mathrm{d}u' + \frac{u''}{\mathfrak{C}''}.\mathrm{d}u'' + \text{etc.} = k^0\mathrm{d}u^0 + k'\mathrm{d}u' + k''\mathrm{d}u'' + \text{etc.}$$

Iam facile perspicitur, si $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ etc. sint ab invicem independentes, etiam $\mathrm{d}u^0$, $\mathrm{d}u'$, $\mathrm{d}u''$ etc., ab invicem independentes esse; unde colligimus, pro $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc. esse

$$u^0 = \mathfrak{A}^0 k^0, \quad u' = \mathfrak{B}'k', \quad u'' = \mathfrak{C}''k'' \quad \text{etc.}$$

Quamobrem valor ipsius Ω, iisdem valoribus respondens erit

$$= \mathfrak{A}^0 k^0 k^0 + \mathfrak{B}'k'k' + \mathfrak{C}''k''k'' + \text{etc.} + M$$

unde per art. 29 theorematis nostri veritas protinus demanat.

Ceterum si transformationem functionis t immediate, i. e. absque cognitione substitutionum IV. art. 32, perficere cupimus, praesto sunt formulae:

$$\begin{aligned} f &= \mathfrak{A}^0 k^0 \\ g &= \mathfrak{B}^0 k^0 + \mathfrak{B}'k' \\ h &= \mathfrak{C}^0 k^0 + \mathfrak{C}'k' + \mathfrak{C}''k'' \quad \text{etc.,} \end{aligned}$$

unde coëfficientes k^0, k', k'' etc. deinceps determinabuntur, tandemque habebitur

$$K = k - \mathfrak{L}^0 k^0 - \mathfrak{L}'k' - \mathfrak{L}''k'' - \text{etc.}$$

35.

Tractatione peculiari dignum est problema sequens, tum propter utilitatem practicam, tum propter solutionis concinnitatem.

Invenire mutationes valorum maxime plausibilium incognitarum ab accessione aequationis novae productas, nec non pondera novarum determinationum.

Retinebimus designationes in praecedentibus adhibitas, ita ut aequationes primitivae, ad pondus $= 1$ reductae, sint hae $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$ etc.; ag-

gregatum indefinitum $vv + v'v' + v''v''$ etc. $= \Omega$; porro ut ξ, η, ζ etc. sint quotientes differentiales partiales

$$\frac{d\Omega}{2dx}, \quad \frac{d\Omega}{2dy}, \quad \frac{d\Omega}{2dz} \text{ etc.}$$

denique ut ex eliminatione indefinita sequatur

$$\left.\begin{aligned} x &= A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{ etc.} \\ y &= B + [\alpha\beta]\xi + [\beta\beta]\eta + [\beta\gamma]\zeta + \text{ etc.} \\ z &= C + [\alpha\gamma]\xi + [\beta\gamma]\eta + [\gamma\gamma]\zeta + \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Iam supponamus, accedere aequationem novam $v^* = 0$ (proxime veram, et cuius pondus $= 1$), et inquiramus, quantas mutationes hinc nacturi sint tum valores incognitarum maxime plausibiles A, B, C etc., tum coëfficientes $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc.

Statuamus $\Omega + v^*v^* = \Omega^*$, $\frac{d\Omega^*}{2dx} = \xi^*$, $\frac{d\Omega^*}{2dy} = \eta^*$, $\frac{d\Omega^*}{2dz} = \zeta^*$ etc

supponamusque, hinc per eliminationem sequi

$$x = A^* + [\alpha\alpha^*]\xi^* + [\alpha\beta^*]\eta^* + [\alpha\gamma^*]\zeta^* \text{ etc.}$$

Denique sit

$$v^* = fx + gy + hz + \text{ etc. } + k$$

prodeat inde, substitutis pro x, y, z etc. valoribus ex (I),

$$v^* = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{ etc. } + K$$

statuaturque

$$Ff + Gg + Hh + \text{ etc. } = \omega$$

Manifesto K erit valor maxime plausibilis functionis v^*, quatenus ex aequationibus primitivis sequitur, sine respectu valoris 0, quem observatio accessoria praebuit, atque $\frac{1}{\omega}$ pondus istius determinationis.

Iam habemus

$$\xi^* = \xi + fv^*, \quad \eta^* = \eta + gv^*, \quad \zeta^* = \zeta + hv^* \text{ etc.}$$

adeoque

$$F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \text{ etc. } + K = v^*(1 + Ff + Gg + Hh + \text{ etc.})$$

sive

$$v^* = \frac{F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \text{ etc. } + K}{1 + \omega}$$

Perinde fit

$$\begin{aligned} x &= A+[\alpha\alpha]\xi^*+[\alpha\beta]\eta^*+[\alpha\gamma]\zeta^*+\text{etc.}-v^*(f[\alpha\alpha]+g[\alpha\beta]+h[\alpha\gamma]+\text{etc.}) \\ &= A+[\alpha\alpha]\xi^*+[\alpha\beta]\eta^*+[\alpha\gamma]\zeta^*+\text{etc.}-Fv^* \\ &= A+[\alpha\alpha]\xi^*+[\alpha\beta]\eta^*+[\alpha\gamma]\zeta^*+\text{etc.}-\frac{F}{1+\omega}(F\xi^*+G\eta^*+H\zeta^*+\text{etc.}+K) \end{aligned}$$

Hinc itaque colligimus

$$A^* = A-\frac{FK}{1+\omega}$$

qui erit valor maxime plausibilis ipsius x ex *omnibus* observationibus;

$$[\alpha\alpha^*] = [\alpha\alpha]-\frac{FF}{1+\omega}$$

adeoque pondus istius determinationis

$$= \frac{1}{[\alpha\alpha]-\frac{FF}{1+\omega}}$$

Prorsus eodem modo invenitur valor maxime plausibilis ipsius y, *omnibus* observationibus superstructus

$$B^* = B-\frac{GK}{1+\omega}$$

atque pondus huius determinationis

$$= \frac{1}{[\beta\beta]-\frac{GG}{1+\omega}}$$

et sic porro. Q. E. I.

Liceat huic solutioni quasdam annotationes adiicere.

I. Substitutis his novis valoribus A^*, B^*, C^* etc., functio v^* obtinet valorem maxime plausibilem

$$K-\frac{K}{1+\omega}(Ff+Gg+Hh+\text{etc.}) = \frac{K}{1+\omega}$$

Et quum indefinite sit

$$v^* = \frac{F}{1+\omega}\cdot\xi^*+\frac{G}{1+\omega}\cdot\eta^*+\frac{H}{1+\omega}\cdot\zeta^*+\text{etc.}+\frac{K}{1+\omega}$$

pondus istius determinationis per principia art. 29 eruitur

$$= \frac{1+\omega}{Ff+Gg+Hh+\text{etc.}} = \frac{1}{\omega}+1$$

Eadem immediate resultant ex applicatione regulae in fine art. 21 traditae; scilicet complexus aequationum primitivarum praebuerat determinationem $v^* = K$ cum pondere $= \frac{1}{\omega}$, dein observatio nova dedit determinationem aliam, ab illa independentem, $v^* = 0$, cum pondere $= 1$, quibus combinatis prodit determinatio $v^* = \frac{K}{1+\omega}$ cum pondere $= \frac{1}{\omega}+1$.

II. Hinc porro sequitur, quum pro $x = A^*$, $y = B^*$, $z = C^*$ etc. esse debeat $\xi^* = 0$, $\eta^* = 0$, $\zeta^* = 0$ etc., pro iisdem valoribus fieri

$$\xi = -\frac{fK}{1+\omega}, \quad \eta = -\frac{gK}{1+\omega}, \quad \zeta = -\frac{hK}{1+\omega} \quad \text{etc.}$$

nec non, quoniam indefinite $\Omega = \xi(x-A)+\eta(y-B)+\zeta(z-C)+\text{etc.}+M$,

$$\Omega = \frac{KK}{(1+\omega)^2}(Ff+Gg+Hh+\text{etc.})+M = M+\frac{\omega KK}{(1+\omega)^2}$$

denique, quoniam indefinite $\Omega^* = \Omega + v^* v^*$,

$$\Omega^* = M+\frac{\omega KK}{(1+\omega)^2}+\frac{KK}{(1+\omega)^2} = M+\frac{KK}{1+\omega}$$

III. Comparando haec cum iis, quae in art. 30 docuimus, animadvertimus, functionem Ω hic valorem minimum obtinere, quem pro valore determinato functionis $v^* = \frac{K}{1+\omega}$ accipere potest.

36.

Problematis alius, praecedenti affinis, puta

Investigare mutationes valorum maxime plausibilium incognitarum, a mutato pondere unius ex observationibus primitivis oriundas, nec non pondera novarum determinationum

solutionem tantummodo hic adscribemus, demonstrationem, quae ad instar art. praec. facile absolvitur, brevitatis caussa supprimentes.

Supponamus, peracto demum calculo animadverti, alicui observationum pondus seu nimis parvum, seu nimis magnum tributum esse, e. g. observationi primae, quae dedit $V = L$, loco ponderis p in calculo adhibiti rectius tribui pondus $= p^*$. Tunc haud opus erit calculum integrum repetere, sed commodius correctiones per formulas sequentes computare licebit.

Valores incognitarum maxime plausibiles correcti erunt hi:

$$x = A - \frac{(p^* - p)\alpha\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$
$$y = B - \frac{(p^* - p)\beta\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$
$$z = C - \frac{(p^* - p)\gamma\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

etc.ponderaque harum determinationum invenientur, dividendo unitatem resp. per

$$[\alpha\alpha] - \frac{(p^* - p)\alpha\alpha}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$
$$[\beta\beta] - \frac{(p^* - p)\beta\beta}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$
$$[\gamma\gamma] - \frac{(p^* - p)\gamma\gamma}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})} \quad \text{etc.}$$

Haec solutio simul complectitur casum, ubi peracto calculo percipitur, unam ex observationibus omnino reiici debuisse, quum hoc idem sit ac si facias $p^* = 0$; et perinde valor $p^* = \infty$ refertur ad casum eum, ubi aequatio $V = L$, quae in calculo tamquam approximata tractata erat, revera praecisione absoluta gaudet.

Ceterum quoties vel aequationibus, quibus calculus superstructus erat, *plures* novae accedunt, vel *pluribus* ex illis pondera erronea tributa esse percipitur, computus correctionum nimis complicatus evaderet; quocirca in tali casu calculum ab integro reficere praestabit.

37.

In artt. 15. 16 methodum explicavimus, observationum praecisionem proxime determinandi *). Sed haec methodus supponit, errores, qui revera occurrerint, satis multos exacte cognitos esse, quae conditio, stricte loquendo, rarissime, ne dicam numquam, locum habebit. Quodsi quidem quantitates, quarum valores approximati per observationes innotuerunt, secundum legem cognitam, ab una pluribusve quantitatibus incognitis pendent, harum valores maxime plausibiles per methodum quadratorum minimorum eruere licebit, ac dein valores quantitatum, quae observationum obiecta fuerant, illinc computati perparum a valoribus

*) Disquisitio de eodem argumento, quam in commentatione anteriore (*Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften* Vol. I, p. 185) tradideramus, eidem hypothesi circa indolem functionis probabilitatem errorum exprimentis innixa erat, cui in Theoria motus corporum coelestium methodum quadratorum minimorum superstruxeramus (vid. art. 9, III).

veris discrepare censebuntur, ita ut ipsorum differentias a valoribus observatis eo maiore iure tamquam observationum errores veros adoptare liceat, quo maior fuerit harum multitudo. Hanc praxin sequuti sunt omnes calculatores, qui observationum praecisionem in casibus concretis a posteriori aestimare susceperunt: sed manifesto illa theoretice erronea est, et quamquam in casibus multis ad usus practicos sufficere possit, tamen in aliis enormiter peccare potest. Summopere itaque hoc argumentum dignum est, quod accuratius enodetur.

Retinebimus in hac disquisitione designationes inde ab art. 19 adhibitas. Praxis ea, de qua diximus, quantitates A, B, C etc. tamquam valores veros ipsarum x, y, z considerat, et proin ipsas $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. tamquam valores veros functionum v, v', v'' etc. Si omnes observationes aequali praecisione gaudent, ipsarumque pondus $p = p' = p''$ etc. pro unitate acceptum est, eaedem quantitates, signis mutatis, in illa suppositione observationum errores exhibent, unde praecepta art. 15 praebent observationum errorem medium m

$$= \sqrt{\frac{\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + \lambda''\lambda'' + \text{etc.}}{\pi}} = \sqrt{\frac{M}{\pi}}$$

Si observationum praecisio non est eadem, quantitates $-\lambda, -\lambda', -\lambda''$ etc. exhiberent observationum errores per radices quadratas e ponderibus multiplicatos, praeceptaque art. 16 ad eandem formulam $\sqrt{\frac{M}{\pi}}$ perducerent, iam errorem medium talium observationum, quibus pondus $= 1$ tribuitur, denotantem. Sed manifesto calculus exactus requireret, ut loco quantitatum $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. valores functionum v, v', v'' etc. e valoribus veris ipsarum x, y, z etc. prodeuntes adhiberentur, i. e. loco ipsius M, valor functionis Ω valoribus veris ipsarum x, y, z etc. respondens. Qui quamquam assignari nequeat, tamen certi sumus, eum esse maiorem quam M (quippe qui est minimus possibilis), excipiendo casum infinite parum probabilem, ubi incognitarum valores maxime plausibiles exacte cum veris quadrant. In genere itaque affirmare possumus, praxin vulgarem errorem medium iusto minorem producere, sive observationibus praecisionem nimis magnam tribuere. Videamus iam, quid doceat theoria rigorosa.

38.

Ante omnia investigare oportet, quonam modo M ab observationum erroribus veris pendeat. Denotemus hos, ut in art. 28, per e, e', e'' etc., statuamusque ad maiorem simplicitatem

$$e\sqrt{p} = \varepsilon, \quad e'\sqrt{p'} = \varepsilon', \quad e''\sqrt{p''} = \varepsilon'' \text{ etc., nec non}$$
$$m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''} \text{ etc.} = \mu$$

Porro sint valores veri ipsarum x, y, z etc., resp. $A-x^0$, $B-y^0$, $C-z^0$ etc., quibus respondeant valores ipsarum ξ, η, ζ etc. hi $-\xi^0$, $-\eta^0$, $-\zeta^0$ etc. Manifesto iisdem respondebunt valores ipsarum v, v', v'' etc. hi $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc., ita ut habeatur

$$\xi^0 = a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \text{etc.}$$
$$\eta^0 = b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \text{etc.}$$
$$\zeta^0 = c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \text{etc.}$$

etc. nec non

$$x^0 = \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \text{etc.}$$
$$y^0 = \beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \beta''\varepsilon'' + \text{etc.}$$
$$z^0 = \gamma\varepsilon + \gamma'\varepsilon' + \gamma''\varepsilon'' + \text{etc.}$$

Denique statuemus

$$\Omega^0 = \varepsilon\varepsilon + \varepsilon'\varepsilon' + \varepsilon''\varepsilon'' + \text{etc.}$$

ita ut sit Ω^0 aequalis valori functionis Ω, valoribus veris ipsarum x, y, z etc. respondenti. Hinc quum habeatur indefinite

$$\Omega = M + (x-A)\xi + (y-B)\eta + (z-C)\zeta + \text{etc.}$$

erit etiam

$$M = \Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \text{etc.}$$

Hinc manifestum est, M, evolutione facta esse functionem homogeneam secundi ordinis errorum e, e', e'' etc., quae, pro diversis errorum valoribus maior minorve evadere poterit. Sed quatenus errorum magnitudo nobis incognita manet, functionem hanc indefinite considerare, imprimisque secundum principia calculi probabilitatis eius valorem medium assignare conveniet. Quem inveniemus, si loco quadratorum $ee, e'e', e''e''$ etc. resp. scribimus $mm, m'm', m''m''$ etc., producta vero $ee', ee'', e'e''$ etc omnino omittimus, vel quod idem est, si loco cuiusvis quadrati $\varepsilon\varepsilon, \varepsilon'\varepsilon', \varepsilon''\varepsilon''$ etc. scribimus $\mu\mu$, productis $\varepsilon\varepsilon', \varepsilon\varepsilon'', \varepsilon'\varepsilon''$ etc. prorsus neglectis. Hoc modo e termino Ω^0 manifesto provenit $\pi\mu\mu$; terminus $-x^0\xi^0$ producet

$$-(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.})\mu\mu = -\mu\mu$$

et similiter singulae partes reliquae praebebunt $-\mu\mu$, ita ut valor medius totalis fiat $= (\pi-\rho)\mu\mu$, denotante π multitudinem observationum, ρ multitudinem incognitarum. Valor verus quidem ipsius M, prout fors errores obtulit, maior minorve medio fieri potest, sed discrepantia eo minoris momenti erit, quo maior fuerit observationum multitudo, ita ut pro valore approximato ipsius μ accipere liceat

$$\sqrt{\frac{M}{\pi-\rho}}$$

Valor itaque ipsius μ, ex praxi erronea, de qua in art. praec. loquuti sumus, prodiens, augeri debet in ratione quantitatis $\sqrt{(\pi-\rho)}$ ad $\sqrt{\pi}$.

39.

Quo clarius eluceat, quanto iure valorem fortuitum ipsius M medio aequiparare liceat, adhuc investigare oportet errorem medium metuendum, dum statuimus $\frac{M}{\pi-\rho} = \mu\mu$. Iste error medius aequalis est radici quadratae e valore medio quantitatis

$$\left(\frac{\Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \text{etc.} - (\pi-\rho)\mu\mu}{\pi-\rho}\right)^2$$

quam ita exhibebimus

$$\left(\frac{\Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \text{etc.}}{\pi-\rho}\right)^2 - \frac{2\mu\mu}{\pi-\rho}(\Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \text{etc.} - (\pi-\rho)\mu\mu) - \mu^4$$

et quum manifesto valor medius termini secundi fiat $= 0$, res in eo vertitur, ut indagemus valorem medium functionis

$$\Psi = (\Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \text{etc.})^2$$

quo invento et per N designato, error medius quaesitus erit

$$= \sqrt{\left(\frac{N}{(\pi-\rho)^2} - \mu^4\right)}$$

Expressio Ψ evoluta manifesto est functio homogenea sive errorum e, e', e'' etc., sive quantitatum $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ etc., eiusque valor medius invenietur, si

1° pro biquadratis e^4, e'^4, e''^4 etc. substituuntur eorum valores medii

2° pro singulis productis e binis quadratis ut $eee'e'$, $eee''e''$, $e'e'e''e''$ etc. producta ex ipsorum valoribus mediis, puta $mmm'm'$, $mmm''m''$, $m'm'm''m''$ etc.

3° partes vero reliquae, quae implicabunt vel factorem talem e^3e', vel talem $eee'e''$, omnino omittuntur. Valores medios biquadratorum e^4, e'^4, e''^4 etc. ipsis biquadratis m^4, m'^4, m''^4 etc. proportionales supponemus (vid. art. 16), ita ut illi sint ad haec ut ν^4 ad μ^4, adeoque ν^4 denotet valorem medium biquadratorum observationum talium quarum pondus $= 1$. Hinc praecepta praecedentia ita quoque exprimi poterunt: Loco singulorum biquadratorum ε^4, ε'^4, ε''^4 etc. scribendum erit ν^4, loco singulorum productorum e binis quadratis ut $\varepsilon\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'$, $\varepsilon\varepsilon\varepsilon''\varepsilon''$, $\varepsilon'\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''$ etc., scribendum erit μ^4, omnesque reliqui termini, qui implicabunt factores tales ut $\varepsilon^3\varepsilon'$, vel $\varepsilon\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''$, vel $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''$ erunt supprimendi.

His probe intellectis facile patebit

I. Valorem medium quadrati $\Omega^0\Omega^0$ esse $\pi\nu^4 + (\pi\pi - \pi)\mu^4$

II. Valor medius producti $\varepsilon\varepsilon x^0\xi^0$ fit $= a\alpha\nu^4 + (a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.})\mu^4$, sive quoniam $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.} = 1$,

$$= a\alpha(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$$

Et quum perinde valor medius producti $\varepsilon'\varepsilon' x^0\xi^0$ fiat $= a'\alpha'(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$, valor medius producti $\varepsilon''\varepsilon'' x^0\xi^0$ autem $= a''\alpha''(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$ et sic porro, patet, valorem medium producti $(\varepsilon\varepsilon + \varepsilon'\varepsilon' + \varepsilon''\varepsilon'' + \text{etc.})x^0\xi^0$ sive $\Omega^0 x^0\xi^0$ esse

$$= \nu^4 - \mu^4 + \pi\mu^4$$

Eundem valorem medium habebunt producta $\Omega^0 y^0\eta^0$, $\Omega^0 z^0\zeta^0$ etc. Quapropter valor medius producti $\Omega^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$ fit

$$= \rho\nu^4 + \rho(\pi - 1)\mu^4$$

III. Ne evolutiones reliquae nimis prolixae evadant, idonea denotatio introducenda erit. Utemur itaque characteristica Σ sensu aliquantum latiore quam supra passim factum est, ita ut denotet aggregatum termini, cui praefixa est, cum omnibus similibus sed non identicis inde per omnes observationum permutationes oriundis. Hoc pacto e. g. habemus $x^0 = \Sigma\alpha\varepsilon$, $x^0x^0 = \Sigma\alpha\alpha\varepsilon\varepsilon + 2\Sigma\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'$. Colligendo itaque valorem medium producti $x^0x^0\xi^0\xi^0$ per partes, habemus primo valorem medium producti $\alpha\alpha\varepsilon\varepsilon\xi^0\xi^0$

$$= a\alpha\alpha\alpha\nu^4 + \alpha\alpha(a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.})\mu^4$$
$$= a\alpha\alpha\alpha(\nu^4 - \mu^4) + \alpha\alpha\mu^4\Sigma a\alpha$$

Perinde valor medius producti $a'\alpha'\varepsilon'\varepsilon'\xi^0\xi^0$ fit $= a'\alpha'a'\alpha'(\nu^4-\mu^4)+a'\alpha'\mu^4\Sigma a\alpha$ et sic porro, adeoque valor medius producti $\xi^0\xi^0\Sigma a\alpha\varepsilon\varepsilon$

$$= (\nu^4-\mu^4)\Sigma a\alpha a\alpha + \mu^4\Sigma a\alpha.\Sigma a\alpha$$

Porro valor medius producti $a\alpha'\varepsilon\varepsilon'\xi^0\xi^0$ fit $= 2a\alpha'a\alpha'\mu^4$, valor medius producti $a\alpha''\varepsilon\varepsilon''\xi^0\xi^0$ perinde $= 2a\alpha''a\alpha''\mu^4$ etc., unde facile concluditur, valorem medium producti $\xi^0\xi^0\Sigma a\alpha'\varepsilon\varepsilon'$ fieri

$$= 2\mu^4\Sigma a\alpha a'\alpha' = \mu^4((\Sigma a\alpha)^2-\Sigma a\alpha a\alpha) = \mu^4(1-\Sigma a\alpha a\alpha)$$

His collectis habemus valorem medium producti $x^0x^0\xi^0\xi^0$

$$= (\nu^4-3\mu^4)\Sigma a\alpha a\alpha + 2\mu^4 + \mu^4\Sigma aa.\Sigma\alpha\alpha$$

IV. Haud absimili modo invenitur valor medius producti $x^0y^0\xi^0\eta^0$

$$= \nu^4\Sigma ab\alpha\beta + \mu^4\Sigma a\alpha b'\beta' + \mu^4\Sigma ab\alpha'\beta' + \mu^4\Sigma a\beta b'\alpha'$$

Sed habetur

$$\Sigma a\alpha b'\beta' = \Sigma a\alpha.\Sigma b\beta - \Sigma a\alpha b\beta$$
$$\Sigma ab\alpha'\beta' = \Sigma ab.\Sigma\alpha\beta - \Sigma ab\alpha\beta$$
$$\Sigma a\beta b'\alpha' = \Sigma a\beta.\Sigma b\alpha - \Sigma a\beta b\alpha$$

unde valor ille medius fit, propter $\Sigma a\alpha = 1$, $\Sigma b\beta = 1$, $\Sigma a\beta = 0$, $\Sigma b\alpha = 0$,

$$= (\nu^4-3\mu^4)\Sigma ab\alpha\beta + \mu^4(1+\Sigma ab.\Sigma\alpha\beta)$$

V. Quum prorsus eodem modo valor medius producti $x^0z^0\xi^0\zeta^0$ fiat

$$= (\nu^4-3\mu^4)\Sigma ac\alpha\gamma + \mu^4(1+\Sigma ac.\Sigma\alpha\gamma)$$

et sic porro, additio valorem medium producti $x^0\xi^0(x^0\xi^0+y^0\eta^0+z^0\zeta^0+\text{etc.})$ suppeditat

$$\begin{aligned}&= (\nu^4-3\mu^4)\Sigma(a\alpha(a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{ etc.}))+(\rho+1)\mu^4\\&\quad+\mu^4(\Sigma aa.\Sigma\alpha\alpha+\Sigma ab.\Sigma\alpha\beta+\Sigma ac.\Sigma\alpha\gamma+\text{ etc.})\\&= (\nu^4-3\mu^4)\Sigma(a\alpha(a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{ etc.}))+(\rho+2)\mu^4\end{aligned}$$

VI. Prorsus eodem modo valor medius producti $y^0\eta^0(x^0\xi^0+y^0\eta^0+z^0\zeta^0+$ etc.$)$ eruitur

7*

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma(b\beta(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})) + (\rho + 2)\mu^4$$

dein valor medius producti $z^0\zeta^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma(c\gamma(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})) + (\rho + 2)\mu^4$$

et sic porro. Hinc per additionem prodit valor medius quadrati $(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})^2$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma((a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2) + (\rho\rho + 2\rho)\mu^4$$

VII. Omnibus tandem rite collectis eruitur

$$N = (\pi - 2\rho)\nu^4 + (\pi\pi - \pi - 2\pi\rho + 4\rho + \rho\rho)\mu^4 + (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma((a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2)$$
$$= (\pi - \rho)(\nu^4 - \mu^4) + (\pi - \rho)^2\mu^4 - (\nu^4 - 3\mu^4)[\rho - \Sigma((a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2)]$$

Error itaque medius in determinatione ipsius $\mu\mu$ per formulam

$$\mu\mu = \frac{M}{\pi - \rho}$$

metuendus erit

$$= \sqrt{\left\{\frac{\nu^4 - \mu^4}{\pi - \rho} - \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\pi - \rho)^2}\cdot[\rho - \Sigma((a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2)]\right\}}$$

40.

Quantitas $\Sigma((a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2)$, quae in expressionem modo inventam ingreditur, generaliter quidem ad formam simpliciorem reduci nequit: nihilominus duo limites assignari possunt, inter quos ipsius valor necessario iacere debet. *Primo* scilicet e relationibus supra evolutis facile demonstratur, esse

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2 + (a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + \text{etc.})^2 + (a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' + \text{etc.})^2 + \text{etc.}$$
$$= a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}$$

unde concludimus, $a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}$ esse quantitatem positivam unitate minorem (saltem non maiorem). Idem valet de quantitate $a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.}$, quippe cui aggregatum

$$(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \text{etc.})^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})^2 + (a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma''\ \text{etc.})^2 + \text{etc.}$$

aequale invenitur; ac perinde $a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.}$ unitate minor erit, et sic

porro. Hinc $\Sigma((a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{etc.})^2)$ necessario est minor quam π. *Secundo* habetur $\Sigma(a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{etc.})=\rho$, quoniam fit $\Sigma a\alpha=1$, $\Sigma b\beta=1$, $\Sigma c\gamma=1$ etc.; unde facile deducitur, summam quadratorum $\Sigma((a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{etc.})^2)$ esse maiorem quam $\frac{\rho\rho}{\pi}$, vel saltem non minorem. Hinc terminus

$$\frac{\nu^4-3\mu^4}{(\pi-\rho)^2}\cdot[\rho-\Sigma((a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{etc.})^2)]$$

necessario iacet inter limites $-\frac{\nu^4-3\mu^4}{\pi-\rho}$ et $\frac{\nu^4-3\mu^4}{\pi-\rho}\cdot\frac{\rho}{\pi}$ vel, si latiores praeferimus, inter hos $-\frac{\nu^4-3\mu^4}{\pi-\rho}$ et $+\frac{\nu^4-3\mu^4}{\pi-\rho}$, et proin erroris medii in valore ipsius $\mu\mu=\frac{M}{\pi-\rho}$ metuendi quadratum inter limites $\frac{2\nu^4-4\mu^4}{\pi-\rho}$ et $\frac{2\mu^4}{\pi-\rho}$, ita ut praecisionem quantamvis assequi liceat, si modo observationum multitudo fuerit satis magna.

Valde memorabile est, in hypothesi ea (art. 9, III), cui theoria quadratorum minimorum olim superstructa fuerat, illum terminum omnino excidere, et sicuti, ad eruendum valorem approximatum erroris medii observationum μ, in omnibus casibus aggregatum $\lambda\lambda+\lambda'\lambda'+\lambda''\lambda''+\text{etc.}=M$ ita tractare oportet, ac si esset aggregatum $\pi-\rho$ errorum fortuitorum, ita in illa hypothesi etiam praecisionem ipsam huius determinationis aequalem fieri ei, quam determinationi ex $\pi-\rho$ erroribus veris tribuendam esse in art. 15 invenimus.

SUPPLEMENTUM

THEORIAE

COMBINATIONIS OBSERVATIONUM

ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM EXHIBITUM 1826. SEPT. 16.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VI.
Gottingae MDCCCXXVIII.

SUPPLEMENTUM
THEORIAE
COMBINATIONIS OBSERVATIONUM
ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE.

1.

In tractatione theoriae combinationis observationum Volumini V Commentationum Recentiorum inserta supposuimus, quantitates eas, quarum valores per observationes praecisione absoluta non gaudentes propositi sunt, a certis elementis incognitis ita pendere, ut in forma functionum datarum horum elementorum exhibitae sint, reique cardinem in eo verti, ut haec elementa quam exactissime ex observationibus deriventur.

In plerisque quidem casibus suppositio ista immediate locum habet. In aliis vero casibus problematis conditio paullo aliter se offert, ita ut primo aspectu dubium videatur, quonam pacto ad formam requisitam reduci possit. Haud raro scilicet accidit, ut quantitates eae, ad quas referuntur observationes, nondum exhibitae sint in forma functionum certorum elementorum, neque etiam ad talem formam reducibiles videantur, saltem non commode vel sine ambagibus: dum, ex altera parte, rei indoles quasdam conditiones suppeditat, quibus valores veri quantitatum observatarum exacte et necessario satisfacere debent.

Attamen, re propius considerata, facile perspicitur, hunc casum ab altero revera essentialiter haud differre, sed ad eundem reduci posse. Designando scilicet multitudinem quantitatum observatarum per π, multitudinem aequationum conditionalium autem per σ, eligendoque e prioribus $\pi-\sigma$ ad lubitum, nihil impedit, quominus has ipsas pro elementis accipiamus, reliquasque, quarum mul-

titudo erit σ, adiumento aequationum conditionalium tamquam functiones illarum consideremus, quo pacto res ad suppositionem nostram reducta erit.

Verum enim vero etiamsi haec via in permultis casibus satis commode ad finem propositum perducat, tamen negari non potest, eam minus genuinam, operaeque adeo pretium esse, problema in ista altera forma seorsim tractare, tantoque magis, quod solutionem perelegantem admittit. Quin adeo, quum haec solutio nova ad calculos expeditiores perducat, quam solutio problematis in statu priore, quoties σ est minor quam $\frac{1}{2}\pi$, sive quod idem est, quoties multitudo elementorum in commentatione priore per ρ denotata maior est quam $\frac{1}{2}\pi$, solutionem novam, quam in commentatione praesenti explicabimus, in tali casu praeferre conveniet priori, siquidem aequationes conditionales e problematis indole absque ambagibus depromere licet.

2.

Designemus per v, v', v'' etc. quantitates, multitudine π, quarum valores per observationem innotescunt, pendeatque quantitas incognita ab illis tali modo, ut per functionem datam illarum, puta u, exhibeatur: sint porro l, l', l'' etc. valores quotientium differentialium

$$\frac{du}{dv},\quad \frac{du}{dv'},\quad \frac{du}{dv''} \text{ etc.}$$

valoribus veris quantitatum v, v', v'' etc. respondentes. Quemadmodum igitur per substitutionem horum valorum verorum in functione u huius valor verus prodit, ita, si pro v, v', v'' etc. valores erroribus e, e', e'' etc. resp. a veris discrepantes substituuntur, obtinebitur valor erroneus incognitae, cuius error statui potest

$$= le + l'e' + l''e'' + \text{ etc.}$$

siquidem, quod semper supponemus, errores e, e', e'' etc. tam exigui sunt, ut (pro functione u non lineari) quadrata et producta negligere liceat. Et quamquam magnitudo errorum e, e', e'' etc. incerta maneat, tamen incertitudinem tali incognitae determinationi inhaerentem generaliter aestimare licet, et quidem per errorem medium in tali determinatione metuendum, qui per principia commentationis prioris fit

$$= \sqrt{(llmm + l'l'm'm' + l''l''m''m'' + \text{ etc.})}$$

denotantibus m, m', m'' etc. errores medios observationum, aut si singulae observationes aequali incertitudini obnoxiae sunt,

$$= m\sqrt{(ll + l'l' + l''l'' + \text{etc.})}$$

Manifesto in hoc calculo pro l, l', l'' etc. aequali iure etiam eos valores quotientium differentialium adoptare licebit, qui valoribus observatis quantitatum v, v', v'' etc. respondent.

3.

Quoties quantitates v, v', v'' etc. penitus inter se sunt independentes, incognita unico tantum modo per illas determinari poterit: quamobrem tunc illam incertitudinem nullo modo nec evitare neque diminuere licet, et circa valorem incognitae ex observationibus deducendum nihil arbitrio relinquitur.

At longe secus se habet res, quoties inter quantitates v, v', v'' etc. mutua dependentia intercedit, quam per σ aequationes conditionales

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \text{ etc.}$$

exprimi supponemus, denotantibus X, Y, Z etc. functiones datas indeterminatarum v, v', v'' etc. In hoc casu incognitam nostram infinitis modis diversis per combinationes quantitatum v, v', v'' etc. determinare licet, quum manifesto loco functionis u adoptari possit quaecunque alia U ita comparata, ut $U - u$ indefinite evanescat, statuendo $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc.

In applicatione ad casum determinatum nulla quidem hinc prodiret differentia respectu valoris incognitae, si observationes absoluta praecisione gauderent: sed quatenus hae erroribus obnoxiae manent, manifesto in genere alia combinatio alium valorem incognitae afferet. Puta, loco erroris

$$le + l'e' + l''e'' + \text{etc.}$$

quem functio u commiserat, iam habebimus

$$Le + L'e' + L''e'' + \text{etc.}$$

si functionem U adoptamus, atque valores quotientium differentialium $\frac{dU}{dv}, \frac{dU}{dv'}, \frac{dU}{dv''}$ etc. resp. per L, L', L'' etc. denotamus. Et quamquam errores ipsos assignare nequeamus, tamen errores medios in diversis observationum combinationibus me-

tuendos inter se comparare licebit: optimaque combinatio ea erit, in qua hic error medius quam minimus evadit. Qui quum fiat

$$= \sqrt{(LLmm + L'L'm'm' + L''L''m''m'' + \text{etc.})}$$

in id erit incumbendum, ut aggregatum $LLmm + L'L'm'm' + L''L''m''m'' +$ etc. nanciscatur valorem minimum.

4.

Quum varietas infinita functionum U, quae secundum conditionem in art. praec. enunciatam ipsius u vice fungi possunt, eatenus tantum hic consideranda veniat, quatenus diversa systemata valorum coëfficientium L, L', L'' etc. inde sequuntur, indagare oportebit ante omnia nexum, qui inter cuncta systemata admissibilia locum habere debet. Designemus valores determinatos quotientium differentialium partialium

$$\begin{array}{llll} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}v}, & \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}v'}, & \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}v''} & \text{etc.} \\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}v}, & \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}v'}, & \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}v''} & \text{etc.} \\ \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}v}, & \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}v'}, & \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}v''} & \text{etc. etc.} \end{array}$$

quos obtinent, si ipsis v, v', v'' etc. valores veri tribuuntur, resp. per

$$\begin{array}{llll} a, & a', & a'' & \text{etc.} \\ b, & b', & b'' & \text{etc.} \\ c, & c', & c'' & \text{etc. etc.} \end{array}$$

patetque, si ipsis v, v', v'' etc. accedere concipiantur talia incrementa $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}v'$, $\mathrm{d}v''$ etc., per quae X, Y, Z etc. non mutentur, adeoque singulae maneant $= 0$, i.e. satisfacientia aequationibus

$$\begin{array}{l} 0 = a\,\mathrm{d}v + a'\mathrm{d}v' + a''\mathrm{d}v'' + \text{etc.} \\ 0 = b\,\mathrm{d}v + b'\mathrm{d}v' + b''\mathrm{d}v'' + \text{etc.} \\ 0 = c\,\mathrm{d}v + c'\mathrm{d}v' + c''\mathrm{d}v'' + \text{etc. etc.} \end{array}$$

etiam $u - U$ non mutari debere, adeoque fieri

$$0 = (l - L)\,\mathrm{d}v + (l' - L')\,\mathrm{d}v' + (l'' - L'')\,\mathrm{d}v'' + \text{etc.}$$

Hinc facile concluditur, coëfficientes L, L', L'' etc. contentos esse debere sub formulis talibus

$$L = l + ax + by + cz + \text{etc.}$$
$$L' = l' + a'x + b'y + c'z + \text{etc.}$$
$$L'' = l'' + a''x + b''y + c''z + \text{etc.}$$

etc., denotantibus x, y, z etc. multiplicatores determinatos. Vice versa patet, si systema multiplicatorum determinatorum x, y, z etc. ad lubitum assumatur, semper assignari posse functionem U talem, cui valores ipsorum L, L', L'' etc. his aequationibus conformes respondeant, et quae pro conditione in art. praec. enunciata ipsius u vice fungi possit: quin adeo hoc infinitis modis diversis effici posse. Modus simplicissimus erit statuere $U = u + xX + yY + zZ +$ etc.; generalius statuere licet $U = u + xX + yY + zZ +$ etc. $+ u'$, denotante u' talem functionem indeterminatarum v, v', v'' etc., quae semper evanescit pro $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc., et cuius valor in casu determinato de quo agitur fit maximus vel minimus. Sed ad institutum nostrum nulla hinc oritur differentia.

5.

Facile iam erit, multiplicatoribus x, y, z etc. valores tales tribuere, ut aggregatum

$$LLmm + L'L'm'm' + L''L''m''m'' + \text{etc.}$$

assequatur valorem minimum. Manifesto ad hunc finem haud opus est cognitione errorum mediorum m, m', m'' etc. absoluta, sed sufficit ratio, quam inter se tenent. Introducemus itaque ipsorum loco pondera observationum p, p', p'' etc., i. e. numeros quadratis $mm, m'm', m''m''$ etc. reciproce proportionales, pondere alicuius observationis ad lubitum pro unitate accepto. Quantitates x, y, z etc. itaque sic determinari debebunt, ut polynomium indefinitum

$$\frac{(ax + by + cz + \text{etc.} + l)^2}{p} + \frac{(a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l')^2}{p'} + \frac{(a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'')^2}{p''} + \text{etc.}$$

nanciscatur valorem minimum, quod fieri supponemus per valores *determinatos* x^0, y^0, z^0 etc.

Introducendo denotationes sequentes

$$\frac{aa}{p}+\frac{a'a'}{p'}+\frac{a''a''}{p''}+\text{ etc.}=[aa]$$
$$\frac{ab}{p}+\frac{a'b'}{p'}+\frac{a''b''}{p''}+\text{ etc.}=[ab]$$
$$\frac{ac}{p}+\frac{a'c'}{p'}+\frac{a''c''}{p''}+\text{ etc.}=[ac]$$
$$\frac{bb}{p}+\frac{b'b'}{p'}+\frac{b''b''}{p''}+\text{ etc.}=[bb]$$
$$\frac{bc}{p}+\frac{b'c'}{p'}+\frac{b''c''}{p''}+\text{ etc.}=[bc]$$
$$\frac{cc}{p}+\frac{c'c'}{p'}+\frac{c''c''}{p''}+\text{ etc.}=[cc]$$

etc. nec non

$$\frac{al}{p}+\frac{a'l'}{p'}+\frac{a''l''}{p''}+\text{ etc.}=[al]$$
$$\frac{bl}{p}+\frac{b'l'}{p'}+\frac{b''l''}{p''}+\text{ etc.}=[bl]$$
$$\frac{cl}{p}+\frac{c'l'}{p'}+\frac{c''l''}{p''}+\text{ etc.}=[cl]$$

etc.

manifesto conditio minimi requirit, ut fiat

$$\left.\begin{array}{l} 0=[aa]x^0+[ab]y^0+[ac]z^0+\text{ etc. }+[al] \\ 0=[ab]x^0+[bb]y^0+[bc]z^0+\text{ etc. }+[bl] \\ 0=[ac]x^0+[bc]y^0+[cc]z^0+\text{ etc. }+[cl] \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Postquam quantitates x^0, y^0, z^0 etc. per eliminationem hinc derivatae sunt, statuetur

$$\left.\begin{array}{l} ax^0+by^0+cz^0+\text{ etc. }+l=L \\ a'x^0+b'y^0+c'z^0+\text{ etc. }+l'=L' \\ a''x^0+b''y^0+c''z^0+\text{ etc. }+l''=L'' \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (2)$$

His ita factis, functio quantitatum v, v', v'' etc. ea ad determinationem incognitae nostrae maxime idonea minimaeque incertitudini obnoxia erit, cuius quotientes differentiales partiales in casu determinato de quo agitur habent valores L, L', L'' etc. resp., pondusque huius determinationis, quod per P denotabimus, erit

$$= \frac{1}{\frac{LL}{p} + \frac{L'L'}{p'} + \frac{L''L''}{p''} + \text{etc.}} \quad (3)$$

sive $\frac{1}{P}$ erit valor polynomii supra allati pro eo systemate valorum quantitatum x, y, z etc., per quod aequationibus (1) satisfit.

6.

In art. praec. eam functionem U dignoscere docuimus, quae determinationi maxime idoneae incognitae nostrae inservit: videamus iam, quemnam *valorem* incognita hoc modo assequatur. Designetur hic valor per K, qui itaque oritur, si in U valores observati quantitatum v, v', v'' etc. substituuntur; per eandem substitutionem obtineat functio u valorem k; denique sit $\varkappa$ valor verus incognitae, qui proin e valoribus veris quantitatum v, v', v'' etc. prodituros esset, si hos vel in U vel in u substituere possemus. Hinc itaque erit

$$k = \varkappa + le + l'e' + l''e'' + \text{etc.}$$
$$K = \varkappa + Le + L'e' + L''l'' + \text{etc.}$$

adeoque

$$K = k(L-l)e + (L'-l')e' + (L''-l'')e'' + \text{etc.}$$

Substituendo in hac aequatione pro $L-l$, $L'-l'$, $L''-l''$ etc. valores ex (2), statuendoque

$$\left.\begin{aligned} ae + a'e' + a''e'' + \text{etc.} &= \mathfrak{A} \\ be + b'e' + b''e'' + \text{etc.} &= \mathfrak{B} \\ ce + c'e' + c''e'' + \text{etc.} &= \mathfrak{C} \end{aligned}\right\} (4)$$

etc., habebimus

$$K = k + \mathfrak{A}x^0 + \mathfrak{B}y^0 + \mathfrak{C}z^0 \text{ etc.} \quad (5)$$

Valores quantitatum $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ etc. per formulas (4) quidem calculare non possumus, quum errores e, e', e'' etc. maneant incogniti; at sponte manifestum est, illos nihil aliud esse, nisi valores functionum X, Y, Z etc., qui prodeunt, si pro v, v', v'' etc. valores observati substituuntur. Hoc modo systema aequationum (1), (3), (5) completam problematis nostri solutionem exhibet, quum ea, quae in fine art. 2. de computo quantitatum l, l', l'' etc, valoribus observatis quantita-

tum v, v', v'' etc. superstruendo monuimus, manifesto aequali iure ad computum quantitatum a, a', a'' etc. b, b', b'' etc. etc. extendere liceat.

7.

Loco formulae (3), pondus determinationis maxime plausibilis exprimentis, plures aliae exhiberi possunt, quas evolvere operae pretium erit.

Primo observamus, si aequationes (2) resp. per $\frac{a}{p}, \frac{a'}{p'}, \frac{a''}{p''}$ etc. multiplicentur et addantur, prodire

$$[aa]x^0 + [ab]y^0 + [ac]z^0 + \text{etc.} = \frac{aL}{p} + \frac{a'L'}{p'} + \frac{a''L''}{p''} + \text{etc.}$$

Pars ad laevam fit $= 0$, partem ad dextram iuxta analogiam per $[aL]$ denotamus: habemus itaque

$$[aL] = 0, \text{ et prorsus simili modo } [bL] = 0, [cL] = 0 \text{ etc.}$$

Multiplicando porro aequationes (2) deinceps per $\frac{L}{p}, \frac{L'}{p'}, \frac{L''}{p''}$ etc., et addendo, invenimus

$$\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \text{etc.} = \frac{LL}{p} + \frac{L'L'}{p'} + \frac{L''L''}{p''} + \text{etc.}$$

unde obtinemus expressionem *secundam* pro pondere,

$$P = \frac{1}{\frac{lL}{p} + \frac{l'L'}{p'} + \frac{l''L''}{p''} + \text{etc.}}$$

Denique multiplicando aequationes (2) deinceps per $\frac{l}{p}, \frac{l'}{p'}, \frac{l''}{p''}$ etc., et addendo, pervenimus ad expressionem *tertiam* ponderis

$$P = \frac{1}{[al]x^0 + [bl]y^0 + [cl]z^0 + \text{etc.} + [ll]}$$

si ad instar reliquarum denotationum statuimus

$$\frac{ll}{p} + \frac{l'l'}{p'} + \frac{l''l''}{p''} + \text{etc.} = [ll]$$

Hinc adiumento aequationum (1) facile fit transitus ad *expressionem quartam*, quam ita exhibemus:

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} = [ll] - [aa]x^0x^0 - [bb]y^0y^0 - [cc]z^0z^0 - \text{etc.}\\ - 2[ab]x^0y^0 - 2[ac]x^0z^0 - 2[bc]y^0z^0 - \text{etc.}\end{aligned}$$

8.

Solutio generalis, quam hactenus explicavimus, ei potissimum casui adaptata est, ubi *una* incognita a quantitatibus observatis pendens determinanda est. Quoties vero plures incognitae ab iisdem observationibus pendentes valores maxime plausibiles exspectant, vel quoties adhuc incertum est, quasnam potissimum incognitas ex observationibus derivare oporteat, has alia ratione praeparare conveniet, cuius evolutionem iam aggredimur.

Considerabimus quantitates x, y, z etc. tamquam indeterminatas, statuemus

$$\left.\begin{aligned} [aa]x+[ab]y+[ac]z+\text{ etc.} &= \xi \\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+\text{ etc.} &= \eta \\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+\text{ etc.} &= \zeta \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

etc., supponemusque, per eliminationem hinc sequi

$$\left.\begin{aligned} [\alpha\alpha]\xi+[\alpha\beta]\eta+[\alpha\gamma]\zeta+\text{ etc.} &= x \\ [\beta\alpha]\xi+[\beta\beta]\eta+[\beta\gamma]\zeta+\text{ etc.} &= y \\ [\gamma\alpha]\xi+[\gamma\beta]\eta+[\gamma\gamma]\zeta+\text{ etc.} &= z \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

etc.

Ante omnia hic observare oportet, coëfficientes symmetrice positos necessario aequales fieri, puta

$$\begin{aligned} [\beta\alpha] &= [\alpha\beta] \\ [\gamma\alpha] &= [\alpha\gamma] \\ [\gamma\beta] &= [\beta\gamma] \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

quod quidem e theoria generali eliminationis in aequationibus linearibus sponte sequitur, sed etiam infra, absque illa, directe demonstrabitur.

Habebimus itaque

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= -[\alpha\alpha].[al]-[\alpha\beta].[bl]-[\alpha\gamma].[cl]-\text{ etc.} \\ y^0 &= -[\alpha\beta].[al]-[\beta\beta].[bl]-[\beta\gamma].[cl]-\text{ etc.} \\ z^0 &= -[\alpha\gamma].[al]-[\beta\gamma].[bl]-[\gamma\gamma].[cl]-\text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

etc.

unde, si statuimus

$$\left.\begin{array}{l}[\alpha\alpha]\mathfrak{A}+[\alpha\beta]\mathfrak{B}+[\alpha\gamma]\mathfrak{C}+\text{ etc.}=A\\ [\alpha\beta]\mathfrak{A}+[\beta\beta]\mathfrak{B}+[\beta\gamma]\mathfrak{C}+\text{ etc.}=B\\ [\alpha\gamma]\mathfrak{A}+[\beta\gamma]\mathfrak{B}+[\gamma\gamma]\mathfrak{C}+\text{ etc.}=C\end{array}\right\}\quad(9)$$

etc., obtinemus

$$K=k-A[al]-B[bl]-C[cl]-\text{ etc.}$$

vel si insuper statuimus

$$\left.\begin{array}{l}aA+bB+cC+\text{ etc.}=p\varepsilon\\ a'A+b'B+c'C+\text{ etc.}=p'\varepsilon'\\ a''A+b''B+c''C+\text{ etc.}=p''\varepsilon''\end{array}\right\}\quad(10)$$

etc., erit

$$K=k-l\varepsilon-l'\varepsilon'-l''\varepsilon''-\text{ etc.}\qquad(11)$$

9.

Comparatio aequationum (7), (9) docet, quantitates auxiliares A, B, C etc. esse valores indeterminatarum x, y, z etc. respondentes valoribus indeterminatarum ξ, η, ζ etc. his $\xi=\mathfrak{A}$, $\eta=\mathfrak{B}$, $\zeta=\mathfrak{C}$ etc., unde patet haberi

$$\left.\begin{array}{l}[aa]A+[ab]B+[ac]C+\text{ etc.}=\mathfrak{A}\\ [ab]A+[bb]B+[bc]C+\text{ etc.}=\mathfrak{B}\\ [ac]A+[bc]B+[cc]C+\text{ etc.}=\mathfrak{C}\end{array}\right\}\quad(12)$$

etc. Multiplicando itaque aequationes (10) resp. per $\frac{a}{p}$, $\frac{a'}{p'}$, $\frac{a''}{p''}$ etc. et addendo, obtinemus

$$\mathfrak{A}=a\varepsilon+a'\varepsilon'+a''\varepsilon''+\text{ etc.}$$

et prorsus simili modo

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{B}=b\varepsilon+b'\varepsilon'+b''\varepsilon''+\text{ etc.}\\ \mathfrak{C}=c\varepsilon+c'\varepsilon'+c''\varepsilon''+\text{ etc.}\end{array}\right\}\quad(13)$$

etc. Iam quum $\mathfrak{A}$ sit valor functionis X, si pro v, v', v'' etc. valores observati substituuntur, facile perspicietur, si his applicentur correctiones $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. resp., functionem X hinc adepturam esse valorem 0, et perinde functiones

Y, Z etc. hinc ad valorem evanescentem reductum iri. Simili ratione ex aequatione (11) colligitur, K esse valorem functionis u ex eadem substitutione emergentem.

Applicationem correctionum $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. ad observationes, vocabimus *observationum compensationem*, manifestoque deducti sumus ad conclusionem gravissimam, puta, observationes eo quem docuimus modo compensatas omnibus aequationibus conditionalibus exacte satisfacere, atque cuilibet quantitati ab observationibus quomodocunque pendenti eum ipsum valorem conciliare, qui ex observationum non mutatarum combinatione maxime idonea emergeret. Quum itaque impossibile sit, errores ipsos e, e', e'' etc. ex aequationibus conditionalibus eruere, quippe quarum multitudo haud sufficit, saltem *errores maxime plausibiles* nacti sumus, qua denominatione quantitates ε, ε', ε'' etc. designare licebit.

10.

Quum multitudo observationum maior esse supponatur multitudine aequationum conditionalium, praeter systema correctionum maxime plausibilium $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. infinite multa alia inveniri possunt, quae aequationibus conditionalibus satisfaciant, operaeque pretium est indagare, quomodo haec ad illud se habeant. Constituant itaque $-E$, $-E'$, $-E''$ etc. tale systema a maxime plausibili diversum, habebimusque

$$aE+a'E'+a''E''+\text{ etc.} = \mathfrak{A}$$
$$bE+b'E'+b''E''+\text{ etc.} = \mathfrak{B}$$
$$cE+c'E'+c''E''+\text{ etc.} = \mathfrak{C}$$

etc. Multiplicando has aequationes resp. per A, B, C etc. et addendo, obtinemus adiumento aequationum (10)

$$p\varepsilon E+p'\varepsilon'E'+p''\varepsilon''E''+\text{ etc.} = A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}+\text{ etc.}$$

Prorsus vero simili modo aequationes (13) suppeditant

$$p\varepsilon\varepsilon+p'\varepsilon'\varepsilon'+p''\varepsilon''\varepsilon''+\text{ etc.} = A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}+\text{ etc.} \quad (14)$$

E combinatione harum duarum aequationum facile deducitur

$$pEE+p'E'E'+p''E''E''+\text{ etc.}$$
$$=p\varepsilon\varepsilon+p'\varepsilon'\varepsilon'+p''\varepsilon''\varepsilon''+\text{ etc.}+p(E-\varepsilon)^2+p'(E'-\varepsilon')^2+p''(E''-\varepsilon'')^2+\text{ etc.}$$

Aggregatum $pEE + p'E'E' + p''E''E'' +$ etc. itaque necessario *maius* erit aggregato $p\varepsilon\varepsilon + p'\varepsilon'\varepsilon' + p''\varepsilon''\varepsilon'' +$ etc., quod enuntiari potest tamquam

Theorema. *Aggregatum quadratorum correctionum, per quas observationes cum aequationibus conditionalibus conciliare licet, per pondera observationum resp. multiplicatorum, fit minimum, si correctiones maxime plausibiles adoptantur.*

Hoc est ipsum principium quadratorum minimorum, ex quo etiam aequationes (12), (10) facile immediate derivari possunt. Ceterum pro hoc aggregato minimo, quod in sequentibus per S denotabimus, aequatio (14) nobis suppeditat expressionem $\mathfrak{A}A + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C} +$ etc.

11.

Determinatio errorum maxime plausibilium, quum a coëfficientibus l, l', l'' etc. independens sit, manifesto praeparationem commodissimam sistit, ad quemvis usum, in quem observationes vertere placuerit. Praeterea perspicuum est, ad illud negotium haud opus esse eliminatione *indefinita* seu cognitione coëfficientium $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc., nihilque aliud requiri, nisi ut quantitates auxiliares A, B, C etc., quas in sequentibus *correlata* aequationum conditionalium $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. vocabimus, ex aequationibus (12) per eliminationem definitam eliciantur atque in formulis (10) substituantur.

Quamquam vero haec methodus nihil desiderandum linquat, quoties quantitatum ab observationibus pendentium valores maxime plausibiles tantummodo requiruntur, tamen res secus se habere videtur, quoties insuper pondus alicuius determinationis in votis est, quum ad hunc finem, prout hac vel illa quatuor expressionum supra traditarum uti placuerit, cognitio quantitatum L, L', L'' etc., vel saltem cognitio harum x^0, y^0, z^0 etc. necessaria videatur. Hac ratione utile erit, negotium eliminationis accuratius perscrutari, unde via facilior ad pondera quoque invenienda se nobis aperiet.

12.

Nexus quantitatum in hac disquisitione occurrentium haud parum illustratur per introductionem functionis indefinitae secundi ordinis

$$[aa]xx + 2[ab]xy + 2[ac]xz + \text{etc.} + [bb]yy + 2[bc]yz + \text{etc.} + [cc]zz + \text{etc.}$$

quam per T denotabimus. Primo statim obvium est, hanc functionem fieri

$$\frac{(ax+by+cz+\text{etc.})^2}{p}+\frac{(a'x+b'y+c'z+\text{etc.})^2}{p'}+\frac{(a''x+b''y+c''z+\text{etc.})^2}{p''}+\text{etc.} \quad (15)$$

Porro patet, esse

$$T=x\xi+y\eta+z\zeta+\text{etc.} \quad (16)$$

et si hic denuo x, y, z etc. adiumento aequationum (7) per ξ, η, ζ etc. exprimuntur,

$$T=[\alpha\alpha]\xi\xi+2[\alpha\beta]\xi\eta+2[\alpha\gamma]\xi\zeta+\text{etc.}+[\beta\beta]\eta\eta+2[\beta\gamma]\eta\zeta+\text{etc.}$$
$$+[\gamma\gamma]\zeta\zeta+\text{etc.}$$

Theoria supra evoluta bina systemata valorum determinatorum quantitatum x, y, z etc., atque ξ, η, ζ etc. continet; priori, in quo $x=x^0, y=y^0, z=z^0$ etc. $\xi=-[al], \eta=-[bl], \zeta=-[cl]$ etc., respondebit valor ipsius T hic

$$T=[ll]-\frac{1}{P}$$

quod vel per expressionem tertiam ponderis P cum aequatione (16) comparatam, vel per quartam sponte elucet; posteriori, in quo $x=A, y=B, z=C$ etc., atque $\xi=\mathfrak{A}, \eta=\mathfrak{B}, \zeta=\mathfrak{C}$ etc., respondet valor $T=S$, uti vel e formulis (10) et (15), vel ex his (14) et (16) manifestum est.

13.

Iam negotium principale consistit in transformatione functionis T ei simili, quam in Theoria Motus Corporum Coelestium art. 182 atque fusius in Disquisitione de elementis ellipticis Palladis exposuimus. Scilicet statuemus (17)

$$[bb,1]=[bb]-\frac{[ab]^2}{[aa]}$$
$$[bc,1]=[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}$$
$$[bd,1]=[bd]-\frac{[ab][ad]}{[aa]}$$
etc.
$$[cc,2]=[cc]-\frac{[ac]^2}{[aa]}-\frac{[bc,1]^2}{[bb,1]}$$
$$[cd,2]=[cd]-\frac{[ac][ad]}{[aa]}-\frac{[bc,1][bd,1]}{[bb,1]}$$
etc.
$$[dd,3]=[dd]-\frac{[ad]^2}{[aa]}-\frac{[bd,1]^2}{[bb,1]}-\frac{[cd,2]^2}{[cc,2]}$$

etc. etc. Dein statuendo *)

$$[bb,1]y+[bc,1]z+[bd,1]w+\text{etc.}=\eta'$$
$$[cc,2]z+[cd,2]w+\text{etc.}=\zeta''$$
$$[dd,3]w+\text{etc.}=\varphi'''$$
$$\text{etc., erit}$$

$$T=\frac{\xi\xi}{[aa]}+\frac{\eta'\eta'}{[bb,1]}+\frac{\zeta''\zeta''}{[cc,2]}+\frac{\varphi'''\varphi'''}{[dd,3]}+\text{etc.}$$

quantitatesque $\eta', \zeta'', \varphi'''$ etc. a $\xi, \eta, \zeta, \varphi$ etc. pendebunt per aequationes sequentes:

$$\eta'=\eta-\frac{[ab]}{[aa]}\xi$$
$$\zeta''=\zeta-\frac{[ac]}{[aa]}\xi-\frac{[bc,1]}{[bb,1]}\eta'$$
$$\varphi'''=\varphi-\frac{[ad]}{[aa]}\xi-\frac{[bd,1]}{[bb,1]}\eta'-\frac{[cd,2]}{[cc,2]}\zeta''$$
etc.

Facile iam omnes formulae ad propositum nostrum necessariae hinc desumuntur. Scilicet ad determinationem correlatorum A, B, C etc. statuemus (18)

$$\mathfrak{B}'=\mathfrak{B}-\frac{[ab]}{[aa]}\mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{C}''=\mathfrak{C}-\frac{[ac]}{[aa]}\mathfrak{A}-\frac{[bc,1]}{[bb,1]}\mathfrak{B}'$$
$$\mathfrak{D}'''=\mathfrak{D}-\frac{[ad]}{[aa]}\mathfrak{A}-\frac{[bd,1]}{[bb,1]}\mathfrak{B}'-\frac{[cd,2]}{[cc,2]}\mathfrak{C}''$$

etc., ac dein A, B, C, D etc. eruentur per formulas sequentes, et quidem ordine inverso, incipiendo ab ultima,

$$\left.\begin{aligned}[aa]A+[ab]B+[ac]C+[ad]D+\text{etc.}&=\mathfrak{A}\\ [bb,1]B+[bc,1]C+[bd,1]D+\text{etc.}&=\mathfrak{B}'\\ [cc,2]C+[cd,2]D+\text{etc.}&=\mathfrak{C}''\\ [dd,3]D+\text{etc.}&=\mathfrak{D}'''\\ \text{etc.}&\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

*) In praecedentibus sufficere poterant ternae literae pro variis systematibus quantitatum ad tres primas aequationes conditionales referendae: hoc vero loco, ut algorithmi lex clarius eluceat, quartam adiungere visum est; et quum in serie naturali literas a, b, c; A, B, C; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ sponte sequantur $d, D, \mathfrak{D}$ in serie x, y, z, deficiente alphabeto, apposuimus w, nec non in hac ξ, η, ζ hanc φ.

Pro aggregato S autem habemus formulam novam (20)

$$S = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{[aa]} + \frac{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'}{[bb,1]} + \frac{\mathfrak{C}''\mathfrak{C}''}{[cc,2]} + \frac{\mathfrak{D}'''\mathfrak{D}'''}{[dd,3]} \text{ etc.}$$

Denique si pondus P, quod determinationi maxime plausibili quantitatis per functionem u expressae tribuendum est, desideratur, faciemus (21)

$$[bl,1] = [bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]}$$

$$[cl,2] = [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} - \frac{[bc,1][bl,1]}{[bb,1]}$$

$$[dl,3] = [dl] - \frac{[ad][al]}{[aa]} - \frac{[bd,1][bl,1]}{[bb,1]} - \frac{[cd,2][cl,2]}{[cc,2]}$$

etc., quo facto erit (22)

$$\frac{1}{P} = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl,1]^2}{[bb,1]} - \frac{[cl,2]^2}{[cc,2]} - \frac{[dl,3]^2}{[dd,3]} - \text{ etc.}$$

Formulae (17) . . . . (22), quarum simplicitas nihil desiderandum relinquere videtur, solutionem problematis nostri ab omni parte completam exhibent.

14.

Postquam problemata primaria absolvimus, adhuc quasdam quaestiones secundarias attingemus, quae huic argumento maiorem lucem affundent.

Primo inquirendum est, num eliminatio, per quam x, y, z etc. ex ξ, η, ζ etc. derivare oportet, umquam impossibilis fieri possit. Manifesto hoc eveniret, si functiones ξ, η, ζ etc. inter se haud independentes essent. Supponamus itaque aliquantisper, unam earum per reliquas iam determinari, ita ut habeatur aequatio identica

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \text{ etc.} = 0$$

denotantibus α, β, γ etc. numeros determinatos. Erit itaque

$$\alpha[aa] + \beta[ab] + \gamma[ac] + \text{ etc.} = 0$$
$$\alpha[ab] + \beta[bb] + \gamma[bc] + \text{ etc.} = 0$$
$$\alpha[ac] + \beta[bc] + \gamma[cc] + \text{ etc.} = 0$$

etc., unde, si statuimus

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \text{etc.} = p\theta$$
$$\alpha a' + \beta b' + \gamma c' + \text{etc.} = p'\theta'$$
$$\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' + \text{etc.} = p''\theta''$$

etc., sponte sequitur

$$a\theta + a'\theta' + a''\theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$b\theta + b'\theta' + b''\theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$c\theta + c'\theta' + c''\theta'' + \text{etc.} = 0$$

etc., nec non

$$p\theta\theta + p'\theta'\theta' + p''\theta''\theta'' + \text{etc.} = 0$$

quae aequatio, quum omnes p, p', p'' etc. natura sua sint quantitates positivae, manifesto consistere nequit, nisi fuerit $\theta = 0$, $\theta' = 0$, $\theta'' = 0$ etc.

Iam consideremus valores differentialium completorum dX, dY, dZ etc., respondentes valoribus iis quantitatum v, v', v'' etc., ad quos referuntur observationes. Haec differentialia, puta

$$a\,dv + a'dv' + a''dv'' + \text{etc.}$$
$$b\,dv + b'dv' + b''dv'' + \text{etc.}$$
$$c\,dv + c'dv' + c''dv'' + \text{etc.}$$

etc., per conclusionem, ad quam modo delati sumus, inter se ita dependentia erunt, ut per α, β, γ etc. resp. multiplicata aggregatum identice evanescens producant, sive quod idem est, quodvis ex ipsis (cui quidem respondet multiplicator α, β, γ etc. non evanescens) sponte evanescet, simulac omnia reliqua evanescere supponuntur. Quamobrem ex aequationibus conditionalibus $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc., una (ad minimum) pro *superflua* habenda est, quippe cui sponte satisfit, simulac reliquis satisfactum est.

Ceterum si res profundius inspicitur, apparet, hanc conclusionem per se tantum pro ambitu infinite parvo variabilitatis indeterminatarum valere. Scilicet proprie duo casus distinguendi erunt, alter, ubi una aequationum conditionalium $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. absolute et generaliter iamiam in reliquis contenta est, quod facile in quovis casu averti poterit; alter, ubi, quasi fortuito, pro iis valoribus concretis quantitatum v, v', v'' etc., ad quos observationes referun-

tur, una functionum X, Y, Z etc. e. g. prima X, valorem maximum vel minimum (vel generalius, stationarium) nanciscitur respectu mutationum omnium, quas quantitatibus v, v', v'' etc., salvis aequationibus $Y = 0$, $Z = 0$ etc., applicare possemus. Attamen quum in disquisitione nostra variabilitas quantitatum tantummodo intra limites tam arctos consideretur, ut ad instar infinite parvae tractari possit, hic casus secundus (qui in praxi vix umquam occurret) eundem effectum habebit, quem primus, puta una aequationum conditionalium tamquam superflua reiicienda erit, certique esse possumus, si omnes aequationes conditionales retentae eo sensu, quem hic intelligimus, ab invicem independentes sint, eliminationem necessario fore possibilem. Ceterum disquisitionem uberiorem, qua hoc argumentum, propter theoreticam subtilitatem potius quam practicam utilitatem haud indignum est, ad aliam occasionem nobis reservare debemus.

15.

In commentatione priore art. 37 sqq. methodum docuimus, observationum praecisionem a posteriori quam proxime eruendi. Scilicet si valores approximati π quantitatum per observationes aequali praecisione gaudentes innotuerunt, et cum valoribus iis comparantur, qui e valoribus maxime plausibilibus ρ elementorum, a quibus illae pendent, per calculum prodeunt: differentiarum quadrata addere, aggregatumque per $\pi - \rho$ dividere oportet, quo facto quotiens considerari poterit tamquam valor approximatus quadrati erroris medii tali observationum generi inhaerentis. Quoties observationes inaequali praecisione gaudent, haec praecepta eatenus tantum mutanda sunt, ut quadrata ante additionem per observationum pondera multiplicari debeant, errorque medius hoc modo prodiens ad observationes referatur, quarum pondus pro unitate acceptum est.

Iam in tractatione praesenti illud aggregatum manifesto quadrat cum aggregato S, differentiaque $\pi - \rho$ cum multitudine aequationum conditionalium σ, quamobrem pro errore medio observationum, quarum pondus $= 1$, habebimus expressionem $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$, quae determinatio eo maiore fide digna erit, quo maior fuerit numerus σ.

Sed operae pretium erit, hoc etiam independenter a disquisitione priore stabilire. Ad hunc finem quasdam novas denotationes introducere conveniet. Scilicet respondeant valoribus indeterminatarum ξ, η, ζ etc. his

$$\xi = a, \quad \eta = b, \quad \zeta = c \text{ etc.}$$

valores ipsarum x, y, z etc. hi

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma \text{ etc.}$$

ita ut habeatur

$$\begin{aligned} \alpha &= a[\alpha\alpha] + b[\alpha\beta] + c[\alpha\gamma] + \text{ etc.} \\ \beta &= a[\alpha\beta] + b[\beta\beta] + c[\beta\gamma] + \text{ etc.} \\ \gamma &= a[\alpha\gamma] + b[\beta\gamma] + c[\gamma\gamma] + \text{ etc.} \end{aligned}$$

etc. Perinde valoribus

$$\xi = a', \quad \eta = b', \quad \zeta = c' \text{ etc.}$$

respondere supponemus hos

$$x = \alpha', \quad y = \beta', \quad z = \gamma' \text{ etc.}$$

nec non his

$$\xi = a'', \quad \eta = b'', \quad \zeta = c'' \text{ etc.}$$

sequentes

$$x = \alpha'', \quad y = \beta'', \quad z = \gamma'' \text{ etc.}$$

et sic porro.

His positis combinatio aequationum (4), (9) suppeditat

$$\begin{aligned} A &= \alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{ etc.} \\ B &= \beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \text{ etc.} \\ C &= \gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{ etc.} \end{aligned}$$

etc. Quare quum habeatur $S = \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C +$ etc., patet fieri

$$\begin{aligned} S = & \ (ae + a'e' + a''e'' + \text{ etc.})\,(\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{ etc.}) \\ & + (be + b'e' + b''e'' + \text{ etc.})\,(\beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \text{ etc.}) \\ & + (ce + c'e' + c''e'' + \text{ etc.})\,(\gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{ etc.}) + \text{ etc.} \end{aligned}$$

16.

Institutionem observationum, per quas valores quantitatum v, v', v'' etc. erroribus fortuitis e, e', e'' etc. affectos obtinemus, considerare possumus tamquam

experimentum, quod quidem singulorum errorum commissorum magnitudinem docere non valet, attamen, praeceptis quae supra explicavimus adhibitis, valorem quantitatis S subministrat, qui per formulam modo inventam est functio data illorum errorum. In tali experimento errores fortuiti utique alii maiores alii minores prodire possunt; sed quo plures errores concurrunt, eo maior spes aderit, valorem quantitatis S in experimento singulari a valore suo medio parum deviaturum esse. Rei cardo itaque in eo vertitur, ut valorem medium quantitatis S stabiliamus. Per principia in commentatione priore exposita, quae hic repetere superfluum esset, invenimus hunc valorem medium

$$= (a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})mm + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})m'm'$$
$$+ (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.})m''m'' + \text{etc.}$$

Denotando errorem medium observationum talium, quarum pondus $= 1$, per μ, ita ut sit $\mu\mu = pmm = p'm'm' = p''m''m''$ etc., expressio modo inventa ita exhiberi potest:

$$(\tfrac{a\alpha}{p} + \tfrac{a'\alpha'}{p'} + \tfrac{a''\alpha''}{p''} \text{ etc.})\mu\mu + (\tfrac{b\beta}{p} + \tfrac{b'\beta'}{p'} + \tfrac{b''\beta''}{p''} + \text{etc.})\mu\mu$$
$$+ (\tfrac{c\gamma}{p} + \tfrac{c'\gamma'}{p'} + \tfrac{c''\gamma''}{p''} + \text{etc.})\mu\mu + \text{etc.}$$

Sed aggregatum $\frac{a\alpha}{p} + \frac{a'\alpha'}{p'} + \frac{a''\alpha''}{p''} + \text{etc.}$ invenitur

$$= [aa].[\alpha\alpha] + [ab].[\alpha\beta] + [ac].[\alpha\gamma] + \text{etc.}$$

adeoque $= 1$, uti e nexu aequationum (6), (7) facile intelligitur. Perinde fit

$$\frac{b\beta}{p} + \frac{b'\beta'}{p'} + \frac{b''\beta''}{p''} + \text{etc.} = 1$$
$$\frac{c\gamma}{p} + \frac{c'\gamma'}{p'} + \frac{c''\gamma''}{p''} + \text{etc.} = 1$$

et sic porro.

Hinc tandem valor medius ipsius S fit $= \sigma\mu\mu$, quatenusque igitur valorem fortuitum ipsius S pro medio adoptare licet, erit $\mu = \sqrt{\frac{S}{\sigma}}$.

17.

Quanta fides huic determinationi habenda sit, diiudicare oportet per errorem medium vel in ipsa vel in ipsius quadrato metuendum: posterior erit radix

quadrata valoris medii expressionis

$$\left(\frac{S}{\sigma} - \mu\mu\right)^2$$

cuius evolutio absolvetur per ratiocinia similia iis, quae in commentatione priore artt. 39 sqq. exposita sunt. Quibus brevitatis caussa hic suppressis, formulam ipsam tantum hic apponimus. Scilicet error medius in determinatione quadrati $\mu\mu$ metuendus exprimitur per

$$\sqrt{\left(\frac{2\mu^4}{\sigma} + \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\sigma\sigma} \cdot N\right)}$$

denotante ν^4 valorem medium biquadratorum errorum, quorum pondus $= 1$, atque N aggregatum

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})^2 + (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.})^2 \text{ etc.}$$

Hoc aggregatum in genere ad formam simpliciorem reduci nequit, sed simili modo ut in art. 40 prioris commentationis ostendi potest, eius valorem semper contineri intra limites π et $\frac{\sigma\sigma}{\pi}$. In hypothesi ea, cui theoria quadratorum minimorum ab initio superstructa erat, terminus hoc aggregatum continens, propter $\nu^4 = 3\mu^4$, omnino excidit, praecisioque, quae errori medio, per formulam $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ determinato, tribuenda est, eadem erit, ac si ex σ erroribus exacte cognitis secundum artt. 15, 16 prioris commentationis erutus fuisset.

18.

Ad compensationem observationum duo, ut supra vidimus, requiruntur: primum, ut aequationum conditionalium correlata, i. e. numeri A, B, C etc. aequationibus (12) satisfacientes eruantur, secundum, ut hi numeri in aequationibus (10) substituantur. Compensatio hoc modo prodiens dici poterit *perfecta* seu *completa*, ut distinguatur a compensatione *imperfecta* seu *manca:* hac scilicet denominatione designabimus, quae resultant ex iisdem quidem aequationibus (10), sed substratis valoribus quantitatum A, B, C etc., qui non satisfaciunt aequationibus (12), i. e. qui vel parti tantum satisfaciunt vel nullis. Quod vero attinet ad tales observationum mutationes, quae sub formulis (10) comprehendi nequeunt, a disquisitione praesenti, nec non a denominatione compensationum exclusae sunto. Quum, quatenus aequationes (10) locum habent, aequationes (13) ipsis (12) omnino sint aequivalentes, illud discrimen ita quoque enunciari potest: Ob-

servationes complete compensatae omnibus aequationibus conditionalibus $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ etc. satisfaciunt, incomplete compensatae vero vel nullis vel saltem non omnibus; compensatio itaque, per quam omnibus aequationibus conditionalibus satisfit, necessario est ipsa completa.

19.

Iam quum ex ipsa notione compensationis sponte sequatur, aggregata duarum compensationum iterum constituere compensationem, facile perspicitur, nihil interesse, utrum praecepta, per quae compensatio perfecta eruenda est, immediate ad observationes primitivas applicentur, an ad observationes incomplete iam compensatas.

Revera constituant $-\theta$, $-\theta'$, $-\theta''$ etc. systema compensationis incompletae, quod prodierit e formulis (I)

$$\begin{aligned}\theta p &= A^0 a + B^0 b + C^0 c + \text{etc.}\\ \theta' p' &= A^0 a' + B^0 b' + C^0 c' + \text{etc.}\\ \theta'' p'' &= A^0 a'' + B^0 b'' + C^0 c'' + \text{etc.}\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Quum observationes his compensationibus mutatae omnibus aequationibus conditionalibus non satisfacere supponantur, sint $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ etc. valores, quos X, Y, Z etc. ex illarum substitutione nanciscuntur. Quaerendi sunt numeri A^*, B^*, C^* etc. aequationibus (II) satisfacientes

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}^* &= A^*[aa] + B^*[ab] + C^*[ac] + \text{etc.}\\ \mathfrak{B}^* &= A^*[ab] + B^*[bb] + C^*[bc] + \text{etc.}\\ \mathfrak{C}^* &= A^*[ac] + B^*[bc] + C^*[cc] + \text{etc.}\end{aligned}$$

etc., quo facto compensatio completa observationum isto modo mutatarum efficitur per mutationes novas $-\varkappa$, $-\varkappa'$, $-\varkappa''$ etc., ubi $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. computandae sunt per formulas (III)

$$\begin{aligned}\varkappa p &= A^* a + B^* b + C^* c + \text{etc.}\\ \varkappa' p' &= A^* a' + B^* b' + C^* c' + \text{etc.}\\ \varkappa'' p'' &= A^* a'' + B^* b'' + C^* c'' + \text{etc.}\end{aligned}$$

etc. Iam inquiramus, quomodo hae correctiones cum compensatione completa

observationum primitivarum cohaereant. Primo manifestum est, haberi

$$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} - a\theta - a'\theta' - a''\theta'' - \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} - b\theta - b'\theta' - b''\theta'' - \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C} - c\theta - c'\theta' - c''\theta'' - \text{etc.}$$

etc. Substituendo in his aequationibus pro θ, θ', θ'' etc. valores ex (I), nec non pro $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ etc. valores ex II, invenimus

$$\mathfrak{A} = (A^0 + A^*)[aa] + (B^0 + B^*)[ab] + (C^0 + C^*)[ac] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = (A^0 + A^*)[ab] + (B^0 + B^*)[bb] + (C^0 + C^*)[bc] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = (A^0 + A^*)[ac] + (B^0 + B^*)[bc] + (C^0 + C^*)[cc] + \text{etc.}$$

etc., unde patet, correlata aequationum conditionalium aequationibus (12) satisfacientia esse

$$A = A^0 + A^*, \quad B = B^0 + B^*, \quad C = C^0 + C^* \text{ etc.}$$

Hinc vero aequationes (10), I et III docent, esse

$$\varepsilon = \theta + \varkappa, \quad \varepsilon' = \theta' + \varkappa' \quad \varepsilon'' = \theta'' + \varkappa'' \text{ etc.}$$

i. e. compensatio observationum perfecta eadem prodit, sive immediate computetur, sive mediate proficiscendo a compensatione manca.

20.

Quoties multitudo aequationum conditionalium permagna est, determinatio correlatorum A, B, C etc. per eliminationem directam tam prolixa evadere potest, ut calculatoris patientia ei impar sit: tunc saepenumero commodum esse poterit, compensationem completam per approximationes successivas adiumento theorematis art. praec. eruere. Distribuantur aequationes conditionales in duas pluresve classes, investigeturque primo compensatio, per quam aequationibus primae classis satisfit, neglectis reliquis. Dein tractentur observationes per hanc compensationem mutatae ita, ut solarum aequationum secundae classis ratio habeatur. Generaliter loquendo applicatio secundi compensationum systematis consensum cum aequationibus primae classis turbabit; quare, si duae tantummodo classes factae sunt, ad aequationes primae classis revertemur, tertiumque systema, quod huic satisfaciat, eruemus; dein observationes ter correctas compensationi quartae

subiiciemus, ubi solae aequationes secundae classis respiciuntur. Ita alternis vicibus, modo priorem classem modo posteriorem respicientes, compensationes continuo decrescentes obtinebimus, et si distributio scite adornata fuerat, post paucas iterationes ad numeros stabiles perveniemus. Si plures quam duae classes factae sunt, res simili modo se habebit: classes singulae deinceps in computum venient, post ultimam iterum prima et sic porro. Sed sufficiat hoc loco, hunc modum addigitavisse, cuius efficacia multum utique a scita applicatione pendebit.

21.

Restat, ut suppleamus demonstrationem lemmatis in art. 8 suppositi, ubi tamen perspicuitatis caussa alias denotationes huic negotio magis adaptatas adhibebimus.

Sint itaque x^0, x', x'', x''' etc. indeterminatae, supponamusque, ex aequationibus

$$\begin{aligned}
&n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.} = X^0\\
&n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.} = X'\\
&n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.} = X''\\
&n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.} = X'''\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

sequi per eliminationem has

$$\begin{aligned}
&N^{00}X^0 + N^{01}X' + N^{02}X'' + N^{03}X''' + \text{etc.} = x^0\\
&N^{10}X^0 + N^{11}X' + N^{12}X'' + N^{13}X''' + \text{etc.} = x'\\
&N^{20}X^0 + N^{21}X' + N^{22}X'' + N^{23}X''' + \text{etc.} = x''\\
&N^{30}X^0 + N^{31}X' + N^{32}X'' + N^{33}X''' + \text{etc.} = x'''\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Substitutis itaque in aequatione prima et secunda secundi systematis valoribus quantitatum X, X', X'', X''' etc. e primo systemate, obtinemus

$$\begin{aligned}
x^0 = \; & N^{00}(n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{01}(n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{02}(n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{03}(n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.}) \text{ etc.}
\end{aligned}$$

nec non

$$\begin{aligned} x' = \; & N^{10}(n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{11}(n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{12}(n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{13}(n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.}) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Quum utraque aequatio manifesto esse debeat aequatio identica, tum in priore tum in posteriore pro x^0, x', x'', x''' etc. valores quoslibet determinatos substituere licebit. Substituamus in priore

$$x^0 = N^{10}, \quad x' = N^{11}, \quad x'' = N^{12}, \quad x''' = N^{13} \quad \text{etc.}$$

in posteriore vero

$$x^0 = N^{00}, \quad x' = N^{01}, \quad x'' = N^{02}, \quad x''' = N^{03} \quad \text{etc.}$$

His ita factis subtractio producit

$$\begin{aligned} N^{10} - N^{01} = \; & (N^{00}N^{11} - N^{10}N^{01})(n^{01} - n^{10}) \\ & + (N^{00}N^{12} - N^{10}N^{02})(n^{02} - n^{20}) \\ & + (N^{00}N^{13} - N^{10}N^{03})(n^{03} - n^{30}) \\ & + \text{etc.} \\ & + (N^{01}N^{12} - N^{11}N^{02})(n^{12} - n^{21}) \\ & + (N^{01}N^{13} - N^{11}N^{03})(n^{13} - n^{31}) \\ & + \text{etc.} \\ & + (N^{02}N^{13} - N^{12}N^{03})(n^{23} - n^{32}) \\ & + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

quae aequatio ita quoque exhiberi potest

$$N^{10} - N^{01} = \Sigma(N^{0\alpha}N^{1\beta} - N^{1\alpha}N^{0\beta})(n^{\alpha\beta} - n^{\beta\alpha})$$

denotantibus $\alpha\beta$ omnes combinationes indicum inaequalium.

Hinc colligitur, si fuerit

$$n^{01} = n^{10}, \quad n^{02} = n^{20}, \quad n^{03} = n^{30}, \quad n^{12} = n^{21}, \quad n^{13} = n^{31}, \quad n^{23} = n^{32}, \text{ etc.}$$

sive generaliter $n^{\alpha\beta} = n^{\beta\alpha}$, fore etiam

$$N^{10} = N^{01}$$

Et quum ordo indeterminatarum in aequationibus propositis sit arbitrarius, manifesto in illa suppositione erit generaliter

$$N^{\alpha\delta} = N^{\delta\alpha}$$

22.

Quum methodus in hac commentatione exposita applicationem imprimis frequentem et commodam inveniat in calculis ad geodaesiam sublimiorem pertinentibus, lectoribus gratam fore speramus illustrationem praeceptorum per nonnulla exempla hinc desumta.

Aequationes conditionales inter angulos systematis triangulorum e triplici potissimum fonte sunt petendae.

I. Aggregatum angulorum horizontalium, qui circa eundem verticem gyrum integrum horizontis complent, aequare debet quatuor rectos.

II. Summa trium angulorum in quovis triangulo quantitati datae aequalis est, quum, quoties triangulum est in superficie curva, excessum illius summae supra duos rectos tam accurate computare liceat, ut pro absolute exacto haberi possit.

III. Fons tertius est ratio laterum in triangulis catenam clausam formantibus. Scilicet si series triangulorum ita nexa est, ut secundum triangulum habeat latus unum a commune cum triangulo primo, aliud b cum tertio; perinde quartum triangulum cum tertio habeat latus commune c, cum quinto latus commune d, et sic porro usque ad ultimum triangulum, cui cum praecedenti latus commune sit k, et cum triangulo primo rursus latus l, valores quotientium $\frac{a}{l}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{d}{c} \ldots \frac{l}{k}$, innotescent resp. e binis angulis triangulorum successivorum, lateribus communibus oppositis, per methodos notas, unde quum productum illarum fractionum fieri debeat $= 1$, prodibit aequatio conditionalis inter sinus illorum angulorum, (parte tertia excessus sphaerici vel sphaeroidici, si triangula sunt in superficie curva, resp. diminutorum).

Ceterum in systematibus triangulorum complicatioribus saepissime accidit, ut aequationes conditionales tum secundi tum tertii generis plures se offerant, quam retinere fas est, quoniam pars earum in reliquis iam contenta est. Contra rarior erit casus, ubi aequationibus conditionalibus secundi generis adiungere oportet aequationes similes ad figuras plurium laterum spectantes, puta tunc tantum, ubi

polygona formantur, in triangula per mensurationes non divisa. Sed de his rebus, ab instituto praesenti nimis alienis, alia occasione fusius agemus. Silentio tamen praeterire non possumus monitum, quod theoria nostra, si applicatio pura atque rigorosa in votis est, supponit, quantitates per v, v', v'' etc. designatas revera vel immediate observatas esse, vel ex observationibus ita derivatas, ut inter se independentes maneant, vel saltem tales censeri possint. In praxi vulgari observantur anguli triangulorum ipsi, qui proin pro v, v', v'' etc. accipi possunt; sed memores esse debemus, si forte systema insuper contineat triangula talia, quorum anguli non sint immediate observati, sed prodeant tamquam summae vel differentiae angulorum revera observatorum, illos non inter observatorum numerum referendos, sed in forma compositionis suae in calculis retinendos esse. Aliter vero res se habebit in modo observandi ei simili, quem sequutus est clar. STRUVE (Astronomische Nachrichten II, p. 431), ubi directiones singulorum laterum ab eodem vertice proficiscentium obtinentur per comparationem cum una eademque directione arbitraria. Tunc scilicet hi ipsi anguli pro v, v', v'' etc. accipiendi sunt, quo pacto omnes anguli triangulorum in forma differentiarum se offerent, aequationesque conditionales primi generis, quibus per rei naturam sponte satisfit, tamquam superfluae cessabunt. Modus observationis, quem ipse sequutus sum in dimensione triangulorum annis praecedentibus perfecta, differt quidem tum a priore tum a posteriore modo, attamen respectu effectus posteriori aequiparari potest, ita ut in singulis stationibus directiones laterum inde proficiscentium ab initio quasi arbitrario numeratas pro quantitatibus v, v', v'' etc. accipere oporteat. Duo iam exempla elaborabimus, alterum ad modum priorem, alterum ad posteriorem pertinens.

23.

Exemplum primum nobis suppeditabit opus clar. DE KRAYENHOF, *Précis historique des opérations trigonométriques faites en Hollande*, et quidem compensationi subiiciemus partem eam systematis triangulorum, quae inter novem puncta Harlingen, Sneek, Oldeholtpade, Ballum, Leeuwarden, Dockum, Drachten, Oosterwolde, Gröningen continentur. Formantur inter haec puncta novem triangula in opere illo per numeros 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132 denotata, quorum anguli (a nobis indicibus praescriptis distincti) secundum tabulam p. 77—81 ita sunt observati:

Triangulum 121.

0.	Harlingen	50°	58′	15″238
1.	Leeuwarden . . .	82	47	15,351
2.	Ballum	46	14	27,202

Triangulum 122.

3.	Harlingen	51	5	39,717
4.	Sneek	70	48	33,445
5.	Leeuwarden . . .	58	5	48,707

Triangulum 123.

6.	Sneek	49	30	40,051
7.	Drachten	42	52	59,382
8.	Leeuwarden . . .	87	36	21,057

Triangulum 124.

9.	Sneek	45	36	7,492
10.	Oldeholtpade . . .	67	52	0,048
11.	Drachten	66	31	56,513

Triangulum 125.

12.	Drachten	53	55	24,745
13.	Oldeholtpade . . .	47	48	52,580
14.	Oosterwolde . . .	78	15	42,347

Triangulum 127.

15.	Leeuwarden . . .	59	24	0,645
16.	Dockum	76	34	9,021
17.	Ballum	44	1	51,040

Triangulum 128.

18.	Leeuwarden . . .	72	6	32,043
19.	Drachten	46	53	27,163
20.	Dockum	61	0	4,494

Triangulum 131.

21.	Dockum	57	1	55,292
22.	Drachten	83	33	14,515
23.	Gröningen	39	24	52,397

Triangulum 132.

24.	Oosterwolde . . .	81°	54′	17″447
25.	Gröningen.	31	52	46,094
26.	Drachten	66	12	57,246

Consideratio nexus inter haec triangula monstrat, inter 27 angulos, quorum valores approximati per observationem innotuerunt, 13 aequationes conditionales haberi, puta duas primi generis, novem secundi, duas tertii. Sed haud opus erit, has aequationes omnes in forma sua finita hic adscribere, quum ad calculos tantummodo requirantur quantitates in theoria generali per $\mathfrak{A}$, a, a', a'' etc., $\mathfrak{B}$, b, b', b'' etc. etc. denotatae: quare illarum loco statim adscribimus aequationes supra per (13) denotatas, quae illas quantitates ob oculos ponunt: loco signorum ε, ε', ε'' etc. simpliciter hic scribemus (0), (1), (2) etc.

Hoc modo duabus aequationibus conditionalibus primi generis respondent sequentes:

$$(1)+(5)+(8)+(15)+(18) = -2''197$$
$$(7)+(11)+(12)+(19)+(22)+(26) = -0''436$$

Excessus sphaeroidicos novem triangulorum invenimus deinceps: 1″749; 1″147; 1″243; 1″698; 0″873; 1″167; 1″104; 2″161; 1″403. Oritur itaque aequatio conditionalis secundi generis prima haec *): $v^{(0)}+v^{(1)}+v^{(2)}-180^0\,0'\,1''749=0$, et perinde reliquae: hinc habemus novem aequationes sequentes:

$$(0)+(1)+(2) = -3''958$$
$$(3)+(4)+(5) = +0,722$$
$$(6)+(7)+(8) = -0,753$$
$$(9)+(10)+(11) = +2,355$$
$$(12)+(13)+(14) = -1,201$$
$$(15)+(16)+(17) = -0,461$$
$$(18)+(19)+(20) = +2,596$$
$$(21)+(22)+(23) = +0,043$$
$$(24)+(25)+(26) = -0,616$$

Aequationes conditionales tertii generis commodius in forma logarithmica exhibentur: ita prior est

*) Indices in hoc exemplo per figuras arabicas exprimere praeferimus.

$$\log\sin(v^{(0)} - 0''583) - \log\sin(v^{(2)} - 0''583) - \log\sin(v^{(3)} - 0''382)$$
$$+ \log\sin(v^{(4)} - 0''382) - \log\sin(v^{(6)} - 0''414) + \log\sin(v^{(7)} - 0''414)$$
$$- \log\sin(v^{(16)} - 0''389) + \log\sin(v^{(17)} - 0''389) - \log\sin(v^{(19)} - 0''368)$$
$$+ \log\sin(v^{(20)} - 0''368) = 0$$

Superfluum videtur, alteram in forma finita adscribere. His duabus aequationibus respondent sequentes, ubi singuli coëfficientes referuntur ad figuram septimam logarithmorum briggicorum:

$$17{,}068(0) - 20{,}174\,(2) - 16{,}993\,(3) + 7{,}328\,(4) - 17{,}976\,(6) + 22{,}672(7)$$
$$- 5{,}028(16) + 21{,}780(17) - 19{,}710(19) + 11{,}671(20) = -371$$
$$17{,}976(6) - 0{,}880\,(8) - 20{,}617\,(9) + 8{,}564(10) - 19{,}082(13) + 4{,}375(14)$$
$$+ 6{,}798(18) - 11{,}671(20) + 13{,}657(21) - 25{,}620(23) - 2{,}995(24)$$
$$+ 33{,}854(25) = +370$$

Quum nulla ratio indicata sit, cur observationibus pondera inaequalia tribuamus, statuemus $p^{(0)} = p^{(1)} = p^{(2)}$ etc. $= 1$. Denotatis itaque correlatis aequationum conditionalium eo ordine, quo aequationes ipsis respondentes exhibuimus, per $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N$, prodeunt ad illorum determinationem aequationes sequentes:

$$-2''197 = 5A + C + D + E + H + I + 5{,}917\,N$$
$$-0{,}436 = 6B + E + F + G + I + K + L + 2{,}962\,M$$
$$-3{,}958 = A + 3C - 3{,}106\,M$$
$$+0{,}722 = A + 3D - 9{,}665\,M$$
$$-0{,}753 = A + B + 3E + 4{,}696\,M + 17{,}096\,N$$
$$+2{,}355 = B + 3F - 12{,}053\,N$$
$$-1{,}201 = B + 3G - 14{,}707\,N$$
$$-0{,}461 = A + 3H + 16{,}752\,M$$
$$+2{,}596 = A + B + 3I - 8{,}039\,M - 4{,}874\,N$$
$$+0{,}043 = B + 3K - 11{,}963\,N$$
$$-0{,}616 = B + 3L + 30{,}859\,N$$
$$-371 = +2{,}962\,B - 3{,}106\,C - 9{,}665\,D + 4{,}696\,E + 16{,}752\,H - 8{,}039\,I$$
$$+ 2902{,}27\,M - 459{,}33\,N$$
$$+370 = +5{,}917\,A + 17{,}096\,E - 12{,}053\,F - 14{,}707\,G - 4{,}874\,I$$
$$- 11{,}963\,K + 30{,}859\,L - 459{,}33\,M + 3385{,}96\,N$$

Hinc eruimus per eliminationem:

$A = -0{,}598$	$H = +0{,}659$
$B = -0{,}255$	$I = +1{,}050$
$C = -1{,}234$	$K = +0{,}577$
$D = +0{,}086$	$L = -1{,}351$
$E = -0{,}477$	$M = -0{,}109792$
$F = +1{,}351$	$N = +0{,}119681$
$G = +0{,}271$	

Denique errores maxime plausibiles prodeunt per formulas

$$(0) = C + 17{,}068\,M$$
$$(1) = A + C$$
$$(2) = C + 20{,}174\,M$$
$$(3) = D - 16{,}993\,M$$

etc., unde obtinemus valores numericos sequentes; in gratiam comparationis apponimus (mutatis signis) correctiones a clar. DE KRAYENHOF observationibus applicatas:

		DE KR.			DE KR.
(0)	$= -3''108$	$-2''090$	(14)	$= +0''795$	$+2''400$
(1)	$= -1{,}832$	$+0{,}116$	(15)	$= +0{,}061$	$+1{,}273$
(2)	$= +0{,}981$	$-1{,}982$	(16)	$= +1{,}211$	$+5{,}945$
(3)	$= +1{,}952$	$+1{,}722$	(17)	$= -1{,}732$	$-7{,}674$
(4)	$= -0{,}719$	$+2{,}848$	(18)	$= +1{,}265$	$+1{,}876$
(5)	$= -0{,}512$	$-3{,}848$	(19)	$= +2{,}959$	$+6{,}251$
(6)	$= +3{,}648$	$-0{,}137$	(20)	$= -1{,}628$	$-5{,}530$
(7)	$= -3{,}221$	$+1{,}000$	(21)	$= +2{,}211$	$+3{,}486$
(8)	$= -1{,}180$	$-1{,}614$	(22)	$= +0{,}322$	$-3{,}454$
(9)	$= -1{,}116$	0	(23)	$= -2{,}489$	0
(10)	$= +2{,}376$	$+5{,}928$	(24)	$= -1{,}709$	$+0{,}400$
(11)	$= +1{,}096$	$-3{,}570$	(25)	$= +2{,}701$	$+2{,}054$
(12)	$= +0{,}016$	$+2{,}414$	(26)	$= -1{,}606$	$-3{,}077$
(13)	$= -2{,}013$	$-6{,}014$			

Aggregatum quadratorum nostrarum compensationum invenitur $= 97,8845$. Hinc error medius, quatenus ex 27 angulis observatis colligi potest,

$$= \sqrt{\tfrac{97,8845}{13}} = 2''7440$$

Aggregatum quadratorum mutationum, quas clar. DE KRAYENHOF ipse angulis observatis applicavit, invenitur $= 341,4201$.

24.

Exemplum alterum suppeditabunt triangula inter quinque puncta triangulationis Hannoveranae, Falkenberg, Breithorn, Hauselberg, Wulfsode, Wilsede. Observatae sunt directiones*):

	In statione *Falkenberg*			
0.	Wilsede	187°	47′	30″311
1.	Wulfsode	225	9	39,676
2.	Hauselberg . . .	266	13	56,239
3.	Breithorn	274	14	43,634
	In statione *Breithorn*			
4.	Falkenberg . . .	94	33	40,755
5.	Hauselberg . . .	122	51	23,054
6.	Wilsede	150	18	35,100
	In statione *Hauselberg*			
7.	Falkenberg . . .	86	29	6,872
8.	Wilsede	154	37	9,624
9.	Wulfsode	189	2	56,376
10.	Breithorn	302	47	37,732
	In statione *Wulfsode*			
11.	Hauselberg . . .	9	5	36,593
12.	Falkenberg . . .	45	27	33,556
13.	Wilsede	118	44	13,159

*) Initia, ad quae singulae directiones referuntur, hic tamquam arbitraria considerantur, quamquam revera cum lineis meridianis stationum coincidunt. Observationes in posterum complete publici iuris fient: interim figura invenitur in *Astronomische Nachrichten* Vol. I. p. 441.

In statione *Wilsede*

14.	Falkenberg . . .	7°	51′	1″027
15.	Wulfsode	298	29	49,519
16.	Breithorn	330	3	7,392
17.	Hauselberg . . .	334	25	26,746

Ex his observationibus septem triangula formare licet.

Triangulum I.

Falkenberg	8°	0′	47″395
Breithorn	28	17	42,299
Hauselberg	143	41	29,140

Triangulum II.

Falkenberg	86	27	13,323
Breithorn	55	44	54,345
Wilsede	37	47	53,635

Triangulum III.

Falkenberg	41	4	16,563
Hauselberg	102	33	49,504
Wulfsode	36	21	56,963

Triangulum IV.

Falkenberg	78	26	25,928
Hauselberg	68	8	2,752
Wilsede	35	25	34,281

Triangulum V.

Falkenberg	37	22	9,365
Wulfsode	73	16	39,603
Wilsede	69	21	11,508

Triangulum VI.

Breithorn	27	27	12,046
Hauselberg	148	10	28,108
Wilsede	4	22	19,354

Triangulum VII.

Hauselberg	34°	25′	46″752
Wulfsode	109	38	36,566
Wilsede	35	55	37,227

Aderunt itaque septem aequationes conditionales secundi generis (aequationes primi generis manifesto cessant), quas ut eruamus, computandi sunt ante omnia excessus sphaeroidici septem triangulorum. Ad hunc finem requiritur cognitio magnitudinis absolutae saltem unius lateris: latus inter puncta Wilsede et Wulfsode est 22877,94 metrorum. Hinc prodeunt excessus sphaeroidici triangulorum I... 0″202; II... 2″442; III... 1″257; IV... 1″919; V... 1″957; VI... 0″321; VII... 1″295.

Iam si directiones eo ordine, quo supra allatae indicibusque distinctae sunt, per $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ etc. designantur, trianguli I anguli fiunt

$$v^{(3)}-v^{(2)},\quad v^{(5)}-v^{(4)},\quad 360^0+v^{(7)}-v^{(10)}$$

adeoque aequatio conditionalis prima

$$-v^{(2)}+v^{(3)}-v^{(4)}+v^{(5)}+v^{(7)}-v^{(10)}+179^0\,59'\,59''798=0$$

Perinde triangula reliqua sex alias suppeditant; sed levis attentio docebit, has septem aequationes non esse independentes, sed secundam identicam cum summa primae, quartae et sextae; nec non summam tertiae et quintae identicam cum summa quartae et septimae: quapropter secundam et quintam negligemus. Loco remanentium aequationum conditionalium in forma finita, adscribimus aequationes correspondentes e complexu (13), dum pro characteribus ε, ε' etc. his (0), (1), (2) etc. utimur:

$$\begin{aligned}
-1''368 &= -(2)+(3)-(4)+(5)+(7)-(10)\\
+1,773 &= -(1)+(2)-(7)+(9)-(11)+(12)\\
+1,042 &= -(0)+(2)-(7)+(8)+(14)-(17)\\
-0,813 &= -(5)+(6)-(8)+(10)-(16)+(17)\\
-0,750 &= -(8)+(9)-(11)+(13)-(15)+(17)
\end{aligned}$$

Aequationes conditionales tertii generis *octo* e triangulorum systemate peti possent, quum tum terna quatuor triangulorum I, II, IV, VI, tum terna ex his

III, IV, V, VII ad hunc finem combinare liceat; attamem levis attentio docet, *duas* sufficere, alteram ex illis, alteram ex his, quum reliquae in his atque prioribus aequationibus conditionalibus iam contentae esse debeant. Aequatio itaque conditionalis sexta nobis erit

$$\begin{aligned}&\log\sin(v^{(3)}-v^{(2)}-0''067)-\log\sin(v^{(5)}-v^{(4)}-0''067)\\+&\log\sin(v^{(14)}-v^{(17)}-0''640)-\log\sin(v^{(2)}-v^{(0)}-0''640)\\+&\log\sin(v^{(6)}-v^{(5)}-0''107)-\log\sin(v^{(17)}-v^{(16)}-0''107)=0\end{aligned}$$

atque septima

$$\begin{aligned}&\log\sin(v^{(2)}-v^{(1)}-0''419)-\log\sin(v^{(12)}-v^{(11)}-0''419)\\+&\log\sin(v^{(14)}-v^{(17)}-0''640)-\log\sin(v^{(2)}-v^{(0)}-0''640)\\+&\log\sin(v^{(13)}-v^{(11)}-0''432)-\log\sin(v^{(17)}-v^{(15)}-0''432)=0\end{aligned}$$

quibus respondent aequationes complexus (13)

$$\begin{aligned}+25=&+4,31(0)-153,88(2)+149,57(3)+39,11(4)-79,64(5)\\&+40,53(6)+31,90(14)+275,39(16)-307,29(17)\\-3=&+4,31(0)-24,16(1)+19,85(2)+36,11(11)-28,59(12)\\&-7,52(13)+31,90(14)+29,06(15)-60,96(17)\end{aligned}$$

Quodsi iam singulis directionibus eandem certitudinem tribuimus, statuendo $p^{(0)}=p^{(1)}=p^{(2)}$ etc. $=1$, correlataque septem aequationum conditionalium, eo ordine, quem hic sequuti sumus, per A, B, C, D, E, F, G denotamus, horum determinatio petenda erit ex aequationibus sequentibus:

$$\begin{aligned}-1,368&=+6A-2B-2C-2D+184,72F-19,85G\\+1,773&=-2A+6B+2C+2E-153,88F-20,69G\\+1,042&=-2A+2B+6C-2D-2E+181,00F+108,40G\\-0,813&=-2A-2C+6D+2E-462,51F-60,96G\\-0,750&=+2B-2C+2D+6E-307,29F-133,65G\\+25\quad&=+184,72A-153,88B+181,00C-462,51D-307,29E\\&\qquad+224868F+16694,1G\\-3\quad&=-19,85A-20,69B+108,40C-60,96D-133,65E\\&\qquad+16694,1F+8752,39G\end{aligned}$$

Hinc deducimus per eliminationem

$$A = -0,225$$
$$B = +0,344$$
$$C = -0,088$$
$$D = -0,171$$
$$E = -0,323$$
$$F = +0,000215915$$
$$G = -0,00547462$$

Iam errores maxime plausibiles habentur per formulas:

$$(0) = -C + 4,31\,F + 4,31\,G$$
$$(1) = -B - 24,16\,G$$
$$(2) = -A + B + C - 153,88\,F + 19,85\,G$$

etc., unde prodeunt valores numerici

$(0) = +0''065$	$(9) = +0''021$
$(1) = -0,212$	$(10) = +0,054$
$(2) = +0,339$	$(11) = -0,219$
$(3) = -0,193$	$(12) = +0,501$
$(4) = +0,233$	$(13) = -0,282$
$(5) = -0,071$	$(14) = -0,256$
$(6) = -0,162$	$(15) = +0,164$
$(7) = -0,481$	$(16) = +0,230$
$(8) = +0,406$	$(17) = -0,139$

Summa quadratorum horum errorum invenitur $= 1,2288$; hinc error medius unius directionis, quatenus e 18 directionibus observatis erui potest,

$$= \sqrt{\tfrac{1,2288}{7}} = 0''4190$$

25.

Ut etiam pars altera theoriae nostrae exemplo illustretur, indagamus praecisionem, qua latus Falkenberg-Breithorn e latere Wilsede-Wulfsode adiumento observationum compensatarum determinatur. Functio u, per quam illud in hoc casu exprimitur, est

$$u = 22877^{\mathrm{m}}94 \times \frac{\sin(v^{(13)} - v^{(12)} - 0''652)\,.\,\sin(v^{(14)} - v^{(16)} - 0''814)}{\sin(v^{(1)} - v^{(0)} - 0''652)\,.\,\sin(v^{(4)} - v^{(6)} - 0''814)}$$

Huius valor e valoribus correctis directionum $v^{(0)}$, $v^{(1)}$ etc. invenitur

$$= 26766^{\mathrm{m}}68$$

Differentiatio autem illius expressionis suppeditat, si differentialia $\mathrm{d}v^{(0)}$, $\mathrm{d}v^{(1)}$ etc. minutis secundis expressa concipiuntur,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u = {} & 0^{\mathrm{m}}16991\,(\mathrm{d}v^{(0)} - \mathrm{d}v^{(1)}) + 0^{\mathrm{m}}08836\,(\mathrm{d}v^{(4)} - \mathrm{d}v^{(6)}) \\ & - 0^{\mathrm{m}}03899\,(\mathrm{d}v^{(12)} - \mathrm{d}v^{(13)}) + 0^{\mathrm{m}}16731\,(\mathrm{d}v^{(14)} - \mathrm{d}v^{(16)}) \end{aligned}$$

Hinc porro invenitur

$$\begin{aligned} [al] &= -\ 0,08836 \\ [bl] &= +\ 0,13092 \\ [cl] &= -\ 0,00260 \\ [dl] &= +\ 0,07895 \\ [el] &= +\ 0,03899 \\ [fl] &= -40,1315 \\ [gl] &= +10,9957 \\ [ll] &= +\ 0,13238 \end{aligned}$$

Hinc denique per methodos supra traditas invenitur, quatenus metrum pro unitate dimensionum linearium accipimus,

$$\frac{1}{P} = 0,08329, \qquad \text{sive} \quad P = 12,006$$

unde error medius in valore lateris Falkenberg-Breithorn metuendus $= 0,2886\,m$ metris, (ubi m error medius in directionibus observatis metuendus, et quidem in minutis secundis expressus), adeoque, si valorem ipsius m supra erutum adoptamus,

$$= 0^{\mathrm{m}}1209$$

Ceterum inspectio systematis triangulorum sponte docet, punctum Hauselberg omnino ex illo elidi potuisse, incolumi manente nexu inter latera Wilsede-Wulfsode atque Falkenberg-Breithorn. Sed a bona methodo abhorreret, *supprimere* idcirco observationes, quae ad punctum Hauselberg referun-

tur*), quum certe ad praecisionem augendam conferre valeant. Ut clarius appareret, quantum praecisionis augmentum inde redundet, calculum denuo fecimus excludendo omnia, quae ad punctum Hauselberg referuntur, quo pacto e 18 directionibus supra traditis octo excidunt, atque reliquarum errores maxime plausibiles ita inveniuntur:

(0) = $+0''327$	(12) = $+0''206$
(1) = $-0,206$	(13) = $-0,206$
(3) = $-0,121$	(14) = $+0,327$
(4) = $+0,121$	(15) = $+0,206$
(6) = $-0,121$	(16) = $+0,121$

Valor lateris Falkenberg-Breithorn tunc prodit $= 26766^m63$, parum quidem a valore supra eruto discrepans, sed calculus ponderis producit

$$\frac{1}{P} = 0,13082 \quad \text{sive} \quad P = 7,644$$

adeoque error medius metuendus $= 0,36169\,m$ metris $= 0^m1515$. Patet itaque, per accessionem observationum, quae ad punctum Hauselberg referuntur, pondus determinationis lateris Falkenberg-Breithorn auctum esse in ratione numeri 7,644 ad 12,006, sive unitatis ad 1,571.

*) Maior pars harum observationum iam facta erat, antequam punctum Breithorn repertum, atque in systema receptum esset.

ANZEIGEN.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1821 Februar 26.

Am 15. Februar wurde der Königl. Societät vom Hrn Hofr. Gauss eine Vorlesung übergeben, überschrieben

Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior,

die eine der wichtigsten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Gegenstande hat. Alle Beobachtungen, die sich auf Grössenbestimmungen aus der Sinnenwelt beziehen, können, mit welcher Genauigkeit und mit wie vortrefflichen Werkzeugen sie auch angestellt werden, nie *absolute* Genauigkeit haben; sie bleiben immer nur Näherungen, grössern oder kleinern Fehlern ausgesetzt. Nicht von solchen Fehlern ist hier die Rede, deren Quellen genau bekannt sind, und deren Grösse bei bestimmten Beobachtungen jedesmal berechnet werden kann; denn da dergleichen Fehler bei den beobachteten Grössen in Abzug gebracht werden können und sollen, so ist es dasselbe, als ob sie gar nicht da wären. Ganz anders verhält es sich dagegen mit den als zufällig zu betrachtenden Fehlern, die aus der beschränkten Schärfe der Sinne, aus mancherlei unvermeidlichen und keiner Regel folgenden Unvollkommenheiten der Instrumente, und aus mancherlei regellos (wenigstens für uns) wirkenden Störungen durch äussere Umstände (z. B. das Wallen der Atmosphäre beim Sehen, Mangel absoluter Festigkeit beim Aufstellen der Instrumente) herrühren. Diese zufälligen Fehler, die

dem Calcül nicht unterworfen werden können, lassen sich nicht *wegschaffen*, und der Beobachter kann sie durch sorgfältige Aufmerksamkeit und durch Vervielfältigung der Beobachtungen nur *vermindern*: allein nachdem der Beobachter das seinige gethan hat, ist es an dem Geometer, die Unsicherheit der Beobachtungen und der durch Rechnung daraus abgeleiteten Grössen nach streng mathematischen Principien zu würdigen, und was das wichtigste ist, da, wo die mit den Beobachtungen zusammenhängenden Grössen aus denselben durch verschiedene Combinationen abgeleitet werden können, diejenige Art vorzuschreiben, wobei so wenig Unsicherheit als möglich zu befürchten bleibt.

Obgleich die zufälligen Fehler als solche keinem Gesetze folgen, sondern ohne Ordnung in einer Beobachtung grösser, in einer andern kleiner ausfallen, so ist doch gewiss, dass bei einer bestimmten Beobachtungsart, auch die Individualität des Beobachters und seiner Werkzeuge als bestimmt betrachtet, die aus jeder einfachen Fehlerquelle fliessenden Fehler nicht bloss in gewissen Grenzen eingeschlossen sind, sondern dass auch alle möglichen Fehler zwischen diesen Grenzen ihre bestimmte relative Wahrscheinlichkeit haben, der zu Folge sie nach Maassgabe ihrer Grösse häufiger oder seltener zu erwarten sind, und derjenige, der eine genaue und vollständige Einsicht in die Beschaffenheit einer solchen Fehlerquelle hätte, würde diese Grenzen und den Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Fehler und ihrer Grösse zu bestimmen im Stande sein, auf eine ähnliche Weise, wie sich bei Glücksspielen, so bald man ihre Regeln kennt, die Grenzen der möglichen Gewinne und Verluste, und deren relative Wahrscheinlichkeiten berechnen lassen. Dasselbe gilt auch von dem aus dem Zusammenwirken der einfachen Fehlerquellen entspringenden Totalfehler. Auch sind diese Begriffe nicht auf unmittelbare Beobachtungen beschränkt, sondern auch auf mittelbare aus Beobachtungen abgeleitete Grössenbestimmungen anwendbar. In der Wirklichkeit werden uns freilich fast allemal die Mittel fehlen, das Gesetz der Wahrscheinlichkeiten der Fehler *a priori* anzugeben.

Wie wir die Unzulässigkeit einer bestimmten Art von Beobachtungen im Allgemeinen abschätzen wollen, hängt zum Theil von unserer Willkür ab. Man kann dabei entweder bloss die Grösse der äussersten möglichen Fehler zum Maassstabe wählen, oder zugleich auf die grössere oder geringere Wahrscheinlichkeit der einzelnen möglichen Fehler mit Rücksicht nehmen. Das letztere scheint angemessener zu sein. Allein diese Berücksichtigung kann auf vielfache Weise ge-

schehen. Man kann, wie es die Berechner bisher gemacht haben, den sogenannten wahrscheinlichen (nicht wahrschein*lichsten*) Fehler zum Maassstabe wählen, welches derjenige ist, über welchen hinaus alle möglichen Fehler zusammen noch eben so viele Wahrscheinlichkeit haben, wie alle diesseits liegenden zusammen; allein es wird *weit vortheilhafter* sein, zu diesem Zweck statt des wahrscheinlichen Fehlers den *mittlern* zu gebrauchen, vorausgesetzt, dass man diesen an sich noch schwankenden Begriff auf die rechte Art bestimmt. Man lege jedem Fehler ein von seiner Grösse abhängendes Moment bei, multiplicire das Moment jedes möglichen Fehlers in dessen Wahrscheinlichkeit und addire die Producte: der Fehler, dessen Moment diesem Aggregat gleich ist, wird als mittlerer betrachtet werden müssen. Allein welche Function der Grösse des Fehlers wir für dessen Moment wählen wollen, bleibt wieder unsrer *Willkür* überlassen, wenn nur der Werth derselben immer positiv ist, und für grössere Fehler grösser als für kleinere. Der Verf. hat die einfachste Function dieser Art gewählt, nemlich das Quadrat; diese Wahl ist aber noch mit manchen andern höchst wesentlichen Vortheilen verknüpft, die bei keiner andern statt finden. Denn sonst könnte auch jede andere Potenz mit geraden Exponenten gebraucht werden, und je grösser dieser Exponent gewählt würde, desto näher würde man dem Princip kommen, wo bloss die äussersten Fehler zum Maassstabe der Genauigkeit dienen. Gegen die Art, wie ein grosser Geometer den Begriff des mittlern Fehlers genommen hat, indem er die Momente der Fehler diesen gleich setzt, wenn sie positiv sind, und die ihnen entgegengesetzten Grössen dafür gebraucht, wenn sie negativ sind, lässt sich bemerken, dass dabei gegen die mathematische Continuität angestossen wird, dass sie so gut wie jede andere auch willkürlich gewählt ist, dass die Resultate viel weniger einfach und genugthuend ausfallen, und dass es auch an sich schon natürlicher scheint, das Moment der Fehler in einem stärkern Verhältniss, wie diese selbst, wachsen zu lassen, indem man sich gewiss lieber den einfachen Fehler zweimal, als den doppelten einmal gefallen lässt.

Diese Erläuterungen mussten vorangeschickt werden, wenn auch nur etwas von dem Inhalt der Untersuchung hier angeführt werden sollte, wovon die gegenwärtige Abhandlung die erste Abtheilung ausmacht.

Wenn die Grössen, deren Werthe durch Beobachtungen gefunden sind, mit einer gleichen Anzahl unbekannter Grössen auf eine bekannte Art zusammenhangen, so lassen sich, allgemein zu reden, die Werthe der unbekannten Grössen

aus den Beobachtungen durch Rechnung ableiten. Freilich werden jene Werthe auch nur näherungsweise richtig sein, in so fern die Beobachtungen es waren: allein die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat nichts dabei zu thun, als die Unsicherheit jener Bestimmungen zu würdigen, indem sie die der Beobachtungen voraussetzt. Ist die Anzahl der unbekannten Grössen grösser als die der Beobachtungen, so lassen sich jene aus diesen noch gar nicht bestimmen. Allein wenn die Anzahl der unbekannten Grössen kleiner ist, als die der Beobachtungen, so ist die Aufgabe mehr als bestimmt: es sind dann unendlich viele Combinationen möglich, um aus den Beobachtungen die unbekannten Grössen abzuleiten, die freilich alle zu einerlei Resultaten führen müssten, wenn die Beobachtungen absolute Genauigkeit hätten, aber unter den obwaltenden Umständen mehr oder weniger von einander abweichende Resultate hervorbringen. Aus dieser ins Unendliche gehenden Mannichfaltigkeit von Combinationen die zweckmässigste auszuwählen, d. i. diejenige, wobei die Unsicherheit der Resultate die möglich kleinste wird, ist unstreitig eine der wichtigsten Aufgaben bei der Anwendung der Mathematik auf die Naturwissenschaften.

Der Verfasser gegenwärtiger Abhandlung, welcher im Jahr 1797 diese Aufgabe nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zuerst untersuchte, fand bald, dass die Ausmittelung der *wahrscheinlichsten* Werthe der unbekannten Grösse unmöglich sei, wenn nicht die Function, die die Wahrscheinlichkeit der Fehler darstellt, bekannt ist. In so fern sie dies aber nicht ist, bleibt nichts übrig, als hypothetisch eine solche Function anzunehmen. Es schien ihm das natürlichste, zuerst den umgekehrten Weg einzuschlagen und die Function zu suchen, die zum Grunde gelegt werden muss, wenn eine allgemein als gut anerkannte Regel für den einfachsten aller Fälle daraus hervorgehen soll, die nemlich, dass das arithmetische Mittel aus mehreren für eine und dieselbe unbekannte Grösse durch Beobachtungen von gleicher Zuverlässigkeit gefundenen Werthen als der wahrscheinlichste betrachtet werden müsse. Es ergab sich daraus, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x, einer Exponentialgrösse von der Form e^{-hhxx} proportional angenommen werden müsse, und dass dann gerade diejenige Methode, auf die er schon einige Jahre zuvor durch andere Betrachtungen gekommen war, allgemein nothwendig werde. Diese Methode, welche er nachher besonders seit 1801 bei allerlei astronomischen Rechnungen fast täglich anzuwenden Gelegenheit hatte, und auf welche auch Legendre inzwischen gekommen war,

ist jetzt unter dem Namen Methode der kleinsten Quadrate im allgemeinen Gebrauch, und ihre Begründung durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung, so wie die Bestimmung der Genauigkeit der Resultate selbst, nebst andern damit zusammenhängenden Untersuchungen sind in der *Theoria Motus Corporum Coelestium* ausführlich entwickelt.

Der Marquis Delaplace, welcher nachher diesen Gegenstand aus einem neuen Gesichtspunkte betrachtete, indem er nicht die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Grössen suchte, sondern die zweckmässigste Combination der Beobachtungen, fand das merkwürdige Resultat, dass, wenn die Anzahl der Beobachtungen als unendlich gross betrachtet wird, die Methode der kleinsten Quadrate allemal und unabhängig von der Function, die die Wahrscheinlichkeit der Fehler ausdrückt, die zweckmässigste Combination sei.

Man sieht hieraus, dass beide Begründungsarten noch etwas zu wünschen übrig lassen. Die erstere ist ganz von der hypothetischen Form für die Wahrscheinlichkeit der Fehler abhängig, und sobald man diese verwirft, sind wirklich die durch die Methode der kleinsten Quadrate gefundenen Werthe der unbekannten Grössen nicht mehr die wahrscheinlichsten, eben so wenig wie die arithmetischen Mittel in dem vorhin angeführten einfachsten aller Fälle. Die zweite Begründungsart lässt uns ganz im Dunkeln, was bei einer mässigen Anzahl von Beobachtungen zu thun sei. Die Methode der kleinsten Quadrate hat dann nicht mehr den Rang eines von der Wahrscheinlichkeitsrechnung gebotenen Gesetzes, sondern empfiehlt sich nur durch die Einfachheit der damit verknüpften Operationen.

Der Verfasser, welcher in gegenwärtiger Abhandlung diese Untersuchung aufs neue vorgenommen hat, indem er von einem ähnlichen Gesichtspunkt ausging, wie Delaplace, aber den Begriff des mittlern zu befürchtenden Fehlers auf eine andere, und wie ihm scheint, schon an und für sich natürlichere Art, feststellt, hofft, dass die Freunde der Mathematik mit Vergnügen sehen werden, wie die Methode der kleinsten Quadrate in ihrer neuen hier gegebenen Begründung allgemein als die zweckmässigste Combination der Beobachtungen erscheint, nicht näherungsweise, sondern nach mathematischer Schärfe, die Function für die Wahrscheinlichkeit der Fehler sei, welche sie wolle, und die Anzahl der Beobachtungen möge gross oder klein sein.

Mit dem Hauptgegenstande ist eine Menge anderer merkwürdiger Unter-

suchungen enge verbunden, deren Umfang aber den Verfasser nöthigte, die Entwickelung des grössten Theils derselben einer künftigen zweiten Vorlesung vorzubehalten. Von denjenigen, die schon in der gegenwärtigen ersten Abtheilung vorkommen, sei es uns erlaubt, hier nur ein Resultat anzuführen. Wenn die Function, welche die relative Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Fehlers ausdrückt, unbekannt ist, so bleibt natürlich auch die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen gegebene Grenzen falle, unmöglich: dessenungeachtet muss, wenn nur allemal grössere Fehler geringere (wenigstens nicht grössere) Wahrscheinlichkeit haben als kleinere, die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen die Grenzen $-x$ und $+x$ falle, nothwendig grösser (wenigstens nicht kleiner) sein, als $\frac{x}{m}\sqrt{\frac{1}{3}}$, wenn x kleiner ist als $m\sqrt{\frac{4}{3}}$, und nicht kleiner als $1-\frac{4mm}{9xx}$, wenn x grösser ist als $m\sqrt{\frac{4}{3}}$, wobei m den bei den Beobachtungen zu befürchtenden mittlern Fehler bedeutet. Für $x = m\sqrt{\frac{4}{3}}$ fallen wie man sieht beide Ausdrücke zusammen.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1823 Februar 24.

Eine am 2. Febr. der Königl. Societät von Hrn. Hofr. GAUSS überreichte Vorlesung, überschrieben

Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars posterior,

steht im unmittelbaren Zusammenhange mit einer frühern, wovon in diesen Blättern [1821 Februar 26] eine Anzeige gegeben ist. Wir bringen darüber nur kurz in Erinnerung, dass ihr Zweck war, die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate auf eine neue Art zu begründen, wobei diese Methode nicht näherungsweise, sondern in mathematischer Schärfe, nicht mit der Beschränkung auf den Fall einer sehr grossen Anzahl von Beobachtungen, und nicht abhängig von einem hypothetischen Gesetze für die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler, sondern in vollkommener Allgemeinheit, als die zweckmässigste Combinationsart der Beobachtungen erscheint. Der gegenwärtige zweite Theil der Untersuchung enthält nun eine weitere Ausführung dieser Lehre in einer Reihe von Lehrsätzen und Problemen, die damit in genauester Verbindung stehen. Es würde der Einrich-

tung dieser Blätter nicht angemessen sein, diesen Untersuchungen hier Schritt vor Schritt zu folgen, auch unnöthig, da die Abhandlung selbst bereits unter der Presse ist. Wir begnügen uns daher, nur die Gegenstände von einigen dieser Untersuchungen, die sich leichter isolirt herausheben lassen, hier anzuführen.

Die Werthe der unbekannten Grössen, welche der Methode der kleinsten Quadrate gemäss sind, und die man die *sichersten Werthe* nennen kann, werden vermittelst einer bestimmten Elimination gefunden, und die diesen Bestimmungen beizulegenden Gewichte vermittelst einer unbestimmten Elimination, wie dies schon aus der *Theoria motus Corporum Coelestium* bekannt ist: auf eine neue Art wird hier *a priori* bewiesen, dass unter den obwaltenden Voraussetzungen diese Elimination allemal möglich ist. Zugleich wird eine merkwürdige Symmetrie unter den bei der unbestimmten Elimination hervorgehenden Coëfficienten nachgewiesen.

So leicht und klar sich diese Eliminationsgeschäfte im Allgemeinen übersehen lassen, so ist doch nicht zu läugnen, dass die wirkliche numerische Ausführung, bei einer beträchtlichen Anzahl von unbekannten Grössen, beschwerlich wird. Was die *bestimmte* Elimination, die zur Ausmittelung der sichersten Werthe für die unbekannten Grössen zureicht, betrifft, so hat der Verfasser ein Verfahren, wodurch die wirkliche Rechnung, so viel es nur die Natur der Sache verträgt, abgekürzt wird, bereits in der *Theoria Motus Corporum Coelestium* angedeutet, und in einer im ersten Bande der *Commentt. Rec. Soc. R. Gott.* befindlichen Abhandlung, *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis*, ausführlich entwickelt. Dieses Verfahren gewährt zugleich den Vortheil, dass das Gewicht der Bestimmung der einen unbekannten Grösse, welche man bei dem Geschäft als die letzte betrachtet hat, sich von selbst mit ergibt. Da nun die Ordnung unter den unbekannten Grössen gänzlich willkürlich ist, und man also welche man will, als die letzte behandeln kann, so ist dies Verfahren in allen Fällen zureichend, wo nur für Eine der unbekannten Grössen das Gewicht mit verlangt wird, und die beschwerliche unbestimmte Elimination wird dann umgangen.

Die seitdem bei den rechnenden Astronomen so allgemein gewordene Gewohnheit, die Methode der kleinsten Quadrate auf schwierige astronomische Rechnungen anzuwenden, wie auf die vollständige Bestimmung von Cometenbahnen, wobei die Anzahl der unbekannten Grössen bis auf sechs steigt, hat indess das Bedürfniss, das Gewicht der sichersten Werthe *aller* unbekannten Grössen auf

eine bequemere Art als durch die unbestimmte Elimination, zu finden, fühlbar gemacht, und da die Bemühungen einiger Geometer *) keinen Erfolg gehabt hatten, so hat man sich nur so geholfen, dass man den oben erwähnten Algorithmus so viele male mit veränderter Ordnung der unbekannten Grössen durchführte, als unbekannte Grössen waren, indem man jeder einmal den letzten Platz anwies. Es scheint uns jedoch, dass durch dieses kunstlose Verfahren in Vergleichung mit der unbestimmten Elimination in Rücksicht auf Kürze der Rechnung nichts gewonnen wird. Der Verfasser hat daher diesen wichtigen Gegenstand einer besondern Untersuchung unterworfen, und einen neuen Algorithmus zur Bestimmung der Gewichte der Werthe *sämmtlicher* unbekannten Grössen mitgetheilt, der alle Geschmeidigkeit und Kürze zu haben scheint, welcher die Sache ihrer Natur nach fähig ist.

Der sicherste Werth einer Grösse, welche eine gegebene Function der unbekannten Grössen der Aufgabe ist, wird gefunden, indem man für letztere ihre durch die Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen sichersten Werthe substituirt. Allein eine bisher noch nicht behandelte Aufgabe ist es, wie das jener Bestimmung beizulegende Gewicht zu finden sei. Die hier gegebene Auflösung dieser Aufgabe verdient um so mehr von den rechnenden Astronomen beherzigt zu werden, da sich findet, dass mehrere derselben dabei früher auf eine nicht richtige Art zu Werke gegangen sind.

Die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den unmittelbar beobachteten Grössen, und denjenigen Werthen, welchen ihre Ausdrücke, als Functionen der unbekannten Grössen, durch Substitution der sichersten Werthe für letztere erhalten (welche Quadrate, im Fall die Beobachtungen ungleiche Zuverlässigkeit haben, vor der Addition erst noch durch die respectiven Gewichte multiplicirt werden müssen) bildet bekanntlich ein absolutes Minimum. Sobald man daher einer der unbekannten Grössen einen Werth beilegt, der von dem sichersten verschieden ist, wird ein ähnliches Aggregat, wie man auch die übrigen unbekannten Grössen bestimmen mag, allezeit grösser ausfallen, als das erwähnte Minimum. Allein die übrigen unbekannten Grössen werden sich nur auf Eine Art so bestimmen lassen, dass die Vergrösserung des Aggregats so klein wie möglich, oder dass das Aggregat selbst ein relatives Minimum werde. Diese von dem Ver-

*) z. B. PLANA's. Siehe Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften Band 6, S. 255.

fasser hier ausgeführte Untersuchung führt zu einigen interessanten Wahrheiten, die über die ganze Lehre noch ein vielseitigeres Licht verbreiten.

Es fügt sich zuweilen, dass man erst, nachdem man schon eine ausgedehnte Rechnung über eine Reihe von Beobachtungen in allen Theilen durchgeführt hat, Kenntniss von einer neuen Beobachtung erhält, die man gern noch mit zugezogen hätte. Es kann in vielen Fällen erwünscht sein, wenn man nicht nöthig hat, deshalb die ganze Eliminationsarbeit von vorne wieder anzufangen, sondern im Stande ist, die durch das Hinzukommen der neuen Beobachtung entstehende Modification in den sichersten Werthen und deren Gewichten zu finden. Der Verfasser hat daher diese Aufgabe hier besonders abgehandelt, eben so wie die verwandte, wo man einer schon angewandten Beobachtung hintennach ein anderes Gewicht, als ihr beigelegt war, zu ertheilen sich veranlasst sieht, und, ohne die Rechnung von vorne zu wiederholen, die Veränderungen der Endresultate zu erhalten wünscht.

Wie der *wahrscheinliche* Fehler einer Beobachtungsgattung (als bisher üblicher Maassstab ihrer Unsicherheit) aus einer hinlänglichen Anzahl wirklicher Beobachtungsfehler näherungsweise zu finden sei, hatte der Verfasser in einer besondern Abhandlung in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften [1816. März u. April] gezeigt: dieses Verfahren, so wie der Gebrauch des wahrscheinlichen Fehlers überhaupt, ist aber von der hypothetischen Form der Grösse der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Fehler abhängig, und musste es sein. Im ersten Theile der gegenwärtigen Abhandlung ist nun zwar gezeigt, wie aus denselben Datis der mittlere Fehler der Beobachtungen (als zweckmässiger Maassstab ihrer Ungenauigkeit) näherungsweise gefunden wird. Allein immer bleibt hiebei die Bedenklichkeit übrig, dass man nach aller Schärfe selten oder fast nie im Besitz der Kenntniss der wahren Grösse von einer Anzahl wirklicher Beobachtungsfehler sein kann. Bei der Ausübung hat man dafür bisher immer die Unterschiede zwischen dem, was die Beobachtungen ergeben haben und den Resultaten der Rechnung nach den durch die Methode der kleinsten Quadrate gefundenen sichersten Werthen der unbekannten Grössen, wovon die Beobachtungen abhangen, zum Grunde gelegt. Allein da man nicht berechtigt ist, die sichersten Werthe für die wahren Werthe selbst zu halten, so überzeugt man sich leicht, dass man durch dieses Verfahren allemal den wahrscheinlichen und mittlern Fehler *zu klein* finden muss, und daher den Beobachtungen und den daraus gezoge-

nen Resultaten eine grössere Genauigkeit beilegt, als sie wirklich besitzen. Freilich hat in dem Falle, wo die Anzahl der Beobachtungen vielemale grösser ist als die der unbekannten Grössen, diese Unrichtigkeit wenig zu bedeuten; allein theils erfordert die Würde der Wissenschaft, dass man vollständig und bestimmt übersehe, wieviel man hierdurch zu fehlen Gefahr läuft, theils sind auch wirklich öfters nach jenem fehlerhaften Verfahren Rechnungsresultate in wichtigen Fällen aufgestellt, wo jene Voraussetzung nicht Statt fand. Der Verfasser hat daher diesen Gegenstand einer besondern Untersuchung unterworfen, die zu einem sehr merkwürdigen höchst einfachen Resultate geführt hat. Man braucht nemlich den nach dem angezeigten fehlerhaften Verfahren gefundenen mittlern Fehler, um ihn in den richtigen zu verwandeln, nur mit

$$\sqrt{\frac{\pi-\rho}{\pi}}$$

zu multipliciren, wo π die Anzahl der Beobachtungen und ρ die Anzahl der unbekannten Grössen bedeutet.

Die letzte Untersuchung betrifft noch die Ausmittelung des Grades von Genauigkeit, welcher dieser Bestimmung des mittlern Fehlers selbst beigelegt werden muss: die Resultate derselben müssen aber in der Abhandlung selbst nachgelesen werden.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1826 September 25.

Am 16. September überreichte der Herr Hofr. GAUSS der königl. Societät eine Vorlesung:

Supplementum Theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae.

Bei allen frühern Arbeiten über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die zweckmässigste Benutzung der Beobachtungen, und namentlich auch in der Behandlung dieses Gegenstandes im fünften Bande der *Commentationes recentiores*, liegt in Beziehung auf die Form der Hauptaufgabe eine bestimmte Voraussetzung zum Grunde, die allerdings den meisten in der Ausübung vorkommenden Fällen angemessen ist. Diese Voraussetzung besteht darin, dass die be-

obachteten Grössen auf eine bekannte Art von gewissen unbekannten Grössen (Elementen) abhängen, d. i. bekannte Functionen dieser Elemente sind. Die Anzahl dieser Elemente muss, damit die Aufgabe überhaupt hierher gehöre, kleiner sein, als die Anzahl der beobachteten Grössen, also diese selbst abhängig von einander.

Inzwischen sind doch auch die Fälle nicht selten, wo die gedachte Voraussetzung nicht unmittelbar Statt findet, d. i. wo die beobachteten Grössen noch nicht in der Form von bekannten Functionen gewisser unbekannter Elemente gegeben sind, und wo man auch nicht sogleich sieht, wie jene sich in eine solche Form bringen lassen; wo hingegen zum Ersatz die gegenseitige Abhängigkeit der beobachteten Grössen (die natürlich auf irgend eine Weise gegeben sein muss) durch gewisse Bedingungsgleichungen gegeben ist, welchen die wahren Werthe von jenen, der Natur der Sache nach, nothwendig genau Genüge leisten müssen. Zwar sieht man bei näherer Betrachtung bald ein, dass dieser Fall von dem andern nicht wesentlich, sondern bloss in der Form verschieden ist, und sich wirklich, der Theorie nach leicht, auf denselben zurückführen lässt: allein häufig bleibt dies doch ein unnatürlicher Umweg, der in der Anwendung viel beschwerlichere Rechnungen herbeiführt, als eine eigne der ursprünglichen Gestalt der Aufgabe besonders angemessene Auflösung. Diese ist daher der Gegenstand der gegenwärtigen Abhandlung, und die Auflösung der Aufgabe, welche sie als ein selbstständiges von der frühern Abhandlung unabhängiges Ganze gibt, hat ihrerseits eine solche Geschmeidigkeit, dass es sogar in manchen Fällen vortheilhaft sein kann, sie selbst da anzuwenden, wo die bei der ältern Methode zum Grunde liegende Voraussetzung schon von selbst erfüllt war.

Die Hauptaufgabe stellt sich hier nun unter folgender Gestalt dar. Wenn von den Grössen v, v', v'' u. s. w., zwischen welchen ein durch eine oder mehrere Bedingungsgleichungen gegebener Zusammenhang Statt findet, eine andere auf irgend eine Art abhängig ist, z. B. durch die Function u ausgedrückt werden kann, so wird eben dieselbe auch auf unendlich viele andere Arten aus jener bestimmt, oder durch unendlich viele andere Functionen, statt u, ausgedrückt werden können, die aber natürlich alle einerlei Resultate geben, in so fern die wahren Werthe von v, v', v'' u. s. w., welche allen Bedingungsgleichungen Genüge leisten, substituirt werden. Hat man aber nur genäherte Werthe von v, v', v'' u. s. w., wie sie Beobachtungen von beschränkter Genauigkeit immer nur liefern können, so

können auch die daraus abgeleiteten Grössen auf keine absolute Richtigkeit Anspruch machen: die verschiedenen für *u* angewandten Functionen werden, allgemein zu reden, ungleiche, aber was die Hauptsache ist, ungleich zuverlässige Resultate geben. Die Aufgabe ist nun, aus der unendlichen Mannigfaltigkeit von Functionen, durch welche die unbekannte Grösse ausgedrückt werden kann, diejenige auszuwählen, bei deren Resultat die möglich kleinste Unzuverlässigkeit zu befürchten bleibt.

Die Abhandlung gibt eigentlich *zwei* Auflösungen dieser Aufgabe. Die erste Auflösung erreicht das Ziel auf dem kürzesten Wege, wenn wirklich nur Eine unbekannte von den Beobachtungen auf eine vorgeschriebene Art abhängige Grösse abzuleiten ist. Allein die nähere Betrachtung dieser Auflösung führt zugleich auf das merkwürdige Theorem, dass man für die unbekannte Grösse genau denselben Werth, welcher aus der zweckmässigsten Combination der Beobachtungen folgt, erhält, wenn man an die Beobachtungen gewisse nach bestimmten Regeln berechnete Veränderungen anbringt, und sie dann in irgend einer beliebigen Function, welche die unbekannte Grösse ausdrückt, substituirt. Diese Veränderungen haben neben der Eigenschaft, dass sie allen Bedingungsgleichungen Genüge leisten, noch die, dass unter allen denkbaren Systemen, welche dasselbe thun, die Summe ihrer Quadrate (in so fern die Beobachtungen als gleich zuverlässig vorausgesetzt wurden) die möglich kleinste ist. Man sieht also, dass hierdurch zugleich eine neue Begründung der Methode der kleinsten Quadrate gewonnen wird, und dass diese von der Function *u* ganz unabhängige *Ausgleichung* der Beobachtungen eine zweite Auflösungsart abgibt, die vor der ersten einen grossen Vorzug hat, wenn mehr als Eine unbekannte Grösse aus den Beobachtungen auf die zweckmässigste Art abzuleiten ist: in der That werden die Beobachtungen dadurch zu *jeder* von ihnen zu machenden Anwendung fertig vorbereitet. Nur musste bei dieser zweiten Auflösung noch eine besondere Anleitung hinzukommen, den Grad der Genauigkeit, der bei jeder einzelnen Anwendung erreicht wird, zu bestimmen. Für dies alles enthält die Abhandlung vollständige und nach Möglichkeit einfache Vorschriften, die natürlich hier keines Auszuges fähig sind. Eben so wenig können wir hier in Beziehung auf die, nach der Entwicklung der Hauptaufgaben, noch ausgeführten anderweitigen Untersuchungen, welche mit dem Gegenstande in innigem Zusammenhange stehen, uns in das Einzelne einlassen. Nur das Eine merkwürdige Theorem führen wir hier an, dass

die Vorschriften zur vollständigen Ausgleichung der Beobachtungen immer einerlei Resultat geben, sie mögen auf die ursprünglichen Beobachtungen selbst, oder auf die bereits einstweilen *unvollständig* ausgeglichenen Beobachtungen angewandt werden, in so fern dieser Begriff in der in der Abhandlung näher bestimmten Bedeutung genommen wird, unter welcher, als specieller Fall, derjenige begriffen ist, wo mit den Beobachtungen schon eine zwar vorschriftsmässig ausgeführte, aber nur einen Theil der Bedingungsgleichungen berücksichtigende Ausgleichung vorgenommen war.

Den letzten Theil der Abhandlung machen ein paar mit Sorgfalt ausgearbeitete Beispiele der Anwendung der Methode aus, die theils von den geodätischen Messungen des Generals von Krayenhoff, theils von der vom Verfasser selbst im Königreich Hannover ausgeführten Triangulirung entlehnt sind, und die dazu dienen können, sowohl die Anwendung dieser Theorie mehr zu erläutern, als auch manche, dergleichen Messungen betreffende, Umstände überhaupt in ein helleres Licht zu stellen.

Die trigonometrischen Messungen gehören ganz besonders in das Feld, wo die Wahrscheinlichkeitsrechnung Anwendung findet, und namentlich in derjenigen Form Anwendung findet, die in der gegenwärtigen Abhandlung entwickelt ist. Gerade hier ist es Regel, dass mehr beobachtet wird, als unumgänglich nöthig ist, und dass so die Messungen einander vielfältig controlliren. Nur durch die Benutzung der strengen Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man von diesem Umstande den Vortheil ganz ziehen, der sich davon ziehen lässt, und den Resultaten die grösste Genauigkeit geben, deren sie fähig sind. Ausserdem aber geben jene Grundsätze zugleich das Mittel, die Genauigkeit der Messungen selbst, und die Zulässigkeit der darauf gegründeten Resultate zu bestimmen. Endlich dienen sie dazu, bei der Anordnung des Dreieckssystems, aus mehreren, unter denen man vielleicht die Wahl hat, das zweckmässigste auszuwählen. Und alles dieses nach festen sichern Regeln, mit Ausschliessung aller Willkürlichkeiten. Allein sowohl die sichere Würdigung, als die vollkommenste Benutzung der Messungen ist nur dann möglich, wenn sie in reiner Autenthicität und Vollständigkeit vorliegen, und es wäre daher sehr zu wünschen, dass alle grösseren auf besondere Genauigkeit Anspruch machenden Messungen dieser Art immer mit aller nöthigen Ausführlichkeit bekannt gemacht werden möchten. Nur zu gewöhnlich ist das Gegentheil, wo nur Endresultate für die einzelnen gemes-

senen Winkel mitgetheilt werden. Wenn solche Endresultate nach richtigen Grundsätzen gebildet werden, indem man durchaus alle einzelnen Beobachtungsreihen, die nicht einen durchaus unstatthaften Fehler gewiss enthalten, dazu concurriren lässt, so ist der Nachtheil freilich lange nicht so gross, als wenn man etwa nur diejenigen Reihen beibehält, die am besten zu den nahe liegenden Prüfungsmitteln passen, welche die Summen der Winkel jedes Dreiecks und die Summen der Horizontalwinkel um jeden Punkt herum darbieten. Wo dies durchaus verwerfliche Verfahren angewandt ist, sei es aus Unbekanntschaft mit den wahren Grundsätzen einer richtigen Theorie, oder aus dem geheimen Wunsche, den Messungen das Ansehen grösserer Genauigkeit zu geben, geht der Maassstab zu einer gerechten Würdigung der Beobachtungen und der aus ihnen abzuleitenden Resultate verloren; die gewöhnliche Prüfung nach den Winkelsummen in den einzelnen Dreiecken, und bei den Punkten, wo die gemessenen Winkel den ganzen Horizont umfassen, scheint dann eine Genauigkeit der Messungen zu beweisen, von der sie vielleicht sehr weit entfernt sind, und wenn andere Prüfungsmittel, durch die Seitenverhältnisse in geschlossenen Polygonen oder durch Diagonalrichtungen, vorhanden sind, werden diese die Gewissheit des Daseins von viel grössern Fehlern verrathen. Umgekehrt aber, wenn die zuletzt erwähnte Voraussetzung Statt findet, und das Ausgleichen der Beobachtungen in Beziehung auf die Prüfungsmittel ohne die sichern Vorschriften der Wahrscheinlichkeitsrechnung versucht ist, wo es immer ein Herumtappen im Dunkeln bleiben muss, und grössere, oft viel grössere, Correctionen herbeiführt, als nöthig sind, kann leicht dadurch ein *zu* ungünstiges Urtheil über die Messungen veranlasst werden. Diese Bemerkungen zeigen die Wichtigkeit sowohl einer hinlänglich ausführlichen Bekanntmachung, als einer auf strenge Principien gegründeten mathematischen Combination der geodätischen Messungen: sie gelten aber offenbar mehr oder weniger bei Beobachtungen jeder Art, astronomischen, physikalischen u. s. w., die sich auf das Quantitative beziehen, insofern die Mannigfaltigkeit der dabei Statt findenden Umstände zu wechselseitigen Controllen Mittel darbietet.

Zeitschrift für Astronomie herausgegeben von B. von Lindenau und J. G. F. Bohnenberger.
Erster Band. Heft für März und April 1816.

Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen.

1.

Bei der Begründung der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers Δ durch die Formel

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} . e^{-hh\Delta\Delta}$$

ausgedrückt wird, wo π den halben Kreisumfang, e die Basis der hyperbolischen Logarithmen, auch h eine Constante bedeutet, die man nach Art. 178 der *Theoria Motus Corporum Coelestium* als das Maass der Genauigkeit der Beobachtungen ansehen kann. Bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Ausmittelung der wahrscheinlichsten Werthe derjenigen Grössen, von welchen die Beobachtungen abhängen, braucht man den Werth der Grösse h gar nicht zu kennen; auch das *Verhältniss* der Genauigkeit der Resultate zu der Genauigkeit der Beobachtungen ist von h unabhängig. Inzwischen ist immer eine Kenntniss dieser Grösse selbst interessant und lehrreich, und ich will daher zeigen, wie man durch die Beobachtungen selbst zu einer solchen Kenntniss gelangen mag.

2.

Ich lasse zuerst einige den Gegenstand erläuternde Bemerkungen vorausgehen. Der Kürze wegen bezeichne ich den Werth des Integrals

$$\int \frac{2e^{-tt}\,dt}{\sqrt{\pi}}$$

von $t=0$ an gerechnet, durch Θt. Einige einzelne Werthe werden von dem Gange dieser Function eine Vorstellung geben. Man hat

$$\begin{aligned}
0{,}5000000 &= \Theta 0{,}4769363 = \Theta \rho \\
0{,}6000000 &= \Theta 0{,}5951161 = \Theta 1{,}247790\rho \\
0{,}7000000 &= \Theta 0{,}7328691 = \Theta 1{,}536618\rho \\
0{,}8000000 &= \Theta 0{,}9061939 = \Theta 1{,}900032\rho \\
0{,}8427008 &= \Theta 1 \qquad\qquad\; = \Theta 2{,}096716\rho \\
0{,}9000000 &= \Theta 1{,}1630872 = \Theta 2{,}438664\rho \\
0{,}9900000 &= \Theta 1{,}8213864 = \Theta 3{,}818930\rho \\
0{,}9990000 &= \Theta 2{,}3276754 = \Theta 4{,}880475\rho \\
0{,}9999000 &= \Theta 2{,}7510654 = \Theta 5{,}768204\rho \\
1 &= \Theta \infty
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Beobachtung zwischen den Grenzen $-\Delta$ und $+\Delta$ liege, oder, ohne Rücksicht auf das Zeichen, nicht grösser als Δ sei, ist

$$= \int \frac{h e^{-hhxx}\,dx}{\sqrt{\pi}}$$

wenn man das Integral von $x=-\Delta$ bis $x=+\Delta$ ausdehnt, oder doppelt so gross, wie dasselbe Integral von $x=0$ bis $x=\Delta$ genommen, mithin

$$= \Theta h\Delta$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler nicht unter $\frac{\rho}{h}$ sei, ist also $=\frac{1}{2}$, oder der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils gleich: wir wollen diese Grösse $\frac{\rho}{h}$ den *wahrscheinlichen Fehler* nennen, und mit r bezeichnen. Hingegen ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler über $2{,}438664r$ hinausgehe, nur $\frac{1}{10}$; die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler über $3{,}818930r$ steige, nur $\frac{1}{100}$ u. s. w.

3.

Wir wollen nun annehmen, dass bei m wirklich angestellten Beobachtungen die Fehler α, β, γ, δ u. s. w. begangen sind, und untersuchen, was sich daraus in Beziehung auf den Werh von h und r schliessen lasse. Macht man zwei

Voraussetzungen, indem man den wahren Werth von h entweder $= H$ oder $= H'$ setzt, so verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten, mit welchen sich in denselben die Fehler $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. s. w. erwarten liessen, resp. wie

$$He^{-HH\alpha\alpha} . He^{-HH\beta\beta} . He^{-HH\gamma\gamma} . \text{ u. s. w.}$$
$$\text{zu } H'e^{-H'H'\alpha\alpha} . H'e^{-H'H'\beta\beta} . H'e^{-H'H'\gamma\gamma} . \text{ u. s. w.}$$

d. i. wie

$$H^m e^{-HH(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\text{ u. s. w.})} \quad \text{zu} \quad H'^m e^{-H'H'(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\text{ u. s. w.})}$$

In demselben Verhältnisse stehen folglich die Wahrscheinlichkeiten, dass H oder H' der wahre Werth von h war, *nach* dem Erfolge jener Fehler (*T. M. C. C.* Art. 176): oder die Wahrscheinlichkeit jedes Werthes von h ist der Grösse

$$h^m e^{-hh(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\text{ u. s. w.})}$$

proportional. Der *wahrscheinlichste* Werth von h ist folglich derjenige, für welchen diese Grösse ein Maximum wird, welchen man nach bekannten Regeln

$$= \sqrt{\frac{m}{2(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\text{ u. s. w.})}}$$

findet. Der wahrscheinlichste Werth von r wird folglich

$$= \rho\sqrt{\frac{2(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\text{ u. s. w.})}{m}}$$
$$= 0{,}6744897\sqrt{\frac{\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\text{ u. s. w.}}{m}}$$

Dies Resultat ist allgemein, m mag gross oder klein sein.

4.

Man begreift leicht, dass man von dieser Bestimmung von h und r desto weniger berechtigt ist, viele Genauigkeit zu erwarten, je kleiner m ist. Entwickeln wir daher den Grad von Genauigkeit, welchen man dieser Bestimmung beizulegen hat, für den Fall, wo m eine grosse Zahl ist. Wir bezeichnen den gefundenen wahrscheinlichen Werth von h

$$\sqrt{\frac{m}{2(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\text{ u. s. w.})}}$$

Kürze halber mit H, und bemerken, dass die Wahrscheinlichkeit, H sei der

wahre Werth von h, zu der Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth $= H+\lambda$ sei, sich verhält, wie

$$H^m e^{-\frac{m}{2}} : (H+\lambda)^m e^{-\frac{m(H+\lambda)^2}{2HH}}$$

oder wie

$$1 : e^{-\frac{\lambda\lambda m}{HH}(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{\lambda}{H}+\frac{3}{4}\frac{\lambda\lambda}{HH}-\frac{4}{5}\cdot\frac{\lambda^3}{H^3}\ldots\ldots)}$$

Das zweite Glied wird gegen das erste nur dann noch merklich sein, wenn $\frac{\lambda}{H}$ ein kleiner Bruch ist, daher wir uns erlauben dürfen, anstatt des angegebenen Verhältnisses dieses zu gebrauchen

$$1 : e^{-\frac{\lambda\lambda m}{HH}}$$

Dies heisst nun eigentlich so viel: die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth von h zwischen $H+\lambda$ und $H+\lambda+d\lambda$ liege, ist sehr nahe

$$= Ke^{-\frac{\lambda\lambda m}{HH}}d\lambda$$

wo K eine Constante ist, die so bestimmt werden muss, dass das Integral

$$\int Ke^{-\frac{\lambda\lambda m}{HH}}d\lambda$$

zwischen den zulässigen Grenzen von λ genommen, $= 1$ werde. Statt solcher Grenzen ist es hier, wo wegen der Grösse von m offenbar

$$e^{-\frac{\lambda\lambda m}{HH}}$$

unmerklich wird, sobald $\frac{\lambda}{H}$ aufhört ein kleiner Bruch zu sein, erlaubt, die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ zu nehmen, wodurch

$$K = \frac{1}{H}\sqrt{\frac{m}{\pi}}$$

wird. Mithin ist die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth von h zwischen $H-\lambda$ und $H+\lambda$ liege,

$$= \Theta(\tfrac{\lambda}{H}\sqrt{m})$$

also jene Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}$, wenn

$$\tfrac{\lambda}{H}\sqrt{m} = \rho \text{ ist.}$$

Es ist also eins gegen eins zu wetten, dass der wahre Werth von h

$$\text{zwischen}\quad H(1-\tfrac{\rho}{\sqrt{m}})\quad\text{und}\quad H(1+\tfrac{\rho}{\sqrt{m}})$$

liegt, oder dass der wahre Werth von r

$$\text{zwischen}\quad \frac{R}{1-\frac{\rho}{\sqrt{m}}}\quad\text{und}\quad \frac{R}{1+\frac{\rho}{\sqrt{m}}}$$

falle, wenn wir durch R den im vorhergehenden Art. gefundenen wahrscheinlichsten Werth von r bezeichnen. Man kann diese Grenzen die *wahrscheinlichen Grenzen der wahren Werthe von h und r* nennen; offenbar dürfen wir für die wahrscheinlichen Grenzen des wahren Werthes von r hier auch setzen

$$R(1-\tfrac{\rho}{\sqrt{m}})\quad\text{und}\quad R(1+\tfrac{\rho}{\sqrt{m}})$$

5.

Wir sind bei der vorhergehenden Untersuchung von dem Gesichtspunkte ausgegangen, dass wir α, $\mathfrak{b}$, γ, δ u.s.w. als bestimmte und gegebene Grössen betrachteten, und die Grösse der Wahrscheinlichkeit suchten, dass der wahre Werth von h oder r zwischen gewissen Grenzen liege. Man kann die Sache auch von einer andern Seite betrachten, und unter der Voraussetzung, dass die Beobachtungsfehler irgend einem bestimmten Wahrscheinlichkeitsgesetze unterworfen sind, die Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit welcher erwartet werden kann, dass die Summe der Quadrate von m Beobachtungsfehlern zwischen gewisse Grenzen falle. Diese Aufgabe, unter der Bedingung, dass m eine grosse Zahl sei, ist bereits von Laplace aufgelöset, eben so wie diejenige, wo die Wahrscheinlichkeit gesucht wird, dass die Summe von m Beobachtungsfehlern selbst zwischen gewisse Grenzen falle. Man kann leicht diese Untersuchung noch mehr generalisiren; ich begnüge mich, hier das Resultat anzuzeigen.

Es bezeichne φx die Wahrscheinlichkeit des Beobachtungsfehlers x, so dass $\int\varphi x.\mathrm{d}x = 1$ wird, wenn man das Integral von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ ausdehnt. Zwischen denselben Grenzen wollen wir allgemein den Werth des Integrals

$$\int\varphi x\,.\,x^n\,\mathrm{d}x$$

durch K^n bezeichnen*). Es sei ferner S^n die Summe

$$\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n + \text{u. s. w.}$$

wo α, β, γ, δ u. s. w. unbestimmt m Beobachtungsfehler bedeuten; die Theile jener Summe sollen, auch für ein ungerades n, alle positiv genommen werden.

Sodann ist mK^n der wahrscheinlichste Werth von S^n und die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth von S^n zwischen die Grenzen $mK^n - \lambda$ und $mK^n + \lambda$ falle,

$$= \Theta \frac{\lambda}{\sqrt{[2m(K^{2n} - K^n K^n)]}}$$

Folglich sind die wahrscheinlichen Grenzen von S^n

$$mK^n - \rho\sqrt{[2m(K^{2n} - K^n K^n)]} \quad \text{und} \quad mK^n + \rho\sqrt{[2m(K^{2n} - K^n K^n)]}$$

Dieses Resultat gilt allgemein für jedes Gesetz der Beobachtungsfehler. Wenden wir es auf den Fall an, wo

$$\varphi x = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hhxx}$$

gesetzt wird, so finden wir

$$K^n = \frac{\Pi \frac{1}{2}(n-1)}{h^n \sqrt{\pi}}$$

die Charakteristik Π in der Bedeutung der *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* (Comm. nov. soc. Gotting. T. II.) genommen (M. 5. Art. 28. der angef. Abh.) Also

$$K = 1, \quad K' = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \quad K'' = \frac{1}{2hh}, \quad K''' = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}$$

$$K^{IV} = \frac{1.3}{4h^4}, \quad K^{V} = \frac{1.2}{h^5\sqrt{\pi}}, \quad K^{VI} = \frac{1.3.5}{8h^6}, \quad K^{VII} = \frac{1.2.3}{h^7\sqrt{\pi}} \text{ u. s. w.}$$

Es ist folglich der wahrscheinlichste Werth von S^n

$$\frac{m\Pi \frac{1}{2}(n-1)}{h^n \sqrt{\pi}}$$

und die wahrscheinlichen Grenzen des wahren Werthes von S^n

*) Oder vielmehr, das Integral $\int \varphi x . x^n dx$ zwischen den Grenzen $x = 0$ bis $x = \infty$ soll durch

$$\tfrac{1}{2} K^n$$

bezeichnet werden. [Handschriftliche Bemerkung]

$$\frac{m\,\Pi\tfrac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}}\Big\{1-\rho\sqrt{\Big(\frac{2}{m}\cdot\Big(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\Big)\Big)}\Big\}$$

und

$$\frac{m\,\Pi\tfrac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}}\Big\{1+\rho\sqrt{\Big(\frac{2}{m}\cdot\Big(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\Big)\Big)}\Big\}$$

Setzt man also, wie oben,

$$\frac{\rho}{h}=r$$

so dass r den wahrscheinlichen Beobachtungsfehler vorstellt, so ist der wahrscheinlichste Werth von

$$\rho\sqrt[n]{\frac{S^n\sqrt{\pi}}{m\,\Pi\frac{1}{2}(n-1)}}$$

offenbar $=r$; und die wahrscheinlichen Grenzen des Werthes jener Grösse

$$r\Big\{1-\frac{\rho}{n}\sqrt{\Big(\frac{2}{m}\cdot\Big(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\Big)\Big)}\Big\}$$

und

$$r\Big\{1+\frac{\rho}{n}\sqrt{\Big(\frac{2}{m}\cdot\Big(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\Big)\Big)}\Big\}$$

Es ist also auch eins gegen eins zu wetten, dass r zwischen den Grenzen

$$\rho\sqrt[n]{\frac{S^n\sqrt{\pi}}{m\,\Pi\frac{1}{2}(n-1)}}\Big\{1-\frac{\rho}{n}\sqrt{\Big(\frac{2}{m}\cdot\Big(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\Big)\Big)}\Big\}$$

und

$$\rho\sqrt[n]{\frac{S^n\sqrt{\pi}}{m\,\Pi\frac{1}{2}(n-1)}}\Big\{1+\frac{\rho}{n}\sqrt{\Big(\frac{2}{m}\cdot\Big(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2})\cdot\sqrt{\pi}}{(\Pi\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\Big)\Big)}\Big\}$$

liege. Für $n=2$ sind diese Grenzen

$$\rho\sqrt{\frac{2S''}{m}}\Big\{1-\frac{\rho}{\sqrt{m}}\Big\}\quad\text{und}\quad\rho\sqrt{\frac{2S''}{m}}\Big\{1+\frac{\rho}{\sqrt{m}}\Big\}$$

ganz mit den oben (Art. 4) gefundenen übereinstimmend. Allgemein hat man für ein gerades n die Grenzen

$$\rho\sqrt{2}\cdot\sqrt[n]{\frac{S^n}{m.1.3.5.7\ldots.(n-1)}}\Big\{1-\frac{\rho}{n}\sqrt{\Big(\frac{2}{m}\cdot\Big(\frac{(n+1).(n+3)\ldots(2n-1)}{1.3.5\ldots(n-1)}-1\Big)\Big)}\Big\}$$

und

$$\rho\sqrt{2}\cdot\sqrt[n]{\frac{S^n}{m.1.3.5.7\ldots.(n-1)}}\Big\{1+\frac{\rho}{n}\sqrt{\Big(\frac{2}{m}\cdot\Big(\frac{(n+1).(n+3)\ldots(2n-1)}{1.3.5\ldots(n-1)}-1\Big)\Big)}\Big\}$$

und für ein ungerades n folgende

$$\rho\sqrt[n]{\frac{S^n\sqrt{\pi}}{m.1.2.3\ldots\frac{1}{2}(n-1)}}\Big\{1-\frac{\rho}{n}\sqrt{\Big(\frac{1}{m}\cdot\Big(\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)\pi}{(2.4.6\ldots(n-1))^2}-2\Big)\Big)}\Big\}$$

und

$$\rho\sqrt[n]{\frac{S^n\sqrt{\pi}}{m.1.2.3\ldots\frac{1}{2}(n-1)}}\Big\{1+\frac{\rho}{n}\sqrt{\Big(\frac{1}{m}\cdot\Big(\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)\pi}{(2.4.6\ldots(n-1))^2}-2\Big)\Big)}\Big\}$$

6.

Ich füge noch die numerischen Werthe für die einfachsten Fälle bei:

Wahrscheinliche Grenzen von r

$$\text{I.}\quad 0{,}8453473\,\frac{S'}{m}\cdot\left(1\mp\frac{0{,}5095841}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{II.}\quad 0{,}6744897\,\sqrt[2]{\frac{S''}{m}}\cdot\left(1\mp\frac{0{,}4769363}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{III.}\quad 0{,}5771897\,\sqrt[3]{\frac{S'''}{m}}\cdot\left(1\mp\frac{0{,}4971987}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{IV.}\quad 0{,}5125017\,\sqrt[4]{\frac{S''''}{m}}\cdot\left(1\mp\frac{0{,}5507186}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{V.}\quad 0{,}4655532\,\sqrt[5]{\frac{S^{v}}{m}}\cdot\left(1\mp\frac{0{,}6355080}{\sqrt{m}}\right)$$

$$\text{VI.}\quad 0{,}4294972\,\sqrt[6]{\frac{S^{vi}}{m}}\cdot\left(1\mp\frac{0{,}7557764}{\sqrt{m}}\right)$$

Man sieht also auch hieraus, dass die Bestimmungsart II von allen die vortheilhafteste ist. Hundert Beobachtungsfehler, nach dieser Formel behandelt, geben nemlich ein eben so zuverlässiges Resultat, wie

114 nach I, 109 nach III, 133 nach IV, 178 nach V, 251 nach VI.

Inzwischen hat die Formel I den Vorzug der allerbequemsten Rechnung, und man mag sich daher derselben, da sie doch nicht viel weniger genau ist als II, immerhin bedienen, wenn man nicht die Summe der Quadrate der Fehler sonst schon kennt, oder zu kennen wünscht.

7.

Noch bequemer, obwohl beträchtlich weniger genau ist folgendes Verfahren: Man ordne die sämmtlichen m Beobachtungsfehler (absolut genommen) nach ihrer Grösse, und nenne den mittelsten, wenn ihre Zahl ungerade ist, oder das arithmetische Mittel der zwei mittelsten bei gerader Anzahl, M. Es lässt sich zeigen, was aber an diesem Orte nicht weiter ausgeführt werden kann, dass bei einer grossen Anzahl von Beobachtungen r der wahrscheinlichste Werth von M ist, und dass die wahrscheinlichen Grenzen von M

$$r\left(1-e^{\rho\rho}\sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right) \quad \text{und} \quad r\left(1+e^{\rho\rho}\sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right)$$

sind, oder die wahrscheinlichen Grenzen des Werthes von r

$$M\left(1 - e^{\rho\rho}\sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right) \quad \text{und} \quad M\left(1 + e^{\rho\rho}\sqrt{\frac{\pi}{8m}}\right), \quad \text{oder in Zahlen} \quad M\left(1 \mp \frac{0,7520971}{\sqrt{m}}\right)$$

Dies Verfahren ist also nur wenig genauer, als die Anwendung der Formel VI, und man müsste 249 Beobachtungsfehler zu Rathe ziehen, um eben so weit zu reichen, wie mit 100 Beobachtungsfehlern nach Formel II.

8.

Die Anwendung einiger von diesen Methoden auf die in Bode's astronomischem Jahrbuche für 1818 S. 234 vorkommenden Fehler bei 48 Beobachtungen der geraden Aufsteigungen des Polarsterns von Bessel gab

$$S' = 60''46, \quad S'' = 110''600, \quad S''' = 250''341118$$

Hieraus folgten die wahrscheinlichsten Werthe von r

nach Formel I	. . . . 1″065,	wahrscheinl. Unsicherheit =	± 0″078
II	 1,024		± 0,070
III	 1,001		± 0,072
nach Art. 7	 1,045		± 0,113

eine Uebereinstimmung, wie sie kaum zu erwarten war. Bessel giebt selbst 1″067, und scheint daher der Formel I gemäss gerechnet zu haben.

NACHLASS.

[ANWENDUNG DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG AUF DIE BESTIMMUNG DER BILANZ FÜR WITWENKASSEN.]

[I.]

[*Allgemeine Uebersicht der Methode.*]

[*Auszug aus einem Votum bei der schriftlichen Abstimmung im Universitäts-Senat.*]

Das vorstehende [hier eingeklammerte] Votum des Herrn Prof. D.: [Das Königl. Univ. Curatorium scheint zu befürchten, dass bei der grossen Anzahl der jetzt vorhandenen Witwen die Kasse über lang oder kurz nicht im Stande sein werde, die jetzt auf 250 Thl. angewachsenen Pensionen zu bestreiten. Es verlangt daher einen Bericht darüber, ob gegründete Ursache zu einer solchen Besorgniss vorhanden sei, und durch welche Mittel die etwa drohende Gefahr abgewendet werden könne. ...] spricht den eigentlichen *Fragepunkt* so treffend aus, dass ich der ersten Hälfte dieses Votum nur wörtlich beitreten kann. Wenn in Zweifel gezogen ist, ob die Kasse im Stande sein werde, der ihr obliegenden Verpflichtung nachhaltig zu genügen, so ist dies doch wahrlich der ungeeignetste Zeitpunkt, *grössere* Anforderungen an die Kasse zu stellen.

Ich kann mich der öffentlichen Meinung über diese Anstalt noch bis 10 Jahr rückwärts erinnern. Damals schon galt sie für ein herrliches Kleinod der Universität, einzig in seiner Art, und zwar gerade wegen ihrer Eigenthümlichkeiten. *Vollkommene* Freiheit, ob man beitreten wolle oder nicht, ja, mit einer vergleichungsweise geringen Aufopferung, wieder einzutreten, wenn man ausgetreten war; ein sehr geringer Beitrag. Und damals betrug die Pension nur 150 oder 160 Thl. Nicht die Grösse der Pension war das Anziehende, sondern die *liberale Art*, *wie* dem, der Göttingischer Professor werden konnte, eine sichere Unterstützung einer nachbleibenden Witwe, mit der Aussicht, unter der weisen Verwaltung sie nach und nach noch erhöhet zu erhalten, dargeboten wurde. Wer mehr wünschte, betheiligte sich noch nebenbei in einer andern Witwenkasse. Jetzt ist nun die Pension auf 250 Thl. gestiegen, und die liberale Art ist bis heute dieselbe geblieben. Gebe Gott, dass niemals nöthig werde, an dieser Art *irgend etwas* zu ändern! Zwangsprocente auf das Gehalt, um durch Drehung am Stundenzeiger das zu erhalten, was nur der allmählige Fortschritt des Minutenzeigers gewähren kann, würde nicht blos viel zu unwirksam sein um den Zweck zu erreichen, sondern den noblen Charakter der Anstalt ganz zerstören.

Ich bin demnach der Meinung, die sämmtlichen Veränderungsvorschläge des Herrn Universitätsraths O. für den Augenblick ganz auf sich beruhen zu lassen; es ist in dem uns zu lebhaften Danke verpflichtenden P. M. gezeigt, dass eine nahe Gefahr nicht vorhanden ist. Ja selbst wenn in den nächsten Jahren durch noch neu hinzukommende Witwen anstatt des letzten noch immer erfreulichen Ueberschusses einiges Deficit eintreten sollte, so darf man nicht vergessen, dass ja die gesammelten Ueberschüsse zum Theil die Bestimmung haben, solche durch vorübergehende Conjuncturen entstandenen Fluctuationen zu decken.

Aber eine *gründliche* Untersuchung halte ich, in Uebereinstimmung mit dem Rescript und mit den von Sr. Magnificenz geäusserten Ansichten, allerdings für nothwendig. Selbst bei der heitersten Ansicht, die man von dem Zustande der Gesellschaft haben mag, wird eine solche jedenfalls wenigstens späterhin nothwendig werden müssen, schon aus folgendem Grunde.

Wenn ich, *ehe* eine gründliche auf strengen Calcül gegründete Untersuchung statt gefunden hat, meine *Meinung* aussprechen darf, so glaube ich, dass die jetzige grosse Anzahl der Witwen als anomal betrachtet werden muss. Es ist wahr, dass die Anzahl der theilnehmenden Professoren mit der Anzahl der Witwen in einem gewissen Verhältnisse stehen muss; und dass jetzt die erstere Zahl viel grösser ist als ehedem. Allein der *jetzige* hohe Bestand der Witwen steht damit in gar keinem Zusammenhange. Bleibt die Anzahl der theilnehmenden Professoren fortan immer so gross, so ist dies *ein sehr ernsthaft zu erwägender Punkt*, aber nicht für jetzt, sondern wegen der fernen Zukunft; erst nach 20 oder 30 und mehreren Jahren können die Folgen *davon* sehr sichtbar werden.

Dies vorausgesetzt, ist mit Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass, vielleicht schon nach wenigen Jahren, die Anzahl der Witwen wieder abnehmen, vielleicht bedeutend abnehmen, und also der Bestand der Ueberschüsse von 8149 Thl. wieder anwachsen, vielleicht bedeutend anwachsen wird. *Ob aber die Anzahl der Witwen z. B. binnen 10 Jahren bis auf oder unter 15 abnehmen wird, ist viel ungewisser.* Gesetzt nun die Ueberschüsse wären auf 18000 Thl. oder höher angewachsen, die Anzahl der Witwen aber bliebe hartnäckig auf 16 stehen, was soll dann geschehen? Von der einen Seite will man die Ueberschüsse nicht ins Unendliche anwachsen lassen, von der andern steht das *Statut* einer Vergrösserung der Pension entgegen. Dann *muss* ja eine gründliche Prüfung angestellt werden, ob und *in welchem Maasse* man das *Statut verändern* darf, ohne die Gesellschaft zu gefährden.

Dem Vertrauen womit Se. Magnificenz und einige der Herren Collegen mich beehren, indem sie wünschen, dass ich eine solche Prüfung auf mich nehme, durch welche nemlich eine auf Mortalitätsgesetze und die Wahrscheinlichkeitsrechnung basirte Bilanz zwischen dem Vermögen der Anstalt und ihren Obliegenheiten gezogen werden soll, will ich mich nicht entziehen, muss jedoch folgendes bevorworten.

Erstlich haben von der Langwierigkeit solcher Rechnungen diejenigen Herren eine sehr falsche Vorstellung, welche glauben, dass sie binnen vier Wochen vollendet werden können. Zu einer bestimmten Frist kann ich mich also um so weniger anheischig machen, je kleiner der Theil meiner Zeit sein wird, den ich darauf werde verwenden können.

Zweitens lassen sich die Rechnungen mit Gründlichkeit gar nicht führen, ohne die nöthigen *Data*, wovon zur Zeit *gar Nichts* vorliegt. Worin die erforderlichen Data bestehen, werde ich weiterhin angeben; ohne sie kann ich mich auf gar nichts einlassen; ob, auf welche Weise und wie bald sie aber zusammen zu bringen sind, muss ich ganz der Kirchen-Deputation überlassen.

Drittens, die eigenthümliche Einrichtung unsrer Witwenkasse enthält mehrere Elemente die von dem Mortalitätsgesetze unabhängig sind, und sich einem Calcül nicht unterwerfen lassen. Wegen dieses Umstandes wird das Endresultat nothwendig mit einiger Unvollkommenheit behaftet bleiben; ich hoffe jedoch, dass sich Surrogate finden lassen, durch deren Benutzung diese Unvollkommenheit unerheblich sein wird.

Ich will nun suchen, in der Kürze anzudeuten, worauf es bei dieser Arbeit ankommt.

Die Verpflichtungen der W. K. zerfallen in drei Hauptrubriken.

I. Verpflichtungen gegen die jetzt vorhandenen Witwen, eventuell deren Kinder,

II. Verpflichtungen gegen diejenigen Professoren, welche jetzt Theilnehmer der W. K. Gesellschaft sind.

III. Verpflichtungen gegen die künftig beitretenden Professoren.

Ad I. Die Verpflichtung gegen jede einzelne Witwe, ohne minorenne Kinder, hat genau den Werth einer Leibrente für dieselbe und lässt sich daher, wenn man ihr jetziges Alter kennt, (und für Mortalitätstabelle und Zinsfuss eine bestimmte Wahl trifft) genau berechnen. Dass in jedem einzelnen Fall ein Entrepreneur, der für diesen Preis die Verpflichtung auf sich nähme, eine Art Glücksspiel spielt, versteht sich von selbst (und werde ich daher im Folgenden, wo immer wieder dieselbe Erinnerung gemacht werden müsste, dies unterlassen, da dies jedem von einiger mathematischer Bildung bekannt ist), aber der Entrepreneur, der mit einer *sehr grossen Zahl* von Personen denselben Contract schlösse, würde, wenn richtig gerechnet ist, mit moralischer Gewissheit nur ein in Proportion zum Ganzen unerhebliches Schwanken zu erwarten haben.

Wo Kinder vorhanden sind, erleidet die Rechnung eine Modification, behält aber dieselbe Gültigkeit wie im vorigen Falle. Natürlich muss aber das Alter der Kinder auch bekannt sein.

Endlich würde streng genommen bei unsrer Witwenkasse, welche sich wiederverheirathende Witwen ausschliesst, noch eine Modification nöthig sein, die scheinbar*) zum Vortheil der Witwenkasse ist, aber sich natürlich nicht im Voraus berechnen lässt, jedenfalls praktisch $= 0$ zu setzen ist.

Es lässt sich demnach auch der Gesammtbetrag von I. zu Gelde anschlagen, und einen dem Betrage gleichen Theil des Capital-Vermögens der Kasse muss man als dadurch absorbirt betrachten.

Ad II. Auf ähnliche Weise würde sich auch die Verpflichtung gegen jeden einzelnen Professor, der jetzt verheirathetes Mitglied der Gesellschaft ist, nach Gelde anschlagen, wenn es in unserer Gesellschaft ganz ebenso wäre, wie in denjenigen freiwilligen Gesellschaften, wo der jährliche Beitrag oder das Eintrittsgeld nach dem Alter des eintretenden Ehepaars regulirt wird. Das Unterscheidende einer solchen Gesellschaft von der Unsrigen besteht aber in folgendem.

A. In jener erlischt der Contract, wenn die Frau vor dem Manne stirbt; soll er bei einer Wiederverheirathung erneuert werden, so ist es ein ganz neuer nach dem Alter der zweiten Frau zu regulirender Contract. Bei uns sind auch unverheirathete Mitglieder, die eine Braut in beliebigem Alter wählen können, ebenso Witwer, die möglicher Weise sich wieder verheirathen können. Dies alles kann aber jetzt einer Vorausberechnung gar nicht unterworfen werden. Ich würde aber glauben, dass wenn man diejenigen Mitglieder, die jetzt verheirathet sind, nach ihrem und nach dem Alter ihrer jetzigen Frauen einem Calcül unterzöge, und dann für die übrigen jetzt nicht verheiratheten den Mittelwerth jener ersteren Resultate zum Grunde legte, es sich so ziemlich compensiren würde. Möglicherweise werden von einigen jetzt verheiratheten Mitgliedern nicht ihre jetzigen Frauen sondern zweite oder dritte dereinst die Witwenpension geniessen, dagegen wird aber ohne Zweifel ein Theil der jetzt nicht verheiratheten in diesem Stande bleiben. Ich sehe wenigstens nicht ab, was man hier mehr thun könne, als die zweierlei Eventualitäten, die einen zum Nachtheil, die andern zum Vortheil der Kasse gereichend, sich gegenseitig aufheben zu lassen.

B. Ausserdem findet aber auch noch der Unterschied statt, dass Kinder, vielleicht jetzt noch gar nicht geboren, demnächst möglicherweise, an den Vortheilen Theil nehmen. Auch das lässt sich daher so nicht veranschlagen; ich glaube jedoch, dass für diese Unvollkommenheit sich ein völlig ausreichendes Surrogat finden lässt, welches ich aber um nicht gar zu weitläufig zu werden, hier nicht näher entwickeln will.

---

*) Es gehört nicht hierher, zu rechtfertigen, warum ich diese Einrichtung nur für *scheinbar* vortheilhaft halte, ich bin aber gern bereit, jedem der sich dafür interessirt, die Gründe anzuzeigen.

Es erhellet hieraus, dass auch die Verbindlichkeit II. sich mit ziemlicher Zuverlässigkeit wird zu Gelde anschlagen lassen, und dass um diese Rechnungen für I. und II. zu führen, herbeigeschafft werden müssen die Bestimmungen von Geburtsjahr und Tag, für

die einzelnen jetzt lebenden Witwen,
für deren Kinder unter 20 Jahren, wo solche vorhanden sind, wie bei der Frau Hofr. M., der Frau G. J. R. M. und der Frau Prof. H.
für die jetzt verheiratheten Mitglieder,
für deren Ehefrauen.

Ad III. Am bedenklichsten muss aber das Unterfangen erscheinen, den jetzigen Geldwerth der Verbindlichkeit der Kasse gegen die künftigen Theilnehmer *in saecula saeculorum* in Zahlen auszudrücken, versteht sich, nach den jetzigen Statuten, und nach der jetzigen Grösse der Pensionen und Beiträge. Und doch ist es *nothwendig*, dass man in den Stand gesetzt werde, sich hiervon einen wenigstens angenäherten Begriff zu machen, denn es handelt sich ja gerade davon, *dass die Stabilität*, nicht von einer demnächst nach Umständen in ihren Einrichtungen abzuändernden Witwenkasse, sondern *von unserer Witwenkasse nach ihren jetzigen Einrichtungen begutachtet werden soll.* Man wird hierbei natürlich nicht vergessen, dass die Rechnung von gewissen Elementen abhängig bleibt, die theils schon jetzt nur näherungsweise abzuschätzen sind, theils im Laufe der Zeit sehr bedeutende Abänderungen erleiden können. Von solchen Elementen nenne ich zwei, die Höhe des Zinsfusses und die Anzahl der durchschnittlich jährlich hinzutretenden neuen Mitglieder.

Die Höhe des Zinsfusses steht bei einer Anstalt, die nur zu einem sehr kleinen Theile auf fortgehende Beiträge, der Hauptsache nach auf Capitalrente basirt ist und bleiben soll, offenbar mit der Grösse des erforderlichen Capitals in genauem (verkehrtem) Verhältnisse dergestalt, dass wenn z. B. in einem Zeitpunkte die Schenkung eines Capitals von 70000 Thl. gerade zureichten, eine durchschnittlich immer jährlich gleich viel neue Mitglieder annehmende Gesellschaft zu sustentiren bei einem Zinsfuss von 4 p.c., das Herabsinken des Zinsfusses auf $3\frac{1}{2}$ p.c. die Erhöhung des Capitals auf 80000 Thl. erfordern würde. Ich halte diesen Umstand in Beziehung *auf die Schwierigkeit der Begutachtung*, gerade für den unerheblichsten. Die Begutachtung kann mehr nicht thun, als die Grösse des Einflusses in ein klares Licht zu stellen, woraus sich die Folge von selbst ergibt, dass nothwendig schon dafür gesorgt werden muss, dass das Capital durchschnittlich jährlich eine angemessene Erhöhung erhalte, um dem im Laufe der Zeit allmählig aber unfehlbar eintretenden Sinken des Zinsfusses zu begegnen.

Ebenso einleuchtend ist es, dass die Grösse des erforderlichen Capitals genau der Anzahl der durchschnittlich jährlich beitretenden neuen Mitglieder (*ceteris paribus*) proportional sein wird. Wir können zunächst nur unsre eignen Erfahrungen zum Grunde legen, die seit 100 Jahren vorliegen, und wo natürlich die neuern und neuesten Zeiten unser Urtheil vorzugsweise leiten müssen. Se. Magnificenz bemerkt mit Recht, dass die aus den gesteigerten wissenschaftlichen Bedürfnissen und Anforderungen hervorgegangene Vergrösserung der Zahl der Professoren einen wesentlichen Einfluss auf das Bestehen solcher Professorenwitwenkassen haben muss, die hauptsächlich auf Capital fundirt sind. Es ist also sehr wohl möglich, dass die Göttingischen Ergebnisse z. B. seit den letzten 30 oder 40 Jahren keinen ganz richtigen Maassstab für die Zukunft, zumal für die Zukunft späterer Jahrhunderte bilden können; aber diese Ungewissheit liegt in der Natur der Veränderlichkeit aller menschlichen Dinge, die Folgen davon treten *allmählig* hervor, und man begegnet ihnen nur durch eine niemals einschlummernde Vigilanz. In unserm Falle also macht man seine Rechnung für das zur nachhaltigen Erfüllung der Verbindlichkeit III. erforderliche Capital nach unsern besten jetzigen Kenntnissen, vergisst nicht, dass eben wegen jener Ungewissheit ein etwas grösseres Capital vorhanden sein müsse, *wiederholt* die Rechnung fortwährend in bestimmten nicht gar zu grossen

Fristen z. B. aller 5 oder 10 Jahre, indem man immer die neu hinzugekommenen Erfahrungen mit benutzt, und sieht nur dann den Ueberschuss als theilweis disponibel an, wenn er sich wirklich *vergrössert* hat.

Aber auch abgesehen von diesen beiden Umständen, oder mit andern Worten, auch wenn man einen bestimmten Zinsfuss und eine bestimmte Zahl alljährlich im Durchschnitt beitretender neuer Mitglieder zum Grunde legt, scheint doch die Schwierigkeit der Abschätzung fast unüberwindlich, da die verschiedensten Verhältnisse vom Alter der Ehegatten eintreten, der Wiederverheirathung verwitwet gewordener nicht einmal zu gedenken. In jener Beziehung scheint also der Begutachter nur ungefähr auf Einer Linie zu stehen mit demjenigen, der den Plan von einer der vielen Witwenkassen hätte im Voraus prüfen sollen, die ohne strenge Berücksichtigung des Lebensalters der eintretenden Ehepaare errichtet, fast alle zu Grunde gegangen sind. (Wenn Herr Universitätsrath K. glaubt, dass es auch bei allen diesen Kassen an *Calcül* nicht gefehlt haben werde, so hat er ohne Zweifel Recht; wenn er aber daraus auf die Bodenlosigkeit der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* schliessen will, so hat er Unrecht. Allerdings gibt es viele Wörter, mit denen verschiedene Personen verschiedene Bedeutungen verbinden, imgleichen solche, die wissenschaftlich eine sehr bestimmte Bedeutung haben, unter denen man aber im gemeinen Leben oft sehr disparate Dinge zusammenwirft. So ist es mit dem Ausdruck Wahrscheinlichkeitsrechnung bewandt. Im strengen Sinne verstanden kann von Anwendung derselben in allen den Fällen gar nicht die Rede sein, wo die nöthigen Grundlagen fehlen. Bei allen den gescheiterten Witwenkassen ist bei der Anordnung der Einrichtung von der strengen Wahrscheinlichkeitsrechnung *gar kein* Gebrauch gemacht, sondern nur von vagen Aperçûs. Dies spreche ich hier nur als Thatsache aus, aber nicht als Vorwurf, da in der That eine Basirung auf Wahrscheinlichkeitsrechnung schon darum unmöglich war, weil alle nothwendigen Bedingungen dazu fehlten). Allein in dem vorliegenden Fall ist es zwar unmöglich, ein Endresultat nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus den einzelnen Elementen zu ermitteln, eben weil diese Elemente fehlen, wohl aber bietet die hundertjährige Erfahrung bei der Kasse selbst, wenn sie auf die rechte Art ausgebeutet wird, einen reichen Schatz zur Grundlage dar. Diese Erfahrungen werden daher erst gesammelt und geordnet werden müssen. Ich setze die Anlegung eines Buches voraus, in welchem von der ersten Stiftung der Gesellschaft an die sämmtlichen Mitglieder, ohne Ausnahme, nach der chronologischen Ordnung des Eintritts verzeichnet werden, nebst allen den Angaben, die für den in Rede stehenden Zweck relevant sind. Allerdings würden diese Erfahrungen ein noch viel fruchtbareres Material darbieten, wenn von sämmtlichen betheiligten Personen auch Geburtsjahr und Tag aufgezeichnet wäre, nemlich von dem eintretenden Professor, von seiner Frau, wenn er schon verheirathet ist, oder, wenn und so oft er sich nach dem Eintritt verehelicht, endlich von den minorennen Kindern, die beim Absterben des Mitgliedes vorhanden sind. Alle diese Dinge aber fehlen, und würden nur eben in Beziehung auf das Mitglied selbst sich noch jetzt in den meisten Fällen ergänzen lassen, aus welchen einzelnen Bestimmungen sich aber wenig oder gar kein Nutzen ziehen liesse. Gleichwohl bleibt das, was sich noch jetzt ohne Zweifel wird zusammenbringen lassen, höchst schätzbar, ich meine nemlich für jedes einzelne Mitglied

1. *Terminus a quo* und *ad quem* der geleisteten Beiträge.
2. *Terminus a quo* und *ad quem* der genossenen Witwenpension in den Fällen wo ein solcher eintrat.
3. *Terminus a quo* und *ad quem* der genossenen Waisenpension, wo nach dem Tode des Vaters oder der Mutter noch minorenne Kinder vorhanden waren.

Die *Grösse* der Geldsumme, die von den Mitgliedern beigetragen, von den Witwen und Waisen erhoben sind, braucht aber gar nicht mit extrahirt werden.

Dies wäre denn das *dritte Requisit* dessen Herbeischaffung, vor Anfang aller Berechnungen, unerlässlich ist. Ich bin mit der Einrichtung des Archivs der Witwenkasse ganz unbekannt, weiss also nicht, ob vielleicht nicht besonders angelegte Bücher, aus denen dieses Material mit Sicherheit, Vollständigkeit

und Leichtigkeit entnommen werden könne, schon vorhanden sind. Jedenfalls aber würden doch die ohne Zweifel aufbewahrten 105 Jahresrechnungen dazu dienen können. Erst nach eigner näherer Einsicht in die vorhandenen Papiere würde ich aber mich erklären können, ob und in welchem Maasse ich meine eigne Beihülfe zu dieser Extraction zusagen kann.

Für jeden einzelnen in diesem Buche aufzuführenden Theilnehmer lässt sich aus den rubricirten Dāten berechnen, wie viel er der Gesellschaft und wie viel seinen Relicten diese bei den gegenwärtigen Sätzen geleistet haben, und was bei bestimmtem Zinsfusse der Geldwerth davon auf die Zeit seines Eintritts reducirt gewesen sein würde. Natürlich ist dies bei den einzelnen sehr verschieden, bei einigen positiv, bei andern negativ; aber nach den ewigen Gesetzen ist der *Mittelwerth* aus einer grossen Menge ein Element das als Mittelwerth wieder für die Zukunft zum Grunde gelegt werden kann, wo keine Ursache ist, wesentliche Aenderungen der allgemeinen Verhältnisse vorauszusetzen. Diese Tabelle selbst wird hierüber schon eine lehrreiche Indication geben können, wenn man das Ganze gruppirt, und z. B. den Mittelwerth der ersten Hälfte mit dem für die zweite, oder das erste, zweite und dritte Drittel mit einander vergleicht. Es wird sich so herausstellen, wie gross der Geldwerth der Verbindlichkeit der Gesellschaft ist, der ihr durch den Eintritt eines neuen Mitgliedes *durchschnittlich* zuwächst, und wenn man, nach dem was schon oben bemerkt ist, zugleich eine plausible Annahme für die Durchschnittszahl der jährlich zutretenden genommen hat, so lässt sich, für bestimmten Zinsfuss, berechnen, wie gross das Capital sein muss, dessen Zinserträgniss, diese auf immer fortlaufende Verbindlichkeit III. decken kann. Alle drei Capitale für I. II. und III. zusammengerechnet und mit dem wirklichen Vermögen der Gesellschaft verglichen, werden dann so genau wie es nach der Natur des Gegenstandes möglich ist zeigen, ob bei der jetzigen Einrichtung ihre Stabilität *mehr* als gesichert ist, oder nur eben zureichend, oder aber ob ihre Instabilität daraus hervorgeht, und also mit Entschiedenheit früh oder spät ihr Untergang erwartet werden müsse, und demgemäss würden dann die geeigneten Maassregeln in den verschiedenen Fällen zu erwägen und einzuleiten sein.

Dies sind die Hauptzüge des Planes, nach welchem meiner Meinung nach eine gründliche Prüfung und Aufstellung einer Bilanz ausgeführt werden könnte und müsste. Es ist eine bedeutende Arbeit, der ich mich aber, wenn es gewünscht wird, gern unterziehen werde. Dass diese Skizze nur ungefeilt und flüchtig niedergeschrieben hier vorgelegt ist, wird man mit der Kürze der Zeit entschuldigen. Wird eine solche Arbeit jetzt ausgeführt, so bleibt es jedenfalls wie schon oben bemerkt ist, dringend wünschenswerth, dass in Zukunft nach gewissen Zeitfristen immer wieder eine neue Bilanz gezogen werde, und dies würde dann viel leichter als das erstemal werden, wenn ein solches Buch wie ich oben erwähnt habe mit allen *Zeitpunktsrubriken* wenigstens von jetzt an angelegt und regelmässig vervollständigt und fortgesetzt würde.

Ich will nun auch noch mein Votum über ein paar andere Punkte, die in den andern Abstimmungen berührt sind, beifügen.

Ich bin nicht dafür, dass die Bestimmung der Statuten, welche die nicht besoldeten Professoren ausschliesst, aufgehoben werde. Die Universität als Corporation müsste in Beziehung auf die Witwenkasse immer dringend wünschen, dass solche Fälle, wo einem bei Schule oder Kirche Angestellten der Professortitel beigelegt wird, sehr selten blieben. Von einem solchen Fall aber abgesehen, wird einer, der gar keine Besoldung und kein Vermögen hat, nicht leicht so unbesonnen sein, eine Verheirathung einzugehen, und also überhaupt die ganze Bestimmung selten vielleicht nie von Wirkung sein. Möglicherweise könnte aber ein unbesoldeter Professor, der sich selbst dem Tode nahe fühlend eine Braut hätte, welche er sonst vor Erlangung einer Besoldung gewiss noch nicht geheirathet hätte, falls ihm der Eintritt in die Witwenkasse offen stände, dadurch versucht werden, durch eine schnelle Copulation der Witwenkasse eine Last aufzubürden.

So lange *bona fide* gehandelt wird, müssen vielmehr die unbesoldeten Professoren jene Clausel als

eine billige zu ihrem Vortheil gereichende Bestimmung betrachten, die ihnen die Alternative erspart, entweder schon während der Zeit, wo sie nichts von der Universität empfangen, zur Witwenkasse beitragen, oder später, wenn sie Besoldung erhalten, noch für die ganze Zeit ihres unbesoldeten Professorstandes doppelt nachzahlen zu müssen.

Meine zweite Bemerkung betrifft den Zinsfuss, in Beziehung auf welchen ich dem, was in dem P.M. des U. R. O. gesagt ist, nicht ganz beitreten kann. Mir erscheint vielmehr die Rechnung, nach welcher der jetzige Zinsfuss zu $4\frac{1}{15}$ proc. ermittelt ist, zum Theil als illusorisch. Ich erkläre mich durch ein Beispiel. Die Oesterreichischen $4\frac{1}{2}$ proc. Papiere stehen nach dem heutigen Courszettel auf $103\frac{3}{4}$. Beim Ankauf von einem Banquier wird man, alles eingerechnet, gewiss *über* 104 wirklich zahlen müssen, ich will aber nur bei 104 stehen bleiben. Man erhält also für sein eingezahltes Geld in der Wirklichkeit nur $4\frac{17}{52}$, oder nicht ganz $4\frac{1}{3}$ proc. Zinsen. Es dauert also wenigstens 12 Jahre, bis man nur sagen kann, dass man wirklich 4 proc. Zinsen genossen hat. Nun werden aber von diesen Papieren alle Jahre *sehr grosse* Summen ausgeloost und zu pari zurückgezahlt. Geschieht die Ausloosung schon nach 2 Jahren, so hat man in der Wirklichkeit nur zusammen $4\frac{4}{5}$ proc. oder für ein Jahr $2\frac{2}{5}$ proc. Zinsen genossen, ungerechnet die Kosten, mit welchen jede Einziehung verbunden ist. Für den Besitzer eines solchen Papiers ist es auch immer ein gefährlicher Umstand, dass er, wenn die ihn treffende Ausloosung nicht zu seiner Kenntniss gelangt, er also das Einziehen zu rechter Zeit versäumt, einen sehr bedeutenden Verlust erleiden kann. Für die Witwenkasse wird wohl der Banquier, von dem die Papiere erkauft sind, immer die nöthige Vigilanz ausüben, weil ihm selbst durch jede vorfallende Versur ein Gewinn zuwächst, aber eigentliche Verantwortlichkeit für jeden durch mögliches Uebersehen entstehenden Verlust wird er doch schwerlich auf sich nehmen. In dieser Rücksicht will ich also nicht unterlassen, hiermit die Anzeige zu machen, dass in der heute vor acht Tagen in Wien geschehenen Verloosung von *anderthalb Millionen Gulden* der in Rede stehenden Papiere auch eine der Obligationen der Witwenkasse getroffen ist, nemlich die pag. IX. der Rechnung unter Nr. 52 aufgeführte Litr. P Nr. 15172. Dass ich im Stande bin, diese Anzeige zu machen, verdanke ich nur dem zufälligen Umstande, dass ich heute, wo eben diese Rechnung in meinen Händen ist, die Notiz von der geschehenen Verloosung in einem Zeitungsblatt fand, und mir daher die Designation der ausgeloosten Nummer notirte, um sie zu Hause mit der Capitalliste der Witwenkasse vergleichen zu können, und mit dieser Anzeige will ich denn diese lange Exposition beschliessen.

9. Januar 1845. GAUSS.

[II.]

Untersuchung des gegenwärtigen Zustandes der Professorenwitwenkasse zu Göttingen.

Vorwort.

In dem von mir in der Witwenkassen-Angelegenheit am 8. Januar d. J. abgegebenen Votum habe ich die Methode nach ihren wesentlichen Elementen angedeutet, welche ich für die allein geeignete halte, um zu einem so gründlichen Urtheile, wie die Natur des Gegenstandes verstattet, zu gelangen. Ich habe die dort bezeichneten allerdings sehr langwierigen Rechnungen jetzt beendigt, und ihre Resultate sind in der zweiten Abtheilung dieser Denkschrift enthalten.

Da ich jedoch eine nähere Bekanntschaft mit den Grundsätzen derartiger Rechnungen bei den meisten Mitgliedern des Collegiums, welchem diese Schrift vorgelegt wird, nicht voraussetzen darf, so habe ich geglaubt, dass es denselben lieb sein würde, den Gegenstand auch noch von andern Seiten und aus mehr populären Gesichtspunkten erwogen zu sehen. Ist es auch nicht möglich, auf diese Art eigentlich *präcise*

Resultate zu gewinnen, sondern nur allgemeine Ueberschläge und Anhaltspunkte, so ist es doch wichtig, diese mit den Resultaten einer strengern Methode in Einklang zu finden, und jedenfalls wird dadurch alles in ein helleres Licht gesetzt. Zudem sind diese Auseinandersetzungen enge verknüpft mit der prüfenden Revision eines Cardinalpunkts des jetzt bestehenden Regulativs, welche Prüfung ich für unumgänglich nothwendig halte, und in Beziehung auf welche keine Dunkelheiten zurückbleiben dürfen. Ich habe daher diese Entwicklungen in dem ersten Theile dieses Aufsatzes so ausführlich und, wie ich hoffe, so klar dargestellt, dass man denselben leicht wird folgen können.

Erste Abtheilung.

Dass der Zustand der Witwenkasse bei dem Senate zur Sprache gebracht ist, und Verhandlungen darüber Statt gefunden haben, in deren Folge eine gründliche Untersuchung jenes Zustandes von dem Universitäts-Curatorium verfügt ist, war zunächst durch die im Herbst des vorigen Jahrs hervorgetretenen Besorgnisse veranlasst, welche besonders durch das rasche und alle frühern Erfahrungen weit überschreitende Steigen der Witwenzahl (seit dem Tode des Geheimen Justizraths M. auf zwei und zwanzig) erregt, und durch eine augenblickliche Insufficienz des baaren Kassenvorraths zur vollständigen Zahlung der Pensionen am gewohnten Tage noch vergrössert waren.

Dass diese und andere Umstände eine gewisse Beunruhigung hervorbrachten, ist um so weniger zu verwundern, da man sich gewöhnt hatte, den Zustand wie einen höchst blühenden zu betrachten. Bis Ostern 1829 war der Betrag der jährlichen Pension 210 Thl. gewesen, und durch viermalige Erhöhung von je 10 Thl. während des kurzen Zeitraums von 6½ Jahren war sie Michaelis 1835 auf 250 Thl. gestiegen. Man glaubte daher damals den Zeitpunkt, wo die Pensionen auf 300 Thl. angewachsen sein würden, so nahe, dass man sich schon mit Plänen beschäftigte, wie nachher der Ueberfluss am besten zu verwenden sein würde*). Allein gerade von jener Zeit an begannen die Verhältnisse sich ungünstiger zu gestalten; zu den bis Ende 1835 vorhandenen zwölf Pensionirten kamen binnen 9 Jahren zwölf neue Witwen hinzu, während nur zwei Pensionen erloschen.

Die vorhin erwähnte augenblickliche Unzulänglichkeit des baaren Kassenbestandes ist übrigens ein Umstand von geringer Bedeutung, selbst wenn dadurch eine kurzfristige verzinsliche Anleihe nöthig geworden wäre, was jedoch, der Jahresrechnung 1844—1845 zufolge, dasmal nicht der Fall gewesen zu sein scheint. Dergleichen Eventualitäten können bei der solidesten Kasse, wie bei dem solidesten in vielfachem Geldverkehr begriffenen Particulier vorkommen, und desto öfter, je mehr dahin gestrebt wird, grössere Geldsummen nicht lange ungenutzt liegen zu lassen.

Auch die 1844 so sehr vergrösserte Anzahl der Witwen war, an sich betrachtet, noch kein Beweis einer nahen Gefahr. Man durfte mit Wahrscheinlichkeit erwarten, dass diese Zahl bald wieder eine Verminderung erleiden würde, wie denn auch wirklich von März bis Juni d. J. drei Witwen mit Tode abgegangen sind. Auch ist nicht unwahrscheinlich, dass in nicht langer Zeit noch einige weitere Abnahme eintreten könne: indessen gewährt eine Rechnung von heute auf morgen nur eine sehr ungenügende Beruhigung, und ein beträchtliches dauerndes Sinken der Witwenzahl hat man allerdings keinen Grund zu erwarten.

Nicht die zeitweilige Grösse der Witwenzahl ist es, was dem Institute Gefahr drohet, sondern etwas ganz anderes, nemlich

---

*) Zwei wohlmeinende, seitdem bereits verstorbene Mitglieder der Kirchen-Deputation brachten in Anregung, der eine die Abschaffung der jährlichen Beiträge, der andere die Erweiterung der Waisenpensionen, bis zur Stiftung lebenslänglicher Pensionen für die unverheiratheten Professorentöchter.

die unklare Fassung desjenigen Theils des Regulatives, wodurch die Progression der Pensionssätze bestimmt werden soll

in Verbindung mit

der gegenwärtig so sehr vergrösserten Anzahl der an der Witwenkasse Theil nehmenden Professoren.

Die grosse Wichtigkeit des letztern Umstandes ist schon in meinem oben erwähnten Votum angedeutet. Die Bedeutsamkeit einer grossen Anzahl von Interessenten ist nach der Beschaffenheit einer Witwenkasse eine sehr verschiedene. Für eine Witwenkasse, welche sich durch die Beiträge der Mitglieder (oder durch die Antrittsgelder, oder durch beides verbunden) ganz selbst erhält, wird eine recht grosse Anzahl der Theilnehmer nur vortheilhaft sein, vorausgesetzt, dass die Kasse auf eine richtige Rechnung basirt ist. Eine doppelt starke Gesellschaft *dieser* Art, hat unter übrigens gleichen Umständen eine doppelt so grosse Anzahl von Witwen zu erwarten, wie eine einfache: sie hat aber auch gerade doppelt so viele Einnahme, und kann daher den einzelnen Witwen gerade eben so viel gewähren, aber mit mehr Sicherheit gegen die wechselnden Fluctuationen, welche bei der grössern Gesellschaft im Verhältniss zum Ganzen geringer sind, als bei der kleinern.

Ganz anders aber verhält es sich mit einer Witwenverpflegungsanstalt, die ein reines Beneficium ist, und deren Mittel einmal eine gegebene Grösse haben (durch bestimmten Kapital- oder Grundbesitz). Auch hier wird jede Erweiterung des Umfanges eine in gleichem Verhältnisse vermehrte Anzahl der Witwen zur Folge haben, deren jede einzelne demnach auch nicht mehr so viel aus den gegebenen Mitteln wird erhalten können, wie vorher bei beschränkterem Umfange. Allerdings wird die der vergrösserten Interessentenzahl entsprechende Vergrösserung der Witwenzahl in ihrer *vollen* Stärke erst nach mehrern Decennien eintreten, und dem natürlichen Gange der Dinge gemäss bis dahin sich nach und nach entwickeln. Setzen wir, um die Vorstellung zu fixiren, der Umfang einer solchen Gesellschaft (die ein reines Beneficium ist) habe sich binnen einer gewissen Zeit verdoppelt. Man wird dann bald auf eine vergrösserte Witwenzahl, also, wenn das Vermögen nicht selbst angegriffen werden soll, auf eine Verminderung der jeder einzelnen Witwe zu gewährenden Pension gefasst sein müssen, und diese Herabsetzung wird nach und nach bis auf die Hälfte fortschreiten. Hätte aber eine solche Gesellschaft ein Statut, wonach den Witwen, trotz ihrer steigenden Zahl, fortwährend gleichbleibende Pensionen gezahlt werden *müssen*, so würde sie nothwendig zu Grunde gehen. Zwei Fälle gibt es jedoch, wo dieser Hergang eine Modification erleiden wird oder erleiden kann. *Erstlich* wenn die Mittel der Kasse, vor der Erweiterung des Umfanges der Theilnahme, mehr als hinreichend waren, um die bestehenden Pensionen zu bestreiten, so dass eine fortwährende Vermögensvergrösserung, und etwa auch bis dahin von Zeit zu Zeit eine Erhöhung des Pensionssatzes hatte Statt finden können. Hier wird offenbar der Erfolg des erweiterten Umfanges von dem *Wieviel?* abhängen. Hatte die Kasse vorher einen grossen jährlichen Ueberschuss, und ist die Vergrösserung der Interessentenzahl nicht sehr bedeutend, so kann jene die Gefahr vielleicht überstehen; die Vermögenszunahme wird nur immer langsamer und langsamer werden, und möglicherweise kann, wenn die Folge jener Ursache sich erst ganz entwickelt hat, die Kraft der Kasse noch hinreichend sein, auch der grössern Witwenzahl die volle Pension zu gewähren. Umgekehrt aber, war anfänglich der jährliche Ueberschuss nicht gross, die Vermehrung der Interessentenzahl aber sehr erheblich, so wird der jährliche Ueberschuss bald in ein Deficit übergehen, und der Ruin der Kasse zwar etwas später, als wenn ursprünglich Mittel und Ansprüche im Gleichgewicht waren, aber doch eben so unfehlbar eintreten. *Zweitens* bei einer Kasse von überhaupt geringem Umfange in Beziehung auf die Zahl der Theilnehmer, und wo diese Zahl also auch nach der Vergrösserung noch wie eine kleine zu betrachten ist, wird man keinen so regelmässigen Hergang erwarten dürfen wie bei grössern; die in der Natur der Sache liegenden, aber, bei kleinen Zahlen *verhältnissmässig* viel grössern Schwankungen werden die Regelmässigkeit in der Folge der Erscheinungen

schwächen, ja ganz verdunkeln können, ohne darum der Richtigkeit des Satzes den geringsten Eintrag zu thun, dass nach Mittelzahlen aus hinreichend langen Perioden der doppelten Interessentenzahl auch die doppelte Witwenzahl folgen muss. Aber, aus jener Ursache, kann es geschehen, dass bei einer kleinen Gesellschaft die verhältnissmässig vergrösserte Witwenzahl länger ausbleibt, als bei einer grossen; sie kann aber eben so gut auch viel früher eintreten. Es kann, bei einer kleinen Gesellschaft, sich treffen, dass während einer beträchtlichen Zahl von Jahren nach der Vergrösserung der Interessentenzahl die Witwenzahl nur eine ganz unbedeutende Zunahme zeigt, fast stationär bleibt, ja selbst einmal wieder etwas zurückgeht, was aber im Grunde nichts weniger als wünschenswerth sein würde, falls sich dadurch die Administration in eine trügerische Sicherheit einwiegen liesse, und im Vertrauen auf den augenblicklich noch im Steigen begriffenen Vermögenszustand noch *Erhöhung* der Pension verfügte, zu einer Zeit, wo eine gründliche weiter als auf den nächsten Tag sehende Erwägung vielleicht schon die Nothwendigkeit einer *Beschränkung* erkannt haben würde. Denn das bedarf keines Beweises, dass nothwendig werdende Beschränkungen desto grösser ausfallen müssen, je länger man sie verschoben hatte.

Von dem, was über reine Beneficienkassen gesagt ist, lässt sich nun leicht die Anwendung auf solche machen, die zwischen jenen und den sich durch die Beiträge ganz selbst erhaltenden stehen. Eine solche gemischte Kasse ist die Professorenwitwenkasse, obwohl sie wegen der Geringfügigkeit der Beiträge jenen viel näher steht als diesen. Auf den Grund jährlicher Beiträge von 10 Thl. würde, wie aus den in der zweiten Abtheilung zu erörternden Rechnungen folgt, den Hinterbliebenen der Interessenten höchstens eine Pension von 44 Thl. oder von 48 Thl. gewährt werden können, je nachdem der Zinsfuss von 3½ oder von 4 Procent vorausgesetzt wird, und hiebei ist noch nichts wegen möglicher Verluste, und wegen Administrations- und anderer Kosten in Abzug gebracht. Was darüber gewährt wird, also nach dem seit 1835 bestehenden Pensionssatze jährlich 202 bis 206 Thl., ist wie der Ausfluss eines reinen Beneficiums zu betrachten, und es gilt davon, rücksichtlich der Wirkungen der steigenden Interessentenzahl ganz dasselbe, was oben in Betreff solcher Kassen entwickelt ist.

Hiedurch erscheint nun allerdings der Umstand, dass die Anzahl der Theilnehmer an unsrer Witwenkasse jetzt um die Hälfte grösser ist, als sie durchschnittlich vor 20 bis 30 Jahren war, in schwerer Wichtigkeit. Um jedoch diese gehörig würdigen zu können, muss zugleich wohl erwogen werden, dass die in der letzten Zeit so gross gewordene Witwenzahl oder richtiger Pensionenzahl (nach dem *Durchschnitt* der letzten *acht* Jahre = 20) ganz und gar nicht Folge der jetzigen grossen Zahl der Theilnehmer ist, sondern eben so gross sein würde, wenn auch die Zahl der Theilnehmer nicht so sehr vermehrt wäre: es erhellet dies aus dem Umstande, dass die Ehemänner derjenigen Witwen, welche in den letzten acht Jahren den Bestand gebildet haben (resp. Väter der Pension genossen habenden Waisen) fast sämmtlich schon vor dem Steigen der Interessentenzahl, ja meistens schon sehr lange vor diesem Steigen, der Gesellschaft angehört haben. Es muss vielmehr die jedesmalige Witwenzahl, in einer Gesellschaft, deren Umfang im Steigen ist, nicht mit der gleichzeitigen Zahl der Theilnehmer, sondern mit derjenigen zusammengestellt werden, welche mehrere Decennien früher Statt gefunden hat. Hiernach liegt nun aber folgende Schlussfolge sehr nahe: Eben so gut, wie aus dem frühern Zustande der Gesellschaft, deren Interessentenzahl vor 20 bis 30 Jahren zwischen 31 und 38 auf und ab schwankte, jetzt eine durchschnittliche Witwenzahl von 20 hervorgegangen ist, wird ganz füglich, wiederum nach einigen Decennien, aus dem jetzigen Umfange der Gesellschaft — von 51 Interessenten — eine Witwenzahl von 30 erwachsen können, und zwar ohne alle Gewähr, dass diese Zahl ein unübersteigliches Maximum sei. Es wird damit nicht gesagt, dass dies gewiss wirklich geschehen *werde*, sondern nur, dass nach den bisherigen Präcedentien es geschehen könne, ohne dass man es gerade wie etwas Ausserordentliches betrachten dürfte; jedenfalls zeigt schon ein solcher roher Ueberschlag, dass die Witwenkasse in den möglichen Wechselfällen ein viel höheres Spiel spielt, als bisher geglaubt sein mag.

Gerade hiedurch erhält nun aber die Unklarheit *) des Regulativs bei derjenigen Stipulation, wodurch die Grösse und das Fortschreiten des Pensionssatzes normirt werden soll, einen sehr bedenklichen Charakter. Die eignen Worte des Rescripts des Universitätscuratoriums vom 20. November 1794, durch welche diese Normirung sanctionirt ist, sind folgende:

— — — — Zweitens genehmigen wir, dass so oft sich der Fundus um 5000 Thl. vermehrt haben wird, und die andern Revenüen des Witwenfonds keine Verminderung gelitten haben, auch die Anzahl der Pensionen nicht über 15 gestiegen ist, eine jede Pension mit 10 Thl. erhöhet werden solle.

Mangelhaft ist diese Bestimmung darin, dass sich nicht auf eine ganz unzweideutige Art erkennen lässt, *was* denn eigentlich an einer Pensionserhöhung von den vorangehenden Bedingungen abhängig sein soll, ob das Bestehen, oder ob bloss der Anfang; mit andern Worten (indem ich bloss die letzte Bedingung in Betracht ziehe)

ob eine Erhöhung, die dem Statut gemäss zu einer Zeit eingetreten ist, wo die Zahl der Witwen höchstens 15 betragen hatte, wieder aufhören oder wenigstens zweckmässig modificirt werden soll, sobald später die Anzahl der Pensionen jene Normalzahl überschreitet,

oder aber

ob eine einmal eingetretene Erhöhung unabhängig von der späterhin erfolgenden Ueberschreitung der Normalzahl dennoch unabänderlich fortdauern solle.

Dass die obige Formulirung der Vorschrift, wenn man ohne alle Rücksicht auf die bei Erwägung des Inhalts sich ergebenden Folgerungen, bloss den Wortlaut in Betracht zieht, natürlicher auf die zweite Auslegung hinführt als auf die erste, will ich um so weniger bestreiten, da bei meiner gegenwärtigen hauptsächlich auf den innern Gehalt der Anordnung selbst gerichteten Untersuchung der sprachliche Standpunkt nur ein ganz untergeordneter ist. Ich kann jedoch nicht umhin, zur Vergleichung auch die Einkleidung hieher zu setzen, in welcher Brandes, in seinem bekannten Werke über die Universität Göttingen, die Verfügung anführt; da Brandes 1794 als Referent im Ministerium für die Universitätssachen fungirte, so ist seine Auffassung jedenfalls zur Sache gehörig, wenn sie auch vom juristischen (meiner Untersuchung gleichfalls fremden) Standpunkt aus, der einmal im officiellen Rescript gebrauchten Wortfassung nicht derogiren kann. Es heisst a. a. O. S. 254:

Ferner wurde zu der Zeit beliebt, dass jedesmal, wenn der Capital-Fonds der Kasse mit 5000 Thl. angewachsen sei, eine jede Pension mit 10 Thl. vermehrt werden solle, *so lange* die Zahl der Pensionirten nicht über 15 hinausgeht, was noch nie der Fall war.

Hiernach scheint Brandes den Vorbehalt wegen der 15 Pensionen eher in dem Sinn der *ersten* Interpretation verstanden, aber, wegen des zuletzt vom ihm angeführten Umstandes für praktisch ganz unerheblich gehalten zu haben, wodurch sich denn vielleicht auch erklären lässt, dass in der Wortfassung des Rescripts nicht für die vollkommenste Schärfe Sorge getragen ist.

Brandes würde jedoch wahrscheinlich ganz anders geurtheilt haben, wenn er vorher das Factische genau geprüft hätte. Brandes kann bei der Angabe 'was noch nie der Fall war' nicht den siebenjährigen Zeitraum von Einführung der Bestimmung bis zur Abfassung seines Buchs verstanden haben, da der Erfahrung aus einem so kurzen Zeitraume gar kein Gewicht beigelegt werden könnte, sondern muss die ganze seit Stiftung der Kasse verflossene Zeit gemeint haben. Dann ist aber seine Behauptung factisch unrichtig. Die Zahl der aus der Kasse bezahlten Pensionen war wirklich schon einmal über 15 gestiegen, nemlich während der ersten sechs Monate des Jahrs 1778, wo 16 Pensionen bestanden; ja derselbe Fall würde

*) Wer an dieser Bezeichnung einer seit einem halben Jahrhundert in Kraft gewesenen Anordnung Anstoss nimmt, wolle sein Urtheil suspendiren, bis er die erste Abtheilung ganz gelesen hat.

auch bereits zwei Jahre früher eingetreten sein, wenn die erst 1791 eingeführte Verlängerung der Dauer der Waisenpensionen bis zu dem Alter von 20 Jahren schon damals gegolten hätte. Dieser Umstand erscheint aber in so schwererer Bedeutung, wenn man (gemäss der schon oben gemachten Bemerkung) erwägt, dass 20—30 Jahre rückwärts von jener Epoche, nemlich von 1747—1757, der Durchschnittswerth der Interessentenzahl nur 21—22 betrug, 1794—1802 hingegen 35—36.

Ueber 15 ist nun, nachher, die Zahl der Pensionen nicht eher wieder gestiegen, als Ostern 1837, und hat sich seitdem immer darüber gehalten. Die Kasse hat den vollen, alle seit 1794 eingetretenen successiven Erhöhungen mit einschliessenden Pensionsbetrag fortgezahlt, und so wenigstens *implicite* — denn ob darüber vorher Verhandlungen der Kirchendeputation Statt gefunden haben, ist mir nicht bekannt — die zweite Interpretation des zweifelhaften Punkts angenommen.

Wollen wir nun aber, mit Beiseitesetzung sprachlicher und formell juristischer Rücksichten, zwischen den beiden Interpretationen nur nach innern Gründen entscheiden, so drängt sich zuvörderst sogleich die Frage auf: Wenn es wirklich unbedenklich ist, eine erhöhte Pension auch für 16 Percipienten ungeschmälert *fortbestehen* zu lassen, warum soll es denn verboten sein, sie auch bei 16 Percipienten *anfangen* zu lassen? Die Gefahr, wenn eine da ist, ist ja doch in dem einen Fall gerade eben so gross wie in dem andern. Dies Argument wird noch schlagender, wenn man zu grössern Zahlen fortschreitet. Denn eine erhöhete Pension bei 17 (und wie viel mehr bei 18, 19 u. s. f.) Percipienten fortbestehen zu lassen, ist doch ganz offenbar der Kasse gefährlicher, als die Erhöhung bei 16 anfangen zu lassen, und jenes ist, wenn man die zweite Interpretation annimmt, erlaubt, dieses verboten.

Zu welchen Folgerungen eine streng consequente Durchführung der zweiten Interpretation führt, ist leicht zu übersehen.

In dem gedruckten Regulativ von 1838 wird die in Rede stehende Anordnung im §. 10 mit den Worten eingeleitet: Die Witwenpension *wird* theils nach dem Bestande des Fonds der Kasse, theils nach der Zahl der Witwen *bestimmt*. Zufolge der der ersten Publication des Regulativs (1833) vorgesetzten Einleitung soll dasselbe die Verpflichtungen und die Rechte der Theilnehmer feststellen, und der Beitritt eines neuen Mitgliedes geschieht durch Unterschreiben eines ihm zur Kenntnissnahme von den Pflichten und Rechten vorgelegten Exemplars. Man muss also annehmen, dass das Regulativ dieselben *vollständig* enthält, und dass die Kasse, gegenüber den Mitgliedern oder deren Hinterbliebenen, keine Rechte geltend machen kann, die nicht in diesem Regulativ enthalten sind.

Nun findet sich aber in demselben auch nicht ein einziges Wort als Vorbehalt, den Pensionssatz eventuell wieder zurückgehen lassen zu dürfen, es sei denn, dass man die erste Interpretation von jener Normirung des Pensionssatzes nach der Witwenzahl, annimmt. Im entgegengesetzten Fall muss man, bei strenger Consequenz, einräumen, dass die Kasse verpflichtet sei, sämmtliche, während Stattfindens von Pensionszahlen unter 16, eingetretenen Pensionserhöhungen ungeschmälert fortzuzahlen, die Zahl der Witwen (und Waisen) möge in späterer Zeit (z. B. in Folge der überhaupt erweiterten Theilnehmerzahl) *so hoch anwachsen, wie sie wolle.*

Dies ist aber geradezu ungereimt, insofern man nicht annimmt, dass das Gouvernement die Gewähr zu leisten habe, was zu beurtheilen ausser meiner Competenz liegt.

Bei jedem bestimmten Zinsfusse kann der Kapitalanwachs von 5000 Thl. die Pensionserhöhung um 16 Thl. nur für eine bestimmte Anzahl von Pensionirten decken; bei dem Zinsfuss von 3 p. C *) für höchstens

*) Bei Einbringung des Vorschlages zu der in Rede stehenden Regulirung, im Julius 1794, wurde mit unzweideutigen Worten, nur auf diese Verzinsung und nicht auf 4 p. C. Rechnung gemacht. Hienach ist also die Stelle in dem Aufsatz des Herrn Universitätsraths O. vom 15. December 1844, S. 5:

'Bei der im J. 1794 getroffenen Bestimmung ..... ist wahrscheinlich eine Berechnung dahin zum

15, bei dem Zinsfuss von 3½ proc. für höchstens 17, bei dem Zinsfuss von 4 proc. für höchstens 20 Pensionirte, und der Zinsertrag jener Kapitalvermehrung wird, wenn diese Zahlen erreicht sind, dadurch gänzlich absorbirt. Steigt also die Anzahl der zu pensionirenden resp. über diese Grenzzahlen, so wird zur Bestreitung aller übrigen Pensionen nichts vorhanden sein, als 1) der Ueberschuss, den die jährlichen Einnahmen der Kasse, vor den Erhöhungen von Kapitalien und Pensionssätzen gewährt hatten, oder vielmehr gewährt haben würden, wenn die resp. Normalzahl der Pensionen (15; 17; 20) damals Statt gefunden hätte*). 2) Die etwaige seit jener Zeit bewirkte Steigerung der Apothekenpacht. 3) Der vergrösserte Ertrag der Beiträge der Mitglieder, wegen ihrer gewachsenen Anzahl. Diese precären und schwachen Hülfsquellen würden aber bei weiterm Ueberschreiten jener Normalzahlen bald erschöpft sein, und desto schneller, je höher der Pensionssatz selbst schon angewachsen ist. Diese letztere Bemerkung ist in so fern von grosser Wichtigkeit, weil daraus auf das klarste hervorgeht, dass die aus consequenter Befolgung der zweiten Interpretation entspringende Gefahr desto grösser wird, je mehr Pensionserhöhungen bis zum Ueberschreiten der Normalzahl schon Statt gefunden haben.

Wenn übrigens oben bemerkt ist, dass in dem gedruckten Regulativ gar kein Vorbehalt zu finden ist, wodurch einem früh oder spät aus dieser Quelle entspringenden Verbluten der Kasse Einhalt gethan werden könnte, so darf ich nicht verschweigen, dass in die Quittungsformulare, auf welche die Witwen ihre Pensionen erheben, die Beverwortung aufgenommen ist, dass die Pension auf ..... Rthl. für jetzt, und *so lange der Kasse Umstände solches gestatten werden*, festgesetzt sei. Wahrscheinlich werden wenige Mitglieder der Witwenkasse diese Clausel kennen: mir selbst wenigstens ist sie, obgleich ich 38 Jahre Theilnehmer gewesen bin, erst ganz vor kurzem bekannt geworden. Sie ist jedoch nicht bestimmt, wie ich anfangs vermuthete, möglichen aus der Progressionsnormirung zu besorgenden Gefahren vorzubeugen; denn sie steht, und zwar genau mit denselben Worten, auch schon in den gedruckten Quittungsformularen vor 1791. Solche in ganz allgemeinen Ausdrücken abgefasste Vorbehalte mögen in einigen Beziehungen ihr Gutes haben: im gewöhnlichen Laufe der Dinge aber bleiben sie, wenn nicht ausserordentliche Veranlassungen eintreten, so lange ohne Anwendung, bis die höchste Noth zwingt. Es ist kein Entscheidungsmerkmal, kein Maassstab angegeben, woran man erkennen kann, ob der Kasse Umstände Zahlung gestatten oder nicht gestatten. Wartet man so lange, bis man schon wiederholt genöthigt ist, zur Bezahlung der Pensionen die Kapitale mit zu verwenden, so hat man sehr wahrscheinlich schon viel zu lange gewartet, und es wird sich dann bewähren, was [S. 128, Z. 12] bemerkt ist. Jedenfalls ist, rücksichtlich der Behauptung des Rufs der Solidität der Kasse, ein grosser Unterschied zwischen einem Zurückgehen des Pensionssatzes in Folge einer ganz bestimmten feststehenden Regel (wie bei der ersten Interpretation); und einer Reduction der Pensionen, wozu die Kasse sich endlich gezwungen sieht, weil sie eben ihre nach dem

---

'Grunde gelegt, dass die Zinsen des auf 5000 Thl. erhöheten Fonds zu 4 proc. 200 Thl. betra-
'gen, dass davon ¼ wieder zum Capital zu schlagen, ¾ aber unter die Witwen zu vertheilen
'seien, was dann bei 15 Witwen für jede 10 Thl. betragen würde'

zu berichtigen. Von einer solchen Berechnung, von 4 proc. Zinsen und von der Zurücklegung eines Viertels derselben kommt in den bald näher zu betrachtenden Verhandlungen von 1791 *gar nichts* vor.

*) In der Wirklichkeit hätten die Einnahmen damals (1791) schon für 18 Pensionirungen nicht ganz ausgereicht, obgleich zu jener Zeit noch ein jährlicher Zuschuss von 150 Thl. aus der Kirchenkasse geleistet wurde, der später aufgehört hat. Der obige Ueberschlag erleidet aber eine Modification, weil, vorzüglich in Folge von Irregularitäten während der westphälischen Regierung, die Progressionsnorm nicht genau befolgt ist. Hätte man sich ganz strenge daran gehalten, so würden die Pensionssätze seit 1815 immer schon bei geringerer Kapitalhöhe, als geschehen ist, haben erhöhet werden müssen, — und das jetzige Kapitalvermögen würde um vielleicht 5000 Thl. ärmer sein.

Statut (in der zweiten Interpretation) eigentlich *unbedingt* übernommenen Verpflichtungen nicht mehr erfüllen kann.

Die vorstehenden Entwickelungen sollten die vitale Wichtigkeit der Progressionsnormirung bei einer Gesellschaft, deren Theilnehmerzahl sich bedeutend vergrössert, und damit die Wahrheit der S. [127] von mir aufgestellten Behauptung darthun. Um aber diesen Gegenstand von allen Seiten zu beleuchten, wird es nothwendig sein, dem Hergange der Entstehung jenes Statutsartikels Schritt vor Schritt zu folgen. Ich habe zu dem Zweck die betreffenden Acten sorgfältig gelesen, und wiederholt gelesen, und gebe daraus, soweit sie jenen Statutsartikel betreffen, einen Auszug. Ich werde dabei hin und wieder auch einige an sich untergeordnete Nebenumstände hervorzuheben haben, wenn sie etwas beitragen können, den Hergang bei diesen Verhandlungen begreiflicher zu machen. Im voraus will ich bemerken, dass 1794 der jährliche Beitrag 5 Thl. Gold betrug, die Witwenpension 110 Thl. Kassenmünze, und dass die vater- und mutterlosen Waisen die Pension bis zum vollendeten 12ten Jahre zu geniessen hatten.

In einem vom 30. Junius 1794 datirten an die Universität gerichteten Ministerial-Rescript, wurde unter Bezugnahme auf ein schon vor einiger Zeit von dem Könige der Witwenkasse gemachtes Geschenk von 1000 Thl.*), die Anzeige von der Bewilligung eines zweiten Geschenks von 500 Thl. Gold gemacht, mit dem Beifügen, dass, wie bei diesen Geschenken die Absicht dahin gehe, zu einer baldigen Erhöhung der Pensionen hinzuwirken, gewärtigt werde, dass die Theilnehmer auch ihrerseits zur Erreichung dieses Zwecks beizutragen, und zu einer Erhöhung der jährlichen Beiträge von 5 Thl. Gold auf 10 Thl. Kassenmünze bereit sein würden. Nach den Berechnungen in einem anliegenden P. M. sei es nicht zweifelhaft, dass es füglich thunlich sei, schon jetzt eine Erhöhung der Pensionen in dem Maasse eintreten zu lassen, dass die sechs ältesten, anstatt der bisherigen 110 Thl., künftig 150 Thl. und alle übrigen jede 130 Thl. erhielten. Am Schlusse erbot man sich, falls die Kapitalien der Witwenkasse nicht alle vollkommen sicher placirt seien, die sichere Unterbringung zu 3 Procent bei öffentlichen oder städtischen Kassen zu veranlassen. Ein ähnliches Anerbieten war schon einmal, bei den Monitis zu der Jahresrechnung für 1792 gemacht worden.

Die beigefügte Anlage, deren Verfasser nicht genannt ist, im Detail durchzugehen, ist für meinen Zweck nicht nöthig. Aber ein paar Nebenumstände will ich herausheben.

I. Die Kapitalien der Witwenkasse, heisst es, seien zu ungleichem Zinsfuss ausgeliehen, einige **) zu 3 proc., andere höher. Weil aber der Zinsfuss leicht von allen Kapitalien auf 3 proc. heruntergehen könnte, und man bei zu machenden Ueberschlägen auf möglich sichere Summen rechnen müsse, so wolle man bei den Rechnungen auch nicht mehr als 3 proc. voraussetzen.

Hieraus und aus dem eben angeführten Schlusse des Rescripts erklärt es sich, warum auch in den Verhandlungen bei der Universität für allen künftigen Kapitalzuwachs (ohne weitere Bemerkung) nur auf 3 proc. gerechnet ist; bloss für die schon vorhandenen und schon belegten Kapitale sind die Zinsen zu 3½ proc. ausgeworfen. Vergl. hiemit die Anmerkung zu S. [131.]

II. Um einen Ueberschlag zu machen, auf welche Zahl von Witwen die Rechnung gestellt werden müsse, fährt der Verf. fort:

'Will man nun nach den gemachten Erfahrungen annehmen, dass 3 stehende Ehen eine Witwe zu ernähren haben, so würden die 26 verehelichten Professoren (unter der Gesammtzahl von 36) etwan 9 Witwen 'zu erhalten haben. Da es aber mehrere Gewisheit gewährt, wenn man den äussersten Fall zu Basis nimmt, 'so setze man lieber, dass gegen 2½ Ehen *eine* Witwe in Anschlag zu bringen, so dass also die bestehenden '26 Professor-Ehen zu erhalten haben würden — 10 Witwen.'

---

*) Kassenmünze. Es war nach Ausweis der Rechnung für 1793 unter dem 18. April 1793 eingezahlt.

**) zu damaliger Zeit beinahe der dritte Theil des Kapitalvermögens.

Bei den Universitätsseitig gemachten Ueberschlägen hat man jene 3 oder $2\frac{1}{2}$ Ehen gegen Eine Witwe für zu viel gehalten, und das Verhältniss von 2 Ehen gegen Eine Witwe zum Grunde gelegt.

Ich habe die Stelle des P. M. hier bloss deswegen angeführt, weil dadurch erklärlich wird, dass man sich bei dem Verhältniss von Zwei Ehen gegen Eine Witwe so leicht beruhigt hat, obgleich, sehr wahrscheinlich, auch dieses den Verhältnissen der Professoren-Witwenkasse noch nicht angemessen ist, sondern noch weniger Ehen gegen Eine Witwe gerechnet werden sollten. Ueber die Sache selbst wird das Nähere weiter unten vorkommen; aber der Geschäftsverlauf erinnert (wenn es erlaubt ist, ein Gleichniss aus einer niedern Sphäre hieher zu ziehen) unwillkürlich an Käufer, die bei unvollkommener eigner Waarenkenntniss einen guten Handel gemacht zu haben glauben, wenn sie weit unter dem zuerst geforderten Preise eingekauft haben, obgleich sie, bei Lichte besehen, noch immer zu theuer bezahlten. Ich brauche nicht zu erinnern, dass ich diess Gleichniss nicht über die Gebühr ausgedehnt wissen will, denn der unbekannte Proponent hat die Verhältnisse 3 : 1 und $2\frac{1}{2}$: 1 ohne Zweifel in gutem Glauben an ihre Zulässigkeit vorgebracht.

Indem der damalige Prorector F., unter dem 4. Julius, das Rescript bei dem Senate in Umlauf setzt, fügt er den beiden darin enthaltenen Deliberationsgegenständen (Erhöhung der Beiträge und Erhöhung der Pensionen) noch einen dritten bei, durch den Vorschlag, die Dauer der Waisenpensionen bis zum vollendeten 20sten Lebensjahre zu erweitern. Er überlässt den Senatsmitgliedern, sich über diese Gegenstände gleich schriftlich, oder in der auf den 12. Julius angesetzten Senatsversammlung zu äussern.

Diese Missive ist von 17 Senatsmitgliedern unterzeichnet; von den dabei gefallenen Aeusserungen sind hier nur ein paar zu erwähnen.

Der damalige Curator der Witwenkasse, P., stellt vor allem den Grundsatz auf: die Kasse sei den gegenwärtigen Witwen eben so viel schuldig als den künftigen, sie sei aber auch den künftigen Witwen genau so viel schuldig wie den gegenwärtigen. Diese (an sich in der That sehr vage) Phrase erläutert er dahin, dass jede künftige Witwe, welche weniger erhalte, als eine andere früher erhalten habe, (seiner Meinung nach) wahrhaft lädirt werde, und das erste Princip müsse demnach sein, die Pensionshöhe so zu bestimmen, dass, nach höchster Wahrscheinlichkeit, sie niemals wieder vermindert zu werden brauche. In dieser Beziehung hält aber P. den Calcül in der Beilage des Rescripts nicht für sicher genug; man dürfe nicht $2\frac{1}{2}$ Ehen auf 1 Witwe, sondern nur 2 rechnen, und müsse also das Maximum der Witwen nicht auf 10—12 sondern auf 14—15 setzen, mithin auch geringere Pensionshöhen annehmen.

Kaestner hält die Frage für zu verwickelt und schwierig, als dass sich ohne eine *umständliche* und *genaue* Untersuchung etwas festsetzen lasse; auch er sei der Meinung, dass mehr nicht als *höchstens* 2 Ehen auf 1 Witwe, gerechnet werden dürfen. Da er längst aus der Witwenkasse ausgeschieden sei (er war Theilnehmer gewesen von 1755—1773), so habe er in der Sache keine Stimme (als Senior der philosophischen Facultät war er doch Mitglied der Kirchendeputation), rathe aber, keinen Beschluss zu fassen, ohne vorher einen Sachverständigen, etwa den p. Kritter zu befragen.

G. wünscht auch, dass durch genaue Rechnungen die Kräfte der Kasse ermittelt werden möchten, und weiset auf die *schrecklichen* Folgen übereilter Beschliessung zu grosser Pensionen, an den Beispielen der Hannoverschen, Bremischen u. a. Witwengesellschaften hin.

Die übrigen Vota stimmen theils den vorigen bei, theils entwickeln sie Bedenklichkeiten, wegen Erhöhung der Beiträge oder Verlängerung der Waisenpensionen, was hier nicht extrahirt zu werden braucht.

In der Senatssitzung vom 12. Julius, in welcher, den Prorector mitgezählt, 12 Professoren anwesend waren, erklärten sich *für* die Erhöhung der Beiträge 9 unbedingt, 2 mit dem Zusatz, dass sie die Erhöhung für zu gross hielten; einer (der bei der schriftlichen Votirung sich nachdrücklich dagegen erklärt hatte) wollte den mehrsten Stimmen beitreten. — Der F.'sche Vorschlag, wegen Verlängerung der Waisenpensionen wurde bis zu genauerer Erwägung der Umstände der Kasse noch beanstandet. — Wegen

Erhöhung der Witwenpensionen wurde beschlossen, ein Gutachten von Kritter einzuholen *). Doch erklärte man sich schon *gegen* die im Rescripte beantragte grössere Pension für die sechs ältesten Witwen, als welche schon durch das V.'sche Legat bevorzugt seien.

Die Consultation des p. Kritter, welche durch ein im Concept bei den Acten befindliches Schreiben P.'s geschah, war in der That nur eine sehr beschränkte. Nach einer bloss in ganz allgemeinen Umrissen gehaltenen Uebersicht der Haupteinrichtungen der Witwenkasse werden Kritter nur zwei Fragen vorgelegt: I) Nach welchem Grundsatz und Verhältniss in einer derartigen Gesellschaft das Maximum der Witwen bestimmt werden müsse und II) um wieviel dies Maximum der zu verabreichenden Witwenpensionen noch vergrössert werden müsse, wenn im Falle des Nichtvorhandenseins einer Witwe, oder nach dem frühern Ableben derselben die Pensionsberechtigung auf etwa vorhandene Waisen übergehe, und fortdaure, bis das jüngste Kind das Alter von 20 Jahren erreicht habe. Die dermalige Anzahl aller Interessenten der Kasse, und der darunter befindlichen Verehelichten, wird gerade eben so wie in der oben angeführten Anlage des Rescripts, zu 36 und 26 angegeben, und zugleich bemerkt, dass diese Zahlen und ihr Verhältniss veränderlich und schwerlich einer Wahrscheinlichkeitsregel zu unterwerfen seien; zum Schluss folgt das Anerbieten, dass wenn der Befragte noch einige weitere Data aus den bisherigen Erfahrungen über das Verhältniss der Participanten und der Witwen nöthig haben sollte, solche sogleich mitgetheilt werden würde.

Kritter's Antwort, oder sein 'Gutachten', vom 19. Julius, lege ich in einer vollständigen Abschrift bei **).

---

*) Es scheint nicht, dass etwas darüber festgesetzt wäre, *in welchem Maasse* Kritter's Rath in Anspruch genommen werden solle. Kaestner war in der Versammlung nicht gegenwärtig.

**) Gutachten über einige mir vorgelegte Fragen, die Göttingische Universitäts-Witwenkasse betreffend.

Ad I. Das Collegium der Herrn Professoren in Göttingen hat schon seit der Errichtung der Universität über 50 Jahre lang existirt, so dass man schon vor 10 Jahren die höchste Zahl der Witwen haben konnte, welche nach den Gesetzen der Sterblichkeit auf etwa 22 oder 24 verehelichte Professoren vorhanden sein mussten, nemlich 12 Witwen. Dieses hat sich auch laut der mir mitgetheilten Liste von dem Anwachs der jährlich vermehrten Zahl der Witwen gezeigt und würde sich noch besser gezeigt haben, wenn das Collegium der Herrn Professoren aus 100 Personen hätte bestehen können. Da aber nach der Natur der Sache diese Anzahl nur um den 4ten Theil von 100 stark gewesen, so war es auch natürlich, dass die Zahl der Witwen vom Jahre 1775 bis 1780 mehr als 12 und vom Jahre 1781 bis 1792 weniger als 12 betragen, weil bei kleinen Zahlen die Ordnung der Sterblichkeit nicht so wie bei grossen Zahlen eintreten kann. Indessen muss man dennoch annehmen, dass die höchste Zahl der Witwen in einem Durchschnitt von etwa 10 Jahren beständig etwa halb so gross sein werde, als die Zahl der verehelichten Herrn Professoren.

Ad II. Da es nunmehr gewünscht wird, dass die hinterlassenen Waisen-Familien einer gestorbenen Witwe oder auch eines gestorbenen Witwers bis zum vollendeten 20sten Jahre eine gleiche Pension wie eine Witwe bekommen möchten, so kann ich nur aus der Erfahrung bei der Bremischen Witwenkasse etwas davon bestimmen. Die Bremische Gesellschaft hatte etwa den 6ten Theil der Witwenpensionen mehr zu erwarten, da sie die Waisen-Familien gleich einer Witwe zu pensioniren und bis zum vollendeten 15ten Jahre des jüngsten Kindes damit fortzufahren beschloss. Da aber die Waisen-Familien der Herrn Professoren bis zum vollendeten 20sten Jahre des jüngsten Kindes dieses geniessen sollen, so müssen doch wohl gegen 12 Witwenpensionen über 2 Waisenpensionen gerechnet werden.

Ich halte es also für rathsam, dass man zu 12 als dem Maximo der Witwenzahl noch wenigstens 2 addire, so dass der Divisor, worin die jährlichen Einkünfte von den Fonds der Casse und sonst dividirt werden, auf 14 gesetzt werde. Da nun jetzt nur 10 Witwen vorhanden sind, so darf man die sämtlichen jährlichen Revenüen der Casse nicht unter diese 10 vertheilen, weil sonst die in der Folge hinzukommenden Witwen würden verkürzt werden, sondern man muss in 14 dividiren, so wird innerhalb 10 Jahren der Fonds auf etwa 75 Witwenportionen verstärkt sein, wovon die Zinsen noch auf eine Pension mehr als vorhin zureichen werden, so dass man alsdann, wenn das wahre Maximum der Witwen- und Waisenpensionen eintreten wird, 15

Da dieses Gutachten und die ihm gegebene Auslegung die eigentliche Grundlage von derjenigen Einrichtung bilden, die den Hauptgegenstand der 1. Abtheilung meiner Denkschrift ausmacht, nemlich von der Progressionsnormirung, so werde ich solches, weiter unten, einer ausführlichen und genauen Prüfung unterwerfen, und beschränke mich daher hier, einstweilen, auf folgende Bemerkungen.

Aus den Acten ist nicht zu ersehen, weshalb Kritter im Anfange seines Gutachtens von 22—24 verehelichten Professoren spricht, da P. in seinem Schreiben ausdrücklich 26, und nur diese Zahl, genannt hatte. Ich vermuthe aber, dass Kritter jene Zahlen 22—24 wie die für eine *frühere* Zeit gültigen angenommen hat. Meines Wissens sind aber keine vollständige Register über die persönlichen Verhältnisse der Witwenkassen-Mitglieder in der Art geführt, dass für jeden beliebigen Zeitpunkt die Anzahl der *Verehelichten* daraus entnommen werden könnte. Entweder also hat Kritter jene Zahlen nur aus der Zahl aller Participanten in früherer Zeit nach einer ungefähren Schätzung *geschlossen*, oder sie beruhen auf besondern Mittheilungen, welche dann, der Natur der Sache nach, sich nur auf Zeitpunkte beziehen können, die nicht viele Jahre rückwärts lagen, und im Gedächtnisse noch fortlebten.

Kritter's Antwort auf die erste Frage besteht dann kurz darin, dass man für die Zeit, wo das Maximum eingetreten sei, Eine Witwe gegen etwa zwei stehende Ehen rechnen könne, also für jene 22—24 Ehen 12 Witwen, was sich wie er angibt nach dem Durchschnitt der letzten 17 Jahre in so fern bestätigt habe, als bald mehr bald weniger als 12 Witwen vorhanden gewesen seien. Dass dann die der dermaligen Zahl von 26 Ehen entsprechende Witwenzahl um Eine grösser sein würde, ist nicht ausdrücklich gesagt, aber implicite darin enthalten. Auf die zweite Frage gibt er an, dass nach den Erfahrungen der Bremischen Witwenkasse, wo die Waisenpensionirung nur bis zum 18ten Jahre daure, man auf eine Vergrösserung der Pensionenzahl um den sechsten Theil rechne; bei der hiesigen also, wo die Dauer 2 Jahre länger sein solle, doch wohl etwas mehr annehmen müsse. — Bei den 24 Ehen kommen wir demnach auf etwas mehr als 14, bei den 26 Ehen, nachdem ihre Wirkung ganz eingetreten, auf 15 nach Kritter's Worten, oder auf etwas mehr als 15⅙, d. i. auf nahe 16 nach den von ihm ausgesprochenen Grundsätzen.

Ob, *ganz abgesehen von der nähern Prüfung des Inhalts des Gutachtens*, eine derartige Behandlung des Gegenstandes eine *umständliche* und *genaue* Untersuchung, wie Kaestner für nothwendig gehalten hatte, genannt werden könne, lasse ich hier auf sich beruhen. P. entwarf nun aber, auf den Grund dieses Gutachtens, ein P. M., worin er zeigt, dass wenn die von dem Curatorium vorgeschlagene Erhöhung der Pensionen, ohne weitere besondere Vergrösserung für die sechs ältesten Witwen, für alle gleichmässig auf 130 Rth. festgesetzt werde, dies ohne alle Gefahr für die Kasse auch dann geschehen könne, wenn die jährlichen Beiträge nicht erhöhet würden; dass aber, im Fall die Erhöhung der Beiträge auf die vom Curatorium angegebene Art, angenommen werde, auch die Verlängerung der Waisenpensionen um so sicherer eingeführt werden könne, weil nach den obwaltenden Umständen ein baldiges Wirksamwerden dieser Abänderung nicht zu erwarten sei. P. schliesst endlich seinen Vortrag, dem ich, *bis hieher*, meinen vollen Beifall zu geben keinen Anstand nehme, mit folgendem kurzen Zusatz, den ich, da hier *zum erstenmale* der Gegenstand meiner eignen Untersuchung, nemlich die Progressionsnormirung, auf den Schauplatz tritt, vollständig und treu mit P.'s eignen Worten hier abschreibe:

'Bei der allgemeinen Erhöhung der Pensionen auf 130 Rth. scheint mir nicht die mindeste Gefahr zu sein:

Pensionen wird bezahlen können; und sollte auch etwas übrig bleiben, so könnte vorzüglich armen Witwen etwas zugelegt werden.

Auf mögliche Unglücksfälle bei den belegten Capitalien, Verlust an Zinsen und andern Ausgaben müsste doch auch wohl etwas gerechnet werden.

Göttingen den 19. Juli 1791. J. A. Kritter.

Vielmehr scheint mir noch

3) möglich und dienlich, dass es jetzt zur beständigen Norm gemacht werden dürfte, die Witwenpensionen jedesmal um 10 Thl. zu erhöhen, so oft sich der Fundus um 5000 Thl. vermehr hat und die Zahl der Witwen noch nicht über das maximum von 15 gestiegen ist. Es ist klar, dass man dies thun kann, denn eine Erhöhung von 10 Thl. für 15 Witwen beträgt 150 Thl. und 5000 Thl. zu 3 proc. geben eben so viel Interesse. Dass aber der nächste Erhöhungs-Termin bald eintreten kann, wenn auch unsere Kasse keine ausserordentliche Zuflüsse erhält, dies lässt sich wenigstens sehr wahrscheinlich berechnen. Da wir gegenwärtig nur 10 Witwen zu pensioniren haben, so müssen, wenn der neue Zuschuss zu den Beiträgen bewilligt wird, alle Jahr über 1000 Thl. der Kasse bleiben, folglich 5000 Thl. schon in 5 Jahren zum fundus hinzugekommen sein, wenn sich die Zahl der Witwen indessen nicht vermehrt; setzt man aber auch den höchst unwahrscheinlichen Fall, dass die Zahl jedes Jahr um Eine Witwe vermehrt würde, bis sie das maximum von 15 erreicht hätte, so würde es doch kaum 10 Jahre anstehen können.

Gut möchte es wenigstens sein, wenn in dem Bericht an Kön. Regierung dieser Umstand erwähnt würde.'

Da über den wesentlichen Inhalt dieses Artikels weiter unten bei der Prüfung des Kritter'schen Gutachtens und der daran geknüpften Folgerungen, und an andern Stellen das Nöthige vorkommen wird, so sollen hier nur ein paar Nebenumstände berührt werden.

I. Auffallend ist, aus der Feder des Curators der Witwenkasse, die *unrichtige* Angabe der Witwen-, oder vielmehr Pensionenzahl. Es waren damals nicht 10 Witwen, und auch nicht 10 Pensionen, sondern 8 Witwen, und, unter Hinzuzählung der Kinder des am 8. Junius 1794 verstorbenen Professors B., zusammen 9 Pensionen. Auch lässt sich diese Unrichtigkeit nicht etwa dadurch erklären, dass der Abgang der zuletzt an fremdem Orte (Halle) verstorbenen Witwe (M.) dem Curator damals noch unbekannt gewesen sei; denn es findet sich, dass der Betrag der Pension für das letzte halbe Jahr (Michaelis 1793 bis Ostern 1794) auf eine von P. mitunterzeichnete und vom 3. Mai 1794 datirte Quittung der Erbin erhoben ist.

II. Die Schlusszeile ('Gut möchte es wenigstens u. s. w.') lässt uns etwas im Dunkeln rücksichtlich der Frage, für was der abgeschriebene Artikel eigentlich genommen werden soll, ob für einen förmlichen zur Beschlussnahme verstellten Antrag, oder nur für eine hingeworfene Idee. Von einer für alle künftigen Zeiten geltenden bestimmten Normirung der veränderlichen Pensionshöhe war weder in dem Rescript, noch in den vorhergehenden Verhandlungen die Rede gewesen. Es war dies also ein *vierter* zu den bereits in Deliberation begriffenen neu hinzukommender Gegenstand, und zwar ein solcher, der den drei andern an Wichtigkeit keinesweges nachstehend die sorgfältigste allseitige Prüfung erforderte. Wer einen auf ein solches Ziel eigens gerichteten Antrag einbringt, ist sich doch der Wichtigkeit der Sache bewusst, welche durch die Bezeichnung einer solchen Lebensfrage mit 'dieser Umstand' schwerlich genug hervortritt. Bei einer Äusserung hingegen, die nur den Charakter eines gelegentlich hingeworfenen Gedankens hat, ist man schon nachsichtiger gegen eine durch Unachtsamkeit entschlüpfte Unrichtigkeit, und gegen eine noch mangelhafte Wortfassung. Durch die Numerirung mit (3) lasse man sich hiebei nicht irre machen. P. *zählt* in seinem Aufsatze nicht die Vorschläge, sondern die aus den vorausgeschickten Rechnungsüberschlägen von ihm abgeleiteten Folgerungen. Sein Nr. 1 enthält *die* Folgerung, dass alle gegen die Verlängerung der Waisenpensionen vorgebrachten oder vorzubringenden Einwürfe sich erledigen, wenn man die proponirte Erhöhung der Beiträge annehme; und sein Nr. 2 die, dass zwar die allgemeine Erhöhung der Pensionen auf 130 Rth. füglich sofort geschehen könne, die exceptionelle Erhöhung auf 150 Rth. für die sechs ältesten Witwen hingegen weder gerecht noch rathsam sei.

Unter solchen Umständen tritt die Wichtigkeit der Function des Vorsitzenden einer berathenden Körperschaft hervor, der die einzelnen Fragepunkte scharf zu sondern, jeden an seinen rechten Platz zu stellen, und in lichtvoller alle Zweideutigkeit ausschliessender Wortfassung zur Berathung und Abstimmung zu bringen hat.

Im vorliegenden Falle war es F., dem als zeitigem Prorector dieses Geschäft oblag. Er setzte unter dem 22. Julius das Rescript, das Kritter'sche Gutachten und das P.'sche P. M. bei sämmtlichen Professoren in Umlauf, mit einer Aufforderung, welche ich in F.'s eignen Worten vollständig hieher setze:

> Sie möchten sich schriftlich darüber erklären, ob Sie dem ganzen Vorschlage P.'s beitreten, oder über die einzelnen Fragepunkte, nemlich 1) in welchem Maasse die Erhöhung der Pensionen gerecht und rathsam scheine? 2) Ob die Verlängerung der Dauer der Pension nach der Eltern Tode bis zum 20sten Jahre des jüngsten Kindes gewünscht werde? 3) Die von Königlicher Regierung in Vorschlag gebrachte Erhöhung der jährlichen Beiträge auf 10 Thl. C. M. genehmigt werde, ohne Bedingung; oder unter der Bedingung von Nr. 2.

Man sieht, dass der letzte Artikel von P.'s P. M. (oben S. [136]) mit keinem Worte erwähnt ist. Ich selbst habe nun zwar keinen Zweifel, dass F. denselben (vielleicht die schwere Wichtigkeit 'dieses Umstandes' nicht genug würdigend) als ein schon in seinem Nr. 1 mitenthaltenes Anhängsel betrachtet haben mag: aber eben so wenig zweifle ich, dass diese Nichterwähnung, zumal im Contraste zu der präcis logischen Form, in welcher F. seinen dritten Fragepunkt auftreten lässt, sehr dazu beigetragen hat, jene Hauptfrage für viele, vielleicht für die meisten Votanten in den Hintergrund zu rücken. Ich habe daher geglaubt, diese an sich geringfügigen Nebenumstände hier mitberühren zu müssen, weil dadurch die sonst so auffallende Erscheinung erklärlicher wird, dass von 41 Votanten auch nicht ein einziger sich in eine Discussion über jenen Hauptfragepunkt eingelassen hat (wenn man nicht E.'s Votum S. [139] dafür gelten lassen will); ja dass er von den meisten Votanten gar nicht, und eigentlich nur von zwei Votanten auf ganz unzweideutige Art überhaupt erwähnt ist.

Diese schriftlichen Verhandlungen (vom 22. Julius bis 6. August) sind sehr voluminös, und manche einzelne Abstimmungen sehr ausführlich; allein sie drehen sich fast ausschliesslich um die F.'schen Fragepunkte 2 und 3, welche, besonders der letzte, vielfachen Widerspruch fanden; imgleichen um einige neue im Laufe der Verhandlung eingebrachte Vorschläge, namentlich den einer Aufhebung der bisherigen Freiheit, erst später unter doppelter Nachzahlung der Beiträge in die Witwenkasse eintreten zu können, welcher Vorschlag von einigen Votanten unterstützt, von andern nachdrücklich zurückgewiesen wurde. Ich werde von diesen Abstimmungen nur einige wenige anführen, die mit meinem Gegenstande in näherer Verbindung stehen.

R. erklärt sich überhaupt allen Veränderungen abgeneigt, will aber den Beschlüssen der Mehrheit beitreten. Den P.'schen Art. 3 erwähnt er zwar gar nicht, wohl aber die Principfrage, welche demselben zum Grunde liegt, und in Beziehung auf welche er der von P. bei der frühern Abstimmung aufgestellten Behauptung (oben S. [133] Z. [21]) sehr entschieden entgegentritt.

Er könne, sagt er, sich nicht von der Richtigkeit des Grundsatzes überzeugen, dass bei Erhöhung der jetzigen Witwenpension darauf gesehen werden müsse, dass in der Folge nicht etwa die Nothwendigkeit entstehe, sie zu vermindern, und den künftigen Witwen weniger zu geben, als die jetzigen erhalten. Dieser Grundsatz würde allerdings richtig sein, wenn (wie bei andern Witwenkassen) die Existenz der Kasse bloss auf die Beiträge basirt wäre. Allein, da die Professoren-Witwenkasse ein Beneficium sei, die Beiträge fast für Nichts zu rechnen, und die Theilnahme an dem Beneficium für jeden Professor eine Bedingung seiner Vocation: so gelte, weit natürlicher, der Grundsatz

> Jede Witwe erhält die möglichst hohe Pension, die der Fonds bei ihrem Lebzeiten verstattet.

20

Bei diesem Grundsatze habe niemand Ursache sich zu beklagen, der Fonds steige, oder falle. Sage man, es könne sein, dass die künftigen Witwen weniger erhalten, wenn der Fonds sinkt, so antworte er (R.), es könne sein, dass die jetzigen Witwen weniger erhalten, als die künftigen, wenn der Fonds steige, welcher letztere Fall wahrscheinlicher sei als der erstere.

R. stellt demnach, wie man sieht, der P.'schen Behauptung, die künftige Witwe werde lädirt, wenn sie weniger erhalte als eine frühere erhalten hat, implicite die Erwiderung entgegen, dass man dann, genau mit demselben Recht, behaupten könne, die jetzige Witwe werde lädirt, wenn sie weniger erhalte als eine künftige.

Sch. wiederholt den eben angeführten Grundsatz ('Jede Witwe erhält die möglichst u.s.w.') mit dem Zusatz: 'H. H. R., deucht mich, hat diesen Satz zur Evidenz gebracht, darauf ich mich beziehe. *Auch liegt derselbe in Nr. 3 des P.'schen Vorschlags zum Grunde*'. Nachdem Sch. auch noch den Umstand hervorgehoben hat, dass die Kasse ein Beneficium, eine pars salarii, und die Theilnahme daran mit einer Art von, wiewohl gelindem und gerechtem, Zwange verbunden sei, fährt er fort:

> Aus diesem Unterschied ergibt sich unter andern, dass der Satz 'wir sind den gegenwärtigen Witwen *so viel* schuldig, wie den künftigen und umgekehrt' wenn das *so viel* das numeräre ausdrücken soll, hier nicht anwendbar sei. Die Kasse hat etwas actienmässiges, das, unter der Gewalt der Conjuncturen stehend, steigt und fällt.
>
> Erhöhung der Witwenpensionen: die Maasse derselben (*so wie auch der Verminderung*) hat Hr. C. R. P. durch eine unwandelbare Regel bestimmt.

Ich habe diese zwei Stellen wörtlich abgeschrieben, weil daraus, und namentlich aus den beiden von mir doppelt unterstrichenen, ganz unwidersprechlich hervorgeht, dass Sch. den P.'schen Art. Nro. 3 in dem Sinn der ersten Interpretation (oben S. [129]) aufgefasst hat. Mehrere andere Nachvotirende, wie B., H., O., R., T., haben, obwohl ohne Specification der Fragepunkte, dem Sch.'schen Votum beigestimmt. Andererseits erkennt man hingegen in dem [auf folgender S.] anzuführenden E.'schen Votum die zweite Interpretation, welche auch seit 1837 in der Praxis befolgt ist, und ich meine daher, dass die Wortfassung der Progressionsnormirung, die wie die Vergleichung zeigt ohne Veränderung in das Rescript vom 20. November 1794 übergegangen ist, sehr füglich eine *unklare* genannt werden kann.

Ausser Sch. hat nur noch M. unsers Fragepunkts (P.'s 3) ausdrücklich und unzweideutig erwähnt: er sagt aber nichts weiter darüber, als dass das von P. angerathene *Festsetzen* einer Norm für das künftige Steigen der Pension vorzüglich wichtig scheine. Man könnte sagen, dass genau genommen hierin nur eine Billigung des Zwecks aber noch nicht bestimmt die Billigung des von P. proponirten Mittels liege, eben so wenig wie eine Erklärung, in welchem Sinn M. letzteres aufgefasst habe. Ohne indess darauf ein Gewicht zu legen, will ich nicht unbemerkt lassen, dass Meiners in seinem bekannten Werke über die Verfassung und Verwaltung deutscher Universitäten S. 95 die bestehende Progressionsnormirung auch eben so wie Brandes (S. oben S. [120]) mit den Worten anführt: *so lange* die Zahl der Witwen nicht über 15 hinausgehe.

Von P. selbst liegt über unsern Fragepunkt nichts weiter vor, als der oben S. [136] mitgetheilte Art. 3. Darf ich noch einen Augenblick bei der Frage verweilen, in welchem Sinn denn P. selbst ihn verstanden hat, so mache ich darauf aufmerksam, dass die Worte 'Es ist klar dass man diess thun kann' nur auf zwei Arten ausgelegt werden können; nemlich entweder ist P.'s Meinung gewesen, eine solche Erhöhung

> solle nur so lange gültig sein, als die Zahl 15 noch nicht überschritten sei, nach dem Ueberschreiten aber entweder wieder cessiren oder auf angemessene Weise modificirt werden

oder P. hat die Ueberschreitung der Zahl 15 für unmöglich, wenigstens für so sehr unwahrscheinlich gehalten, dass die Berücksichtigung eines solchen Falles ganz unnöthig sei.

Eine subtile Wortkritik könnte vielleicht Gründe auffinden, die für die erste Hypothese sprechen würden, wobei ich mich aber um so weniger aufhalten will, da ich selbst diese Hypothese für zulässig nicht halten kann, und zwar hauptsächlich aus dem Grunde, weil sonst P. mit seinen eignen Grundsätzen (oben S. [133]) in Widerspruch stehen würde. Ich glaube vielmehr, dass er, verleitet durch das Kritter'sche Gutachten, — oder, wie man auch sagen kann, und wie ich bald umständlich zeigen werde, durch seine unrichtige Auffassung dieses Gutachtens — die Zahl von 15 Pensionen wie eine unübersteigliche oder fast unübersteigliche Schranke betrachtet habe, unter deren Schutz er seinen Plan mit voller Sicherheit machen könne.

Einen Abglanz ähnlichen Vertrauens finde ich in dem Votum E.'s wieder, welches sich dadurch auszeichnet, dass es das einzige ist, welches der fatalistischen Zahl 15 erwähnt, und dessen wesentlicher Inhalt, so weit er hieher gehört, in folgendem besteht.

Die beiden F.'schen Fragepunkte 1 und 2, sagt E., müssten ihre Entscheidung allein durch den wirklichen Fonds und dessen Ertrag verglichen mit *den erprobten* von H. P. sehr einleuchtend vorgelegten Grundsätzen erhalten. Es könne sein, dass die verlängerte Dauer der Waisenpensionen verursache, dass die höchste Zahl der Witwen von 15 überstiegen werden müsse, was doch als mit der Sicherheit der Kasse unverträglich schlechterdings nie geschehen dürfe. Er halte daher für rathsam, die Verlängerung der Waisenpensionen nur mit der ausdrücklichen Beschränkung zu bewilligen, *so lange die Anzahl der Pensionen dadurch nicht über 15 gesteigert werde*. Diese Einschränkung scheine desto nothwendiger, weil die Berechnung der Verhältnisse der Kinder keine *so gewisse* Erfahrung für sich habe, wie die beobachtete Proportion der Witwen. Ich verstehe dies so: E., dessen Auffassung des P.'schen Plans offenbar der Sch.'schen gerade entgegengesetzt ist, halte zwar nach der Kritter-P.'schen Theorie für gewiss, dass die Anzahl der Witwen nie über die berechnete Zahl (also 13) gehen könne; es sei aber nicht eben so gewiss, dass nicht mehr als 2 Waisenpensionen dazu kommen könnten, und für den Fall, dass diess doch geschehe, und die Gesammtzahl der Pensionen dadurch über 15 getrieben werden würde, müsste die Beschränkung der Waisenpensionen vorbehalten werden.

Aehnliche Besorgnisse, dass die Anzahl der Waisenpensionen zu geringe angeschlagen sein möchte, waren auch von einigen andern Votanten geäussert; indessen ist weder denselben in dem Finalbeschlusse Folge gegeben, noch haben sie sich durch die Erfahrung bisher bestätigt. In der That haben von Errichtung der Witwenkasse bis jetzt noch niemals mehr als zwei Waisenpensionen gleichzeitig bestanden, wobei ich jedoch nicht unbemerkt lassen will, dass während eines kurzen Theils des Jahrs 1776 die Anzahl auf 3 gestiegen sein würde, wenn die Erstreckung der Waisenpensionen bis zum vollendeten 20sten Jahre schon damals Statt gefunden hätte.

Ganz anders aber verhält es sich mit der *Witwenzahl*. Die vermeinte Gewissheit, dass diese nicht über 13 steigen könne, ist durch die neuern Erfahrungen zerstört, indem sie schon einmal auf 22 gestiegen ist, und sogar der Durchschnittswerth während der letzten 8 Jahre etwas über 19 betragen hat. Schon lange vor 1794 war die Anzahl der Witwen (nemlich gleichfalls, ohne die Waisenpensionen mitzuzählen), einmal auf 14 gestiegen, und hatte während eines fünfjährigen Zeitraums (1774 — 1779) den Durchschnittswerth 13 behauptet. Diese Thatsache, die wohl dem Curator aber freilich nicht den votirenden Professoren bekannt sein konnte, hätte, aus dem allein zulässigen oben S. [130] Z. [4] angedeuteten Gesichtspunkte betrachtet, schon damals zum Beweise der Unrichtigkeit der P.-E.'schen Voraussetzung dienen können.

Da nun aber die Annahme der Zahl 13 für die höchste Witwenzahl auf dem Kritter'schen Gutachten beruhet, in welchem die Hälfte der Zahl der stehenden Ehen als maassgebend für das Maximum der Witwenzahl aufgestellt ist, so scheint der Schluss natürlich, dass Fehler in demselben sein möchten, und ich bin demnach an dem Punkt angelangt, wo ich dieses Gutachten selbst der Kritik unterwerfen muss.

Um diese vollkommen verständlich zu machen, bin ich genöthigt, einige Entwicklungen vorauszuschicken, in welchen mir zu folgen mancher vielleicht beschwerlich finden könnte, wenn von vorneherein noch nicht abzusehen ist, auf was sie hinauslaufen werden. Es wird deshalb, deucht mir, angemessen sein, wenn ich die vornehmsten Ausstellungen, welche das Kritter'sche Gutachten und die daraus gezogenen Folgerungen treffen, gleich hier an die Spitze stelle.

1) Die Anwendbarkeit des Verhältnisses von 1 Witwe gegen 2 stehende Ehen, auf die hiesige Professoren-Witwenkasse, ist nicht sicher; es ist vielmehr, wie schon oben S. [133] Z. [5] bemerkt ist, wahrscheinlich, dass nach den Verhältnissen dieser Kasse etwas mehr an Witwen gerechnet werden müsse.

2) Kritter's Behauptung [Z. 10 des Abdrucks] ist, auch wenn sie unabhängig von diesem vorausgesetzten Verhältnisse 2 : 1 vorgetragen wird, nemlich man könne annehmen, dass ein Durchschnitt von 10 Jahren immer schon hinreiche, das wahre für die Umstände der Kasse gültige Verhältniss sehr nahe anzugeben, ist durchaus falsch, und die Unrichtigkeit dieses Satzes ist auch ohne Berufung auf Erfahrungen, schon aus theoretischen Gründen nachzuweisen.

3) Weit wichtiger als diese beiden Ausstellungen ist der Umstand, dass P. das Kritter'sche Gutachten falsch ausgelegt hat, indem das, was P. unter Maximum der Witwenzahl verstand, und das, was man mit diesem Worte bezeichnet, wenn ein bestimmtes Normalverhältniss zwischen stehenden Ehen und Witwen aufgestellt wird, und was auch in Kritter's Gutachten eigentlich gemeint ist,

zwei sehr verschiedene Dinge sind.

Hierzu kommt noch der eben so wichtige Umstand

4) dass die numerischen Resultate, die für eine Gesellschaft von einem gewissen sich immer nahe gleich bleibenden Umfange zulässig waren, wesentlich abgeändert werden müssen, wenn dieser Umfang sich bedeutend erweitert, wie diess schon oben ausführlich abgehandelt ist.

Ich fange an mit der (fingirten) Annahme, dass durch das Zusammentreten einer sehr grossen Anzahl von Ehepaaren aus den verschiedensten Altersstufen eine Gesellschaft gebildet worden sei. Alljährlich wird eine Anzahl von Ehen durch den Tod des einen oder des andern Theils getrennt werden: dieser Abgang werde dadurch ersetzt, dass jährlich eine bestimmte Zahl neuer Ehepaare hinzutritt, so viele, dass im Ganzen der Bestand der Gesellschaft ungeändert bleibe. Von den im Laufe eines Jahres durch den Tod des Ehemannes entstehenden Witwen wird, da die Gesellschaft als sehr gross vorausgesetzt wird, ein verhältnissmässiger sehr kleiner Theil schon während desselben Jahres wieder absterben, wodurch mithin die Anzahl der am Ende des Jahres wirklich vorhandenen Witwen etwas modificirt wird. Ungefähr eben so viele neue Witwen werden am Ende des zweiten Jahres hinzugekommen, dagegen aber von den aus dem ersten Jahre herrührenden Witwen ein Theil schon wieder verstorben sein, so dass am Ende des zweiten Jahres die Anzahl der Witwen nicht ganz doppelt so gross sein wird, als am Ende des ersten. Am Ende des dritten Jahres sind wieder ungefähr eben so viele neue Witwen hinzugekommen, dagegen wird der Bestand, welcher zu Anfang des dritten Jahres vorhanden war, einen fast doppelt so grossen Abgang erlitten haben, als die Bilanz des zweiten Jahres ergeben hatte. Man sieht, dass auf diese Weise die Zahl der Witwen zwar fortwährend wächst, aber immer langsamer, bis sie zuletzt so gross geworden ist, dass der einjährige Abgang durch den Tod der Witwen, dem Zugang durch Absterben von Ehemännern aus der Gesellschaft, das Gleichgewicht hält: dann wird also der Beharrungszustand eintreten, indem die Witwenzahl ihr Maximum erreicht hat, und von da an ungeändert bleibt.

Fügen wir den obigen Voraussetzungen noch die bei, dass sowohl die Anzahl der in jedem Jahre

neuhinzukommenden Ehepaare, als das Verhältniss, nach welchem in einer solchen Gruppe die verschiedenen Altersstufen gemischt sind, Jahr für Jahr sich gleich bleibt, imgleichen, dass das Absterben genau mit den Mortalitätstafeln gleichen Schritt hält, so wird jener Beharrungszustand seinen Namen nach aller Strenge verdienen; sowohl die Anzahl der Ehepaare in der Gesellschaft wird ganz ungeändert bleiben, als die Anzahl der Witwen, nachdem diese ihren höchsten Werth einmal erreicht hat. Es ist ferner klar, dass, wenn man sich eine zweite ähnliche Gesellschaft vorstellt, in welcher die neubeitretenden genau in demselben Verhältnisse gemischt sind, wie in der ersten, welche aber doppelt so viele Ehepaare umfasst, die höchste Witwenzahl auch doppelt so gross sein werde; oder, um es allgemein auszudrücken, das Verhältniss der stehenden Ehen zu der Zahl der Witwen, nach eingetretenem Beharrungszustande, wird nicht von dem Umfange der Association (insofern er nur als constant bleibend betrachtet wird), sondern bloss von dem Verhältnisse abhängen, nach welchem die verschiedenen Altersstufen der neu beitretenden gemischt sind, und, wenn letzteres Verhältniss vollkommen bekannt wäre, würde ersteres sich a priori durch Rechnung bestimmen lassen. Eintreten wird übrigens der Beharrungszustand, wo nicht früher, doch jedenfalls dann, wenn die Stammtheilnehmer alle ausgestorben sind, was, wenn die extremsten Fälle berücksichtigt werden sollen, möglicherweise sich bis 80 Jahre nach dem ersten Zusammentreten verzögern könnte. Indessen kann man annehmen, dass schon nach 45—50 Jahren der wirkliche Zustand dem Beharrungszustande sehr nahe gekommen sein wird*). Um die Vorstellungen mehr zu fixiren, will ich beispielshalber bestimmte Zahlen nennen, welche jedoch, da sie nur zur Erläuterung des sonst abstracten Vortrags dienen sollen, auf vollkommen scharfe Angemessenheit keinen Anspruch machen. Die Gesellschaft bestehe aus 2600 Ehepaaren, zu denen jährlich 130 neue hinzutreten, während durchschnittlich eben so viele abgehen, und zwar 70 durch den Tod des Mannes, 60 durch den Tod der Frau. Von den während eines Jahres entstehenden 70 Witwen stirbt eine schon in demselben Jahre, so dass am Schluss des ersten Jahres 69 Witwen vorhanden sind. Von diesen sind am Ende des zweiten Jahres weitere 2 verstorben, dagegen wieder 69 neue Witwen hinzugekommen, folglich zusamen 136 vorhanden. Von diesen sterben während des dritten Jahrs 4, und indem die neu hinzugekommenen wieder 69 betragen, ist die Gesammtzahl am Schluss des dritten Jahres 201. Auf diese Weise immer langsamer fortschreitend mag die Zahl der Witwen nach 10 Jahren 600, nach 20 Jahren 1000, nach 30 Jahren 1200, nach 40 Jahren 1280, nach 45 Jahren 1294, nach 50 Jahren 1298 betragen, zu welchen später noch ein paar hinzukommen, und das wirkliche Maximum 1300 hervorbringen. Hier hätten wir demnach das Verhältniss der stehenden Ehen zu der höchsten Witwenzahl wie zwei zu eins.

In einer wirklichen Gesellschaft, wo die geforderten Bedingungen nicht in ihrer scharfen Strenge, sondern nur durchschnittlich gelten, wird es natürlich nicht so regelmässig hergehen können, wie in der fingirten. In jener werden jährlich nicht genau 130 neue Ehepaare beitreten, sondern in einem Jahre etwas mehr, in einem andern etwas weniger. Eben so werden die verschiedenen Altersstufen der neu beitretenden in einem Jahre etwas anders gemischt sein, als in einem andern, oder als in der idealen Gesellschaft angenommen war, zum Beispiel, das Durchschnittsalter der Männer, oder das der Frauen, oder der durchschnittliche Unterschied beider wird einmal etwas grösser, ein andermal etwas kleiner sein. Endlich wird auch von einer gegebenen Personenmenge das Absterben nicht *genau* nach den Mortalitätstafeln erfolgen, sondern in einem Jahre werden diese etwas zu wenig, in einem andern etwas zu viel angeben. Der Erfolg von allem dem wird sein, dass in der wirklichen Gesellschaft zu einer Zeit die Zahl der Witwen etwas grösser sein wird, als in der idealen, zu einer andern etwas kleiner. Ein eigentlicher Beharrungszustand *im strengsten Sinn* wird in jener niemals eintreten, sondern ein Fluctuiren um einen Mittel-

*) Kritter begnügt sich, in seinem Gutachten, schon mit 40 Jahren.

zustand her. Zu der Zeit also, wo die Witwenzahl in der idealen Gesellschaft das Maximum 1300 ganz oder fast ganz erreicht haben würde, wird in der wirklichen ein Auf- und Abschwanken über und unter diese Zahl hinaus, Statt finden. Es werden zu einer Zeit 1350, auch wohl 1360, da sein können, zu einer andern 1250, auch wohl nur 1240. Allein ganz unmöglich ist es, hier scharfe Grenzen zu setzen, und von irgend einer Zahl, man wähle welche man wolle, mit Bestimmtheit zu behaupten, dass diese zwar noch erreicht, die nächst höhere aber nicht mehr erreicht werden könne. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, in ihrem heutigen Zustande, lehrt solche Schwankungen auf ein bestimmtes Maass zurückführen, welches aber nicht von dem Extrem hergenommen wird, sondern von der Berücksichtigung aller Zwischenstufen und ihrer relativen Wahrscheinlichkeit. Natürlich ist hier durchaus nicht der Ort, diese Theorie weiter zu verfolgen; auch hängt ihre Anwendbarkeit auf concrete Fälle davon ab, dass man entweder eine mathematisch präcise Kenntniss von den bedingenden Elementen habe (wie bei Glücksspielen z. B. gewöhnlich der Fall ist), oder dass ein zureichender Reichthum von Erfahrungen zu Gebote stehe. Beides trifft aber in Beziehung auf solche Gegenstände, wie Witwenkassen sind, nicht zu, so dass a priori für eine solche Bemessung nichts geschehen kann. Aber *das* lehrt doch die Theorie: aus den Schwankungen, die in einem Falle vorgekommen sind, auf diejenigen zu schliessen, die mit gleichem Recht in einem andern qualitativ gleichen aber quantitativ verschiedenen Falle erwartet werden müssen. Nach ihrer absoluten Grösse werden in einer grossen Gesellschaft die Schwankungen grösser sein, als in einer kleinen; nach der relativen aber wird es sich umgekehrt verhalten. Wenn also z. B. eine Gesellschaft von obigem Zuschnitt zu einer Zeit bis 60 Witwen mehr, zu einer andern bis 60 weniger Witwen gezählt hätte, als die Durchschnittsgrösse 1300, so jedoch, dass die Zahl 1360, oder eine ihr nahe kommende, mit einiger Andauer vorgekommen wäre, und eben so die Zahl 1240 oder eine ihr nahe liegende, so würde man schliessen dürfen, dass in einer andern Gesellschaft, die bei sonst ähnlichen Verhältnissen durchschnittlich nur 26 Ehepaare zählt, die Normalwitwenzahl eben so leicht um 6 vermehrt oder vermindert erscheinen könne. Oder, etwas anders ausgedrückt: Eben so gut, wie in der grossen Gesellschaft zwischen 1360 unn 1240, wird die Witwenzahl in der kleinen zwischen 7 und 19 auf und abschwanken können; das *absolute* Schwanken ist, wenn der Umfang der grossen Gesellschaft 100 mal grösser ist wie der Umfang der kleinen, in der grossen zehnmal so gross wie in der kleinen; mit dem *relativen* Schwanken, welches in der grossen Gesellschaft (nach obigen Zahlen) $4\frac{8}{13}$ Procent betragen würde und bei der kleinen $46\frac{2}{13}$ Procent, verhält es sich gerade umgekehrt.

So viel von der Sache. Was den Namen betrifft, so habe ich, eben, für die Zahlen der Beispiele 1300 und 13, anstatt der weitschweifigen Umschreibung 'Durchschnittszahl der Witwen nach eingetretenem Beharrungszustande' die Benennung 'Normalwitwenzahl' gebraucht, welche man leicht als nicht unpassend gelten lassen wird: aber *üblich* ist sie meines Wissens nicht. Es ist vielmehr ganz gewöhnlich, jenen Begriff kurzweg mit *höchster Witwenzahl* zu bezeichnen, wobei von den regellosen Fluctuationen ganz abstrahirt, und nur der Beharrungszustand im Allgemeinen im Gegensatz zu der vorhergegangenen Zeit berücksichtigt wird. Für einen einigermaassen Sachverständigen wird hiebei ein Misverständniss nicht leicht möglich sein; jedenfalls aber ist so viel gewiss, und aus dem Gutachten, wenn man es nur mit einiger Aufmerksamkeit lieset, sogleich zu erkennen, dass Kritter in demselben die höchste Witwenzahl in *diesem* Sinn und nur in diesem Sinn verstanden hat. P. hingegen dachte sich dabei etwas ganz anderes, nemlich die Zahl, über welche die Anzahl der Witwen nach höchster Wahrscheinlichkeit niemals sollte hinausgehen können. Beide Zahlen vermengen, ist ungefähr dasselbe, als wenn man den Durchschnittspreis eines Handelsartikels mit dem höchsten Preise verwechselte. Es ist hiedurch die oben S. [140] unter 3 gemachte Ausstellung hinreichend bewiesen. Was aber eine Frage nach der höchsten Witwenzahl im P.'schen Sinne des Worts betrifft, so ist sie eine solche, auf welche eine bestimmte Antwort sich gar nicht geben lässt.

Aus den frühern Erfahrungen jedoch [S. 139 unten] hätte man, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass in den ersten Decennien die Gesellschaft einen viel kleinern Umfang hatte als 1794, und dass jene Erfahrungen einer Zeit angehörten, wo der entsprechende Beharrungszustand als noch nicht ganz erreicht angesehen werden muss, schliessen können, dass man fortan eine die Durchschnittszahl 13 weit überschreitende Witwenzahl für sehr wohl möglich halten müsse. (Dass bei allem, was ich hier gesagt habe, die nach Kritter's Gutachten noch erforderliche Vergrösserung um $\frac{1}{4}$, wegen der Waisenpensionen, noch nicht mit einbegriffen ist, wird man nicht übersehen dürfen).

Die Kritter'sche S. [140] Nr. 2 gerügte Behauptung ist zwar durch die Erfahrung genugsam widerlegt: es ist jedoch nicht überflüssig, zu der eigentlichen etwas versteckt liegenden Quelle des Irrthums hinaufzusteigen. Bei aller Anwendung des Calcüls sowohl auf Gegenstände der Natur als auf sociale Verhältnisse, pflegen die Erfahrungsdata selten in der reinen Gestalt, wie man sie eigentlich braucht, aufzutreten, sondern fast immer mehr oder weniger behaftet mit Störungen oder Schwankungen, die in ihrem Wechsel keiner Regel gehorchen, und man sucht dann, wie jedermann weiss, den daraus entstehenden Nachtheil wenn auch nicht aufzuheben, doch so viel thunlich zu vermindern, dass man aus vielen einzelnen Resultaten das Mittel nimmt. Man rechnet darauf, dass bei einer solchen Benutzung einer grossen Zahl von Fällen die zufälligen Schwankungen einander grösstentheils compensiren, und legt dann dem Mittelwerthe eine desto grössere Zuverlässigkeit bei, je mehr partielle Resultate zugezogen sind. Dieses ist auch im allgemeinen vollkommen richtig, und durch consequente weitere Entwicklung und umsichtige Ausbeutung dieses Princips sind besonders in den Naturwissenschaften nicht selten die belohnendsten Früchte, selbst glänzende Resultate, gewonnen. Allein die Sicherheit des Grundprincips beruhet auf einer wesentlichen Bedingung, die, häufig genug, auch von Gelehrten vom Fach ausser Acht gelassen wird, und die darin besteht, dass die an den einzelnen Beobachtungen oder Erfahrungen haftenden regellosen Störungen oder Schwankungen von einander ganz unabhängig sein müssen. Das Urtheil, ob eine solche Unabhängigkeit vorhanden sei oder nicht, kann zuweilen sehr schwierig und ohne tiefes Eindringen in das Sachverhältniss unmöglich sein, und wenn darüber Zweifel zurückbleiben, so wird auch das den Endresultaten beizulegende Gewicht ein precäres sein.

Wäre z. B. die Rede von einem meteorologischen Elemente etwa von der Menge des an einem bestimmten Orte jährlich fallenden Regens, so ist diese bekanntlich in verschiedenen Jahren sehr ungleich; der durch die allgemeinen örtlichen Verhältnisse des Platzes bedingte Normalwerthwird aber an einem Durchschnitt von zehn Jahren mit viel grösserer Sicherheit erkannt, als wenn man sich bloss an ein einzelnes Jahr halten wollte. Der Grund ist aber der, weil zwischen den in den einzelnen Jahren vorkommenden Abweichungen von dem Normalwerthe kein besonderer Zusammenhang ist, vielmehr, wie auch die Erfahrung bestätigt, eine grosse Minus-Abweichung eben so leicht in einem Jahre vorkommen kann, welches unmittelbar auf ein Jahr mit grosser Plus-Abweichung folgt, wie in jedem andern.

Allein jene wesentliche Bedingung fehlt bei den gezählten Witwen aus auf einander folgenden Jahren, eben weil der Uebergang von einer Zahl zu einer bedeutend verschiedenen nur allmählich geschehen kann. Wenn z. B. in der oben zur Erläuterung angeführten grössern Gesellschaft, wo der *durchschnittliche* jährliche Zugang zu 69 angenommen ist, und eben so gross, nach erreichtem Beharrungszustande, der jährliche Abgang, der Bestand einmal auf 1240 heruntergekommen ist, oder dermalen die negative Abweichung — 60 Statt findet, so ist die grösste an Unmöglichkeit grenzende Unwahrscheinlichkeit da, dass im Jahre darauf eine positive Abweichung vom Normalwerthe Statt haben werde. Bei einer kleinen Gesellschaft wie die unsrige sind sehr oft die gezählten Witwen des folgenden Jahres noch ganz die nämlichen wie im vorangegangenen, und selbst nach 10 Jahren wird in der Regel nur der kleinere Theil erneuert sein. Eine Durchschnittszahl aus 10 auf einander folgenden Jahren ist daher noch kein Mittel aus 10 von einander ganz unab-

hängigen Erfahrungen, und kann über die eigentliche Normalzahl noch keinen viel sicherern Aufschluss geben, als die Erfahrung von einem einzelnen Jahre. Um das vergrösserte einem Durchschnittswerthe beizulegende Gewicht schätzen zu können, kommt es wesentlich darauf an, von wie vielen von einander ganz unabhängigen Gruppen die Erfahrungen hergenommen sind. Da nun die durchschnittliche Dauer eines Witwenthums gegen 20 Jahre beträgt, so würde bei empirischer Bestimmung der Normalzahl selbst ein vierzigjähriger Durchschnitt noch gar keine sehr sichere Bürgschaft für Elimination der Schwankungen gewähren. Dass vierzig Jahre nach einander die Witwenzahl beständig unter dem den allgemeinen Verhältnissen der Gesellschaft entsprechenden Normalwerthe bleibe, ist im Grunde eben so wenig für eine ganz ausserordentliche Erscheinung anzusehen, als wenn ein Pharaospieler zweimal nach einander gewinnt, und die Lehre, welche man hieraus ziehen muss, ist, dass von der andern Seite in jener Beziehung auch 40 ununterbrochen magere Jahre eben so leicht möglich sind, wie 40 ununterbrochen fette.

Das Zahlenverhältniss zwischen stehenden Ehen und Witwen, welches für die Professoren-Witwenkasse in Kritter's Gutachten wie 2 : 1 vorausgesetzt ist, wird für Gesellschaften, welche verschiedenen Lebenskreisen angehören, ein sehr verschiedenes sein können. Vergleichen wir z. B. eine Witwenkassengesellschaft wie die unsrige mit der Gesammtheit aller stehenden Ehen und Witwen in einem ganzen Lande zunächst nur in Beziehung auf den allgemeinen [S. 140 oben] angegebenen Bestimmungsgrund, so sieht man leicht, dass in jener verhältnissmässig mehr Witwen gegen eine bestimmte Zahl von Ehen gerechnet werden müssen als in dieser. Bei der grossen Masse der Landeseinwohner fallen durchschnittlich die Verheirathungen in ein früheres Alter, und der Unterschied des Alters von Mann und Frau ist nach dem Durchschnittswerthe geringer, als bei Universitätsprofessoren *). Dazu kommt, dass in unsere Witwenkasse manche Mitglieder schon verheirathet eintreten, während in die Listen von einem ganzen Staate die sämmtlichen Ehepaare gleich von ihrer Verheirathung an eingerechnet werden. Allein die Wirkung dieser beiden Ursachen ist nur eine geringe im Vergleich zu dem Einfluss eines andern Umstandes, welcher oben S. [140 ff.] bei der abstracten Behandlung der Sache noch bei Seite gesetzt wurde, nemlich, dass Abgang der Witwen nicht allein durch den Tod, sondern auch durch eine Wiederverheirathung erfolgen kann. In einer Witwenkasse, wo eine sich wieder verheirathende Witwe allen weitern Anspruch auf die Pension verliert, pflegen Wiederverheirathungen der Witwen selten vorzukommen, und namentlich zählt unsre Witwenkasse in dem ganzen Zeitraume ihres Bestehens nur einen einzigen Fall der Art; für ein ganzes Land hingegen nimmt man der Erfahrung zufolge an, dass aus dem ganzen Bestand der Witwen etwa der dreissigste Theil alljährlich durch Wiederverheirathung ausscheidet, und hiedurch wird das Verhältniss der stehenden Ehen zu den Witwen wesentlich abgeändert. Endlich hat auch in einem Lande, dessen Bevölkerung schon seit längerer Zeit im Zunehmen begriffen gewesen ist, diese Zunahme einen wesentlichen Einfluss auf das Verhältniss der *coexistirenden* Ehen und Witwen, indem sich dann mehr stehende Ehen gegen Eine Witwe vorfinden werden, als ohne jenen Umstand da sein würden.

Als Erfahrungssatz wird gewöhnlich aufgestellt, dass für ein ganzes Land vier stehende Ehen gegen eine Witwe zu rechnen seien. Die von Quetelet für Belgien angegebenen Zahlen stimmen mit diesem Verhältniss fast genau überein. Für das ganze Königreich Hannover ergeben die Zählungen von 1833—1842 eine etwas kleinere Zahl, nemlich 3,74 stehende Ehen gegen eine Witwe; unterscheidet man aber die einzelnen Landestheile, so zeigen sich sehr grosse Ungleichheiten, es sind z. B.

*) Aus unsrer Witwenkasse liegen mir die Data für das Alter nur von 62 Ehepaaren vor, wonach der durchschnittliche Unterschied 9 Jahre beträgt. Bei der Gesammtheit der Einwohner eines ganzen Landes wird man schwerlich auch nur einen halbsogrossen durchschnittlichen Unterschied annehmen können.

in der Landdrostei Stade 3,21
in der Landdrostei Aurich 3,25
in der Bergbauptmannschaft Clausthal 2,56

stehende Ehen gegen eine Witwe.

In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts hat man manche Witwenkassen zu Grunde gehen sehen, weil sie auf die (obigen Bemerkungen zufolge ganz falsche) Voraussetzungen gegründet waren*), dass das Verhältniss der stehenden Ehen zu den Witwen, welches sich aus Zählungen für ein ganzes Land ergibt, auch für Witwenkassen als maassgebend betrachtet werden dürfe. KRITTER war einer von denen, welche nicht ermüdeten, solche falsche Grundsätze zu bekämpfen. So oft er aber in seinen Schriften mit positiven eignen Angaben auftritt, heisst es *entweder* nur, dass man *zum allerwenigsten* Eine Witwe auf zwei Ehen rechnen müsse (z. B. KRITTER's Vorstellung des bisherigen Erfolgs u.s.w. S. 22); *oder* er verwahrt sich ausdrücklich (Prüfung eines Aufsatzes in der Berliner Monatsschrift S. 28), dass das Verhältniss 2:1 nur alsdann angenommen werden dürfe, wenn der sechste Theil aller Witwen sich wieder verheirathe, und ihre Pensionen damit erlöschen; *oder* er gibt Zahlen an, die eben bedeutend *mehr* Witwen als die halbe Zahl der stehenden Ehen erbringen; z. B.

in der eben angeführten Schrift S. 27 ist eine Rechnung geführt, wonach gegen 3293 Ehepaare 1931 Witwen kommen,

Prüfung einer kleinen Schrift u. s. w. S. 17, wo auf 100 Ehemänner 60 Witwen gerechnet werden.

Eben dieses Verhältniss ist aufgestellt in

Sammlung dreier Aufsätze über die Calenbergische, Preussische und Dänische Witwenversorgungsanstalten S. 30—35.

Sammmlung wichtiger Erfahrungen u.s.w. S.35, wo KRITTER auf 450 Ehemänner 280 Witwen rechnet.

Uebrigens hat KRITTER seine Angaben nirgends auf wirkliche directe Erfahrungen gestützt (dergleichen von genügender Art auch schwerlich aus Deutschland damals zu beschaffen waren), sondern auf die Mortalitätstafeln und auf gewisse Voraussetzungen rücksichtlich der durchschnittlichen Altersverhältnisse der in die Gesellschaft eintretenden, Voraussetzungen, die jedenfalls nicht ungünstiger gewählt sind, als sie sich bei unserer Professoren-Witwenkasse wirklich finden.

Wirkliche Erfahrungen aus einem ausgedehnten und mit unsrer Witwenkasse wohl ungefähr auf gleiche Linie zu stellenden Kreise finde ich in PRICE Observations on reversionary payments, S. 79. 269. 276 (nach der dritten Ausgabe dieses Werks von 1773), wo für die Gesammtheit der Pfarrer und Professoren in Schottland nach 17jährigem Durchschnitt die Zahl der stehenden Ehen zu 667, und die der Witwen zu 380 angegeben wird, also sehr nahe in dem Verhältniss von 7 zu 4. Es wird zugleich bemerkt, dass jene Standesklassen dort durchschnittlich mit dem Alter von 27 Jahren in den Genuss des Einkommens von ihren Stellen kamen, also gewiss früher, als durchschnittlich bei den Professoren deutscher Universitäten angenommen werden darf; auch waren bei jenen Witwen die Wiederverheirathungen nicht so selten, wie bei den Witwen Göttingischer Professoren.

Aus den eignen directen Erfahrungen bei unsrer Gesellschaft lässt sich, auch abgesehen von der Kleinheit ihres Umfanges, schon deswegen das für sie gültige Normalverhältniss nicht ableiten, weil die Bewegung der Anzahl der stehenden Ehen in derselben eine unbekannte Grösse ist; diese Anzahl ist nemlich nur für zwei Zeitpunkte, aus der ganzen hundertjährigen Dauer der Anstalt, bekannt, für den gegenwärtigen Augenblick, und nach der P.'schen Angabe (oben S. 132) für den Zeitpunkt der Verhandlungen

*) Manche allerdings auch in Folge von *noch* gröbern Fehlern.

von 1791. Hätte man, in Beziehung auf sämmtliche 204 der Witwenkasse bis jetzt beigetretene Professoren regelmässig aufgezeichnet, ob und während welches Theils ihrer Genossenschaft sie verehelicht gewesen sind, zugleich mit der genauen Altersangabe für sie selbst und ihre Frauen, so würde dieses vermittelst der Mortalitätstafeln zu einer sehr genauen indirecten Bestimmung des fraglichen Verhältnisses benutzt werden können. Von allem dem ist aber, meines Wissens, Nichts geschehen. Je mehr diess jetzt beklagt werden muss, desto zuversichtlicher darf wohl gehofft werden, dass durch zweckmässige wenigstens von jetzt an zu treffende Maassregeln, demjenigen, welcher, wieder nach 100 Jahren, begutachten wird, eine gleiche Klage erspart sein wird.

Soviel über das Kritter'sche Gutachten, oder vielmehr über denjenigen Theil desselben, der mit dem Gegenstande meiner gegenwärtigen Kritik in unmittelbarer Verbindung steht; auf den zweiten Theil des Gutachtens, der die aus den Waisenpensionen entspringende Vergrösserung der Ausgaben betrifft, werde ich in der zweiten Abtheilung dieser Denkschrift zurückkommen. Dass in jenem ersten Theile des Kritter'schen Gutachtens eben nur die Oberfläche des Gegenstandes berührt ist, wird, meine ich, durch die vorstehenden Entwicklungen zur Genüge dargethan sein. Betrachtungen oder Vermuthungen darüber, wie es zugegangen, dass Kritter nur ein so oberflächliches, nicht einmal mit seinen sonstigen öffentlichen Äusserungen übereinstimmendes Gutachten ausgestellt hat, würden mich hier zu weit führen. Indess möchte ich glauben, dass, wenn man, anstatt sich auf die Verlegung von zwei Specialfragen zu beschränken,

> wovon zudem die eine, in dem Sinn wie der Fragesteller meinte, eine bestimme Antwort gar nicht zuliess, den p. Kritter, gleichviel in welcher Form, an den weitern Deliberationen hätte Theil nehmen lassen, oder ihn wenigstens über die Angemessenheit des Plans, den man auf sein Gutachten gründen zu können vermeinte, unter vollständiger Mittheilung aller Sachverhältnisse zu Rathe gezogen hätte,

die Frage über die Normirung aller künftigen Pensionserhöhungen nicht so, wie geschehen, über das Knie gebrochen sein würde*). Das ist aber unterblieben. Kritter erhielt aus der Witwenkasse ein Honorarium von 4 Thl. 24 mgr. für sein Gutachten, so wie P., in dem Ministerialrescript vom 20. November 1794, eine Belohung seiner wohlausgearbeiteten Denkschrift.

In diesem Rescript wurden die gemachten Vorschläge genehmigt, wegen der Erhöhung der Pensionen jedoch hevorwortet, dass, wenn wider Verhoffen *unglückliche Umstände* demnächst eine Verminderung der Pensionen nothwendig machen sollten, die alsdann vorhandenen Witwen sich solches gefallen lassen müssen; auch wurde für die künftig der Progressionsnormirung gemäss vorzunehmenden Pensionserhöhungen die jedesmalige Ratification vorbehalten. Es scheint bemerkenswerth, dass hier nur einer solchen Nothwendigkeit gedacht ist, die aus unglücklichen Umständen, nicht aber derjenigen, die möglicherweise aus einer zu grossen Witwenzahl hervorgehen könnte. Hat man einen solchen Fall für unmöglich gehalten, oder hat man das Regulativ in demselben Sinn wie Sch. aufgefasst, und, dass in einem solchen Fall die Pension wieder herabgehen müsse, als sich von selbst verstehend betrachtet? Übrigens wurde bei Ratification der ersten Erhöhung (1799 Mai 23) derselbe Vorbehalt wiederholt, aber nur im Allgemeinen von Umständen, die die Wiederverminderung nothwendig machen könnten, gesprochen, ohne die Qualification von unglücklichen. In den spätern Ratificationsfällen ist, so viel ich habe finden können, die Reservation nicht wiederholt.

*) Die Zahl der im Laufe meines obigen Berichts angeführten oder angedeuteten Züge von laxer Geschäftsbehandlung hätte leicht noch vergrössert werden können, was ich jedoch für so unnöthig wie unerfreulich gehalten habe.

Es bleibt mir jetzt noch übrig, einige zum Theil schon oben berührte Punkte noch etwas näher zu betrachten.

Man hat oben gesehen, wie über ein Grundprincip P. und R. ganz entgegengesetzte Ansichten gehabt haben (S. [133] und [137]. Wenn der letztere S. [138, oben] von einem Steigen oder *Sinken* des *Fonds* spricht, so vermuthe ich, dass er eigentlich nur den *Ertrag* des Fonds gemeint hat. Denn das scheint mir, insofern die Anstalt ein Beneficium ist, die strenge Pflicht der Verwaltung zu sein, dafür zu sorgen, dass die Substanz, aus welcher das Beneficium fliesst, in ihrer Integrität erhalten werde. Dies kann aber schon wegen der bei Kapitalausleihungen von Zeit zu Zeit bei aller Vorsicht nicht abzuwendenden Verluste mit Sicherheit anders nicht geschehen, als wenn man neben der Erhaltung auch einige allmählige Vermehrung sich zum Ziele setzt, wobei man denn immer lieber etwas zu viel als zu wenig thun möge. Auf diese Weise wird die *Gesammtheit* der Percipienten in der spätern Zeit gegen die Gesammtheit der frühern nicht zu kurz kommen, sondern vielmehr eher besser daran sein, was aber die dermaligen Percipienten jenen um so eher gönnen können, da sie selbst die Früchte einer ähnlichen Enthaltsamkeit *ihrer* Vorgänger geniessen. Ausserdem erfordert die Billigkeit, dass man sich bestrebe, das unvermeidliche und bei einer kleinen Gesellschaft verhältnissmässig sehr grosse Schwanken der Zahl der Percipienten durch zweckmässige Maassregeln so viel thunlich auszugleichen. Dagegen aber scheint mir P.'s Forderung, dass niemals ein künftiger *einzelner* Percipient weniger erhalten solle, als irgend ein früherer erhalten hat, bei einer Gesellschaft, die wie Sch. sehr richtig bemerkt hat, immer etwas Actienmässiges behalten wird, im Rechte nicht begründet; jedenfalls aber, und diess ist der Hauptpunkt auf den es ankommt, lässt sich einer solchen Forderung, wenn sie wie eine unbedingte gelten soll, gar nicht genügen ohne die offenbarste Unbilligkeit gegen die dermaligen Percipienten. Es liegt auf der Hand: je grössere Sicherheit man verlangt, dass jener Fall niemals eintreten müsse, desto weniger darf man den jetzigen Percipienten verabreichen. Man müsste die extremsten Fälle für die mögliche Zahl der Percipienten berücksichtigen, wovon, wie oben gezeigt ist, P.'s Ansätze weit entfernt waren. Noch viel schlagender tritt dies hervor durch die weiter unten S. [150] aufgestellten Überschläge auf den Grund der erweiterten Interessentenzahl, einer Eventualität, die doch auch schon 1794 unter die Zahl der künftighin nicht bloss möglichen, sondern sogar wahrscheinlichen Fälle hätte aufgenommen werden können. Denn damals war die Zahl aller Universitätsprofessoren 45 *), funfzig Jahre früher nur 25, und welche Grenzen die fortwährend gesteigerten Zeitbedürfnisse finden werden, ist unmöglich im Voraus festzusetzen.

Der zweite Punkt betrifft die Auslegung der Progressionsnormirung in Sch.'s Sinn. Wenn Sch. sagt, [S. 138. Z. 19] P. habe das Maass der Erhöhung und eben so der Verminderung durch eine unwandelbare Regel bestimmt, so setzt diess zwar nothwendig die erste Interpretation S. [129] voraus, aber doch räumt Sch. damit zu viel ein. Eine unwandelbare Regel für die Verminderung fand sich darin nur in so weit, als bestimmt wurde, *wann* Verminderung eintreten müsse (nemlich, nach jener Auslegung, sofort nachdem die Zahl von 15 Pensionen überschritten), aber noch nicht für die *Grösse* der Verminderung. Diese Unvollständigkeit hätte, deucht mir, nach damaliger Lage der Sache, am füglichsten durch eine Bestimmung in folgender Fassung ergänzt werden können:

> So oft das Kapitalvermögen um 5000 Rthl. gestiegen ist, tritt eine Erhöhung der Pensionen ein, welche für jede einzelne Pension 10 Rthl. beträgt, wenn und so lange nicht mehr als 15 Pen-

*) Einer davon, K., starb noch vor Beendigung der Verhandlungen 1794 August 21. Jetzt (im Herbst 1845) sind 57. Aber die Anzahl der verheiratheten Mitglieder der Witwenkasse ist in viel stärkerm Verhältniss gestiegen von 26 im Jahr 1794 auf 12 im Jahr 1845.

sionen bestehen, sonst aber die auf die einzelnen Pensionen gleichmässig zu vertheilende Gesammtsumme von 150 Rthl. Dasselbe gilt von jeder folgenden Erhöhung.

Auf diese Weise hätte man gar nicht einmal nöthig gehabt, den *Anfang* einer Erhöhung von der Bedingung einer nicht über 15 hinausgehenden Pensionenzahl abhängig zu machen. Und in dieser Beziehung hätte diese Bestimmungsart sich sogar als vortheilhafter für die Witwen gezeigt, weil bei einer andauernd bestehenden kleinen Überzahl der Verlust, welcher aus der Verpflichtung entsteht, die bisherige Erhöhungssumme mit mehrern theilen zu müssen, bald durch eine neue Erhöhung compensirt oder mehr als compensirt würde, während in einem solchen Fall eine neue Erhöhnng nach der P.'schen Normirung und in der zweiten Interpretation gar nicht zulässig ist.

Ich möchte übrigens glauben, dass die obige abgeänderte Fassung, wenn damals jemand daran gedacht hätte, sie in Vorschlag zu bringen, auch P. hätte zufrieden stellen müssen. Denn entweder war seine Voraussetzung, 15 sei die höchste Pensionenzahl, die vorkommen könne, richtig, oder sie war unrichtig: im ersten Fall war die Abänderung ganz wirkungslos, mithin gleichgültig, im zweiten aber nothwendig.

Die Folge einer solchen Normirung wäre gewesen, dass man sich gewöhnt haben würde, die Pension wie aus zwei Theilen zusammengesetzt zu betrachten, einem unveränderlichen Theile und einer Zulage, die von Zeit zu Zeit mit dem Kapitalvermögen wachsen, möglicherweise aber auch dabei wieder etwas zurückgehen könne, letzteres aber dann nach einer wirklich unwandelbaren einfachen Regel, wonach jede Witwe leicht selbst die Controle führen konnte. Auf den Unterschied zwischen einem solchen gesetzlichen Zurückgehen, und dem, nach der Quittungs-Clausel in Folge des Unvermögens der Kasse eintretenden habe ich schon oben S. [131] aufmerksam gemacht.

Drittens scheint es wohl der Mühe werth zu sein, die Ursachen anzugeben, welchen man das rasche und ununterbrochene Steigen der Prosperität der Witwenkasse während eines Zeitraums von mehr als vierzig Jahren zuzuschreiben hat. Ich finde, dass diess Steigen ganz vorzüglich begünstigt ist durch das Zusammenwirken von zwei Umständen, auf deren einen 1794 gar nicht gerechnet war, auf den andern aber wenigstens nicht gerechnet werden durfte.

Die erste Ursache ist das Steigen des Zinsfusses, welches schon wenige Jahre nach jener Epoche anhob. Man hatte, wie ich nachgewiesen habe, damals mit Sicherheit nur auf 3 Proc. rechnen zu dürfen geglaubt. Aber schon 1799 bemerkte das Curatorium in dem schon oben angeführten Rescript vom 23. Mai, dass Gelegenheit zu sicherer Unterbringung zu 4 Proc. gar nicht selten sei, und bot sogar die eigne Mitwirkung dazu an. Etwas später aber erhob sich der Zinsfuss allgemein auf 5 Proc., und beharrte für den grössten Theil der Kapitalien der Witwenkasse während einer langen Reihe von Jahren auf dieser Höhe.

Die zweite Ursache ist der Umstand, dass die Zahl der Pensionen während jenes langen Zeitraums *unter* dem zu erwartenden Mittelwerthe (15) geblieben ist, ja man muss sagen *beträchtlich* unter dem zu erwartenden Mittelwerthe, wenn man dafür nach dem plausiblern Anschlage S. [145] die Zahl 17 annimmt (nemlich $\frac{3}{5}\times 26$ Witwen mit Zusatz von $\frac{1}{10}$ wegen der Waisen). Dass man diese Erscheinung gar nicht wie etwas sehr ausserordentliches zu betrachten habe, ist schon oben S. [111 Z. 7] erwähnt: allein eben so wenig wäre es etwas ausserordentliches gewesen, wenn gerade das Gegentheil eingetreten, und z. B. schon 20—25 Jahre nach jener Epoche von 1794 die Mittelzahl auf der andern Seite bedeutend und andauernd überschritten wäre. In einem solchen Falle würde an die Stelle des raschen Steigens des Vermögens der Kasse ein sehr langsames getreten sein, ja vielleicht ein Stillstand oder sogar die Nothwendigkeit zu der Quittungsklausel die Zuflucht zu nehmen, falls sich zugleich ein tiefes Herabgehen des Zinsfusses dazu gesellt hätte.

Höhere Witwenzahl ist nun bereits seit einer Anzahl von Jahren eingetreten S. [126 Z. 23] und

S. [125 Z. 29]; der Zinsfuss aber, obwohl von seiner frühern Höhe sehr herabgegangen, noch immer hoch genug, dass die Kasse jener höhern Pensionenzahl noch gewachsen bleibt. Überhaupt ist diese hohe Zahl, selbst wenn sie noch um eine oder ein paar Pensionen mehr gestiegen wäre, an sich, und in so weit man darin nur das Vorkommen eines ungewöhnlich hohen Schwankens über den Mittelwerth 15 oder 17 zu erkennen hat, lange nicht von einer so schweren Bedeutung, wie *der* Umstand, zu welchem ich jetzt übergehe

> dass der Mittelwerth der Pensionenzahl, möge man 15 oder 17 wie den plausibelsten betrachten, nur so lange gültig ist, als die Genossenschaft keine grössere Ausdehnung erhält, als sie 1794 hatte, und dass diese Gültigkeit jetzt, wo die Ausdehnung, mit dem Maassstabe der Zahl der verheiratheten Mitglieder gemessen, um mehr als 60 Procent grösser ist, als zur Zeit jener Epoche, ganz aufgehört hat.

Für die Zwischenzeit zwischen 1794 und 1845 lässt sich dieser Maassstab nicht anwenden, weil die Kenntniss der Zahl der verheiratheten Mitglieder fehlt. So viel sich aber aus der Bewegung der Gesammtzahl aller Mitglieder schliessen lässt, ist die Ausdehnung der Genossenschaft im Ganzen und abgesehen von einigem hin und her Schwanken bis etwa 1831 nicht grösser, sondern eher etwas geringer gewesen als 1794, und *sehr bedeutend* ist die Vergrösserung erst seit wenigen Jahren geworden. Mit der hohen Witwenzahl in der letzten Zeit steht daher die erweiterte Ausdehnung der Genossenschaft durchaus nicht in ursachlichem Zusammenhange, wie bereits oben [S. 128] bemerkt ist.

Der vierte hier noch zu betrachtende Punkt und gleichsam der Schlussstein der ersten Abtheilung, ist, einen Überschlag der künftigen Bewegung der Witwenzahl im Allgemeinen zu machen, so weit nemlich ein solcher auf dem bisher eingeschlagenen Wege erreicht werden kann. Die Anzahl aller Professoren ist jetzt 57; davon nehmen an der Witwenkasse Theil 51, und unter diesen sind 42 verehelicht. Macht man, zuerst, den Überschlag nach der Hypothese, die den Verhältnissen der hiesigen Professorenwitwenkasse am meisten angemessen scheint, dass auf 7 stehende Ehen 4 Witwen zu rechnen sind, so gibt die Rechnung 24 Witwen, und die Bedeutung davon ist, dass nachdem die Gesellschaft von jenem Umfange den Beharrungszustand erreicht hat, die durchschnittliche Witwenzahl 24 sein wird. Wegen der Waisenpensionen müsste nach Kritter's Gutachten noch ein Sechstel zugesetzt werden; ich will jedoch nur ein Achtel in Rechnung bringen, also die durchschnittliche Pensionenzahl im Beharrungszustande = 27 setzen. Allerdings soll man den Beharrungszustand erst nach 45—56 Jahren erwarten; man würde sich aber sehr täuschen, wenn man diese weite Entfernung für einen starken Beruhigungsgrund hielte. Denn schon lange vorher ist man dem Grenzzustande so nahe gekommen, dass der Unterschied nicht viel mehr bedeutet. Man vergleiche die oben S. [141] für allmähliges Steigen der Witwenzahl mitgetheilten Ansätze, die ohne Anspruch auf strenge Genauigkeit zu machen, doch einigermaassen eine Idee von dem Hergange geben können. Wenn man dann dabei überlegt, dass der frühere Umfang der Gesellschaft schon 17 Pensionen als Normalzahl (bei dem Verhältniss 7 : 4) für die Pensionen gegeben hatte, und es also hier sich nur um die allmählige Entwicklung der auf 10 angeschlagenen Vergrösserung handelt, so wird man mich leicht verstehen, wenn ich behaupten muss, dass schon nach etwa 25 Jahren man auf 25 Pensionen als *Mittelzahl* gefasst sein müsse. Hierzu kommt nun noch die Erweiterung des Spielraumes wegen der Schwankungen, denen scharfe Grenzen zu setzen unmöglich ist. Soviel ist aber gewiss, dass ein Schwanken von 7 Pensionen, auf und ab vom Mittelwerthe, wie etwas gar nicht ausserordentliches in den Überschlag mit aufgenommen werden muss, da ein verhältnissmässig wenigstens eben so grosses Schwanken nach frühern Präcedentien factisch ist. Das Resultat dieser Erwägungen ist also, dass man erwarten muss, um das Jahr 1870 die Pensionenzahl zwischen 18 und 32 zu finden, ohne dass man im Stande ist, im voraus zu bestimmen, *wo* innerhalb dieses weiten Spielraumes; dass das Erreichen des einen oder des andern Extrems nicht wie etwas sehr ausserordentliches betrachtet werden darf; endlich, dass späterhin diese Zahlen noch ein

wenig vergrössert werden müssen, so dass nach längerer Zeit der Spielraum durch 20—34 bezeichnet werden muss. Das ist alles, was die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehren kann, *so lange man die Gesellschaft gleichsam nur massenweise betrachtet.* Vielleicht meint mancher, das sei wenig! Ich dächte doch nicht. Es ist sehr wichtig, dass man das Maass der Erwartungen, die man zu haben befugt ist, kennt, und sich nicht einer unbegründeten Sicherheit überlässt. Erwägen wir die beiden Extreme. Es ist *möglich*, dass nach 25 Jahren die Pensionenzahl noch nicht die Zahl 18 überschritten hat, und sich auch noch eine geraume Zeit länger auf dieser oder einer sehr wenig grössern Höhe erhält. Die Pensionenzahl kann auch vorher von ihrer jetzigen Höhe (19) erst noch herabsteigen, und so von jetzt bis 1870 durchschnittlich nicht unbeträchtlich unter 18 sein. Auf diese Weise kann die Kasse Kräfte sammeln, mit denen sie, wenn erst nach langer Zeit das Blatt sich wendet, auch den extremen Fällen der andern Seite die Spitze bieten kann. Das schlimmste wäre eigentlich, wenn diese günstigen Voraussetzungen gar sich noch weiter realisirten; ich meine, wenn in dieser Zwischenzeit die Pensionenzahl erst noch einmal unter 16 herabginge, und so die Kasse in Folge der bestehenden Satzung noch mit neuer Pensionserhöhung von 10, 20, vielleicht gar von 30 Rtbl. belastet würde. — Würde, umgekehrt, was aber eben so wohl möglich ist, die Pensionenzahl schon nach 25 Jahren auf oder nahe auf die Höhe von 32 gestiegen sein, so bedarf es nur eines rohen Überschlages, um sich zu überzeugen, dass abgesehen von ganz ausserordentlichen Zuflüssen, die Kasse solchen Anforderungen nicht gewachsen sein, sondern, vermuthlich schon früher, zur Erklärung ihres Unvermögens genöthigt sein wird.

Dass die Überschläge sich etwas günstiger gestalten, wenn man anstatt des Verhältnisses 7 : 4 das von 2 : 1 annimmt, versteht sich von selbst. Man würde dann nach 25 Jahren den Spielraum von 16—28 Pensionen und nach noch längerer Zeit den von 18—30 zu erwarten haben.

Endlich muss ich noch bemerken, dass hiebei stillschweigend vorausgesetzt ist, dass der Umfang der Genossenschaft auf seiner gegenwärtigen Höhe fortan bleibt. Nimmt er noch weiter zu, so muss man sich auf verhältnissmässig noch grössere Zahlen gefasst machen; vermindert er sich hingegen wieder, so wird auch von obigen Resultaten einiger Abzug gemacht werden dürfen. Nach der Natur der Sache aber ist es wohl wenig wahrscheinlich, dass eine *bedeutende* Verminderung anders als nach Verlauf längerer Zeit eintreten könne.

Zweite Abtheilung.

Da ich die zu der Aufstellung der Bilanz der Witwenkasse einzuschlagenden Wege bereits in meinem Votum vom 8. Januar d. J. umständlich beschrieben, und bei der Ausführung der Arbeit zu Abänderungen keine Veranlassung gefunden habe, so kann ich mich nur auf jenes beziehen, und will hier nur bemerken, dass das Wesen der Methode in der Ermittelung des gegenwärtigen Geldwerths der Obliegenheiten der Kasse besteht, nach den drei Rubriken

Obliegenheiten gegen die jetzigen 19 Witwen,
Obliegenheiten gegen die Witwen (und Waisen) der jetzigen 51 Theilnehmer,
Obliegenheiten gegen die Witwen und Waisen der künftig beitretenden,

wobei für die zweite und dritte Rubrik der gegenwärtige Geldwerth der Gegenleistungen durch die Beiträge, in Abzug zu bringen ist. Ich schicke hier zuvörderst einige allgemeine Erläuterungen voraus.

Als Epoche, auf welche alle künftigen Leistungen durch Discontirung bezogen werden, ist der 1. October 1845 gewählt, und vorausgesetzt, dass die Witwen und Interessenten ihre bis dahin fällig gewordenen Pensionen und Beiträge schon resp. empfangen und geleistet haben.

Zu der Rechnung habe ich die höchst schätzbaren Mortalitätstafeln angewandt, welche Brune aus den bei der preussischen Witwenkasse an 31500 Ehepaaren gemachten Erfahrungen abgeleitet hat. Nur für das Absterben der Männer im höchsten Lebensalter sind diese Tafeln mangelhaft, da die Registratur der Witwenkasse dazu keine hinreichende Daten enthielt, und ich habe daher vorgezogen, das Absterben der Männer über 80 Jahr nach denselben Verhältnissen zu rechnen, welche die Tafeln für das weibliche Geschlecht angeben. Zur Berechnung der Modificationen, welche der Werth der Witwenpensionen durch Berücksichtigung der minderjährigen Kinder, wo solche vorhanden sind, erleidet, habe ich für letztere die Mortalitätstafeln von Deparcieux angewandt. Übrigens hat die Wahl der Tafeln, sowohl für die Mortalität der Kinder, als für die der Männer im höchsten Lebensalter auf die Rechnungsresultate nur sehr geringen Einfluss.

Alle Resultate sind wesentlich abhängig von dem dabei zum Grunde gelegten Zinsfuss; und ich habe daher, um hier nichts zu wünschen übrig zu lassen, sämmtliche Rechnungen sowohl nach dem Zinsfuss von 4 Procent, als nach dem von 3½ Procent durchgeführt, obgleich dadurch die Arbeit gerade verdoppelt wurde. Die Münzen sind immer als Gold zu verstehen. Die Rechnung ist durchgehends auf Brüche des Thalers genau geführt, diese Brüche aber sind in gegenwärtiger Abschrift weggelassen. Daraus wird hin und wieder ein Unterschied von einer oder ein paar Einheiten in den Summationen erscheinen können, welchen geringfügigen Umstand ich hier bloss deswegen bemerke, damit nicht jemand, der etwa die eine oder die andere der Summationen nachrechnet, solche Unterschiede für Zeichen von ungenauer Rechnung halte, da sie vielmehr gerade umgekehrt die Folge der in der Rechnung beobachteten grössern Schärfe sind.

I. Berechnung des auf den 1. October 1845 reducirten Geldwerths der Witwenpensionen.

Die Zahl aller seit Errichtung der Witwenkasse bis jetzt eingetretenen Pensionirungen ist 68, und ich habe dieselben, um in meiner Arbeit die leichteste Übersichtlichkeit zu gewinnen, mit fortlaufender Numerirung bezeichnet. Die Ansätze in dem folgenden tabellarischen Abrisse drücken die Summen aus, welche den einzelnen Witwen ausgezahlt werden müssten, wenn sie für ihre Ansprüche abgefunden werden sollten, oder umgekehrt, die Summen, welche die Witwen einzahlen müssten, wenn sie eine solche Berechtigung, wie ihnen jetzt zusteht, sich erst erkaufen wollten. Der Rechnung liegt der jetzige Pensionssatz von 250 Rthl. zum Grunde, mit Ausnahme der Nr. 58, wo er 200 Rthl. beträgt. Die Witwen 50. 53. 58. 64. 68 haben Kinder unter 20 Jahren, die bei der Rechnung genau berücksichtigt sind, eben so wie der Umstand, dass die Pensionen immer noch für den vollen Monat, in welchem ein Abgang statt findet, ausgezahlt werden.

		Jetziger Werth der Pension.				Jetziger Werth der Pensionen.	
Nro.		3½ Proc.	4 Proc.	Nro.		3½ Proc.	4 Proc.
29	L.	957 Thl.	941 Thl.	58	G.	3172 Thl.	3000 Thl.
31	S.	1756 ,,	1708 ,,	59	W.	2850 ,,	2732 ,,
41	W.	1122 ,,	1101 ,,	60	S.	2606 ,,	2507 ,,
44	F.	2543 ,,	2448 ,,	62	B.	1648 ,,	1605 ,,
50	H.	3987 ,,	3759 ,,	63	G.	2113 ,,	2045 ,,
51	S.	735 ,,	725 ,,	64	M.	4170 ,,	3932 ,,
52	P.	2352 ,,	2270 ,,	65	H.	3026 ,,	2894 ,,
53	M.	2789 ,,	2676 ,,	66	H.	1916 ,,	1859 ,,
55	H.	2813 ,,	2698 ,,	68	M.	4175 ,,	3936 ,,
57	S.	1798 ,,	1748 ,,	Summa		46529 Thl.	44582 Thl.

II. Evaluirung des jetzigen Geldwerths der Verbindlichkeiten der Witwenkasse gegen ihre gegenwärtigen Theilnehmer.

Wie die Witwen, so habe ich auch alle Interessenten der Witwenkasse nach der Reihefolge ihres Beitritts mit fortlaufender Numerirung bezeichnet. Indem ich ganz den a. a. O. vorgezeichneten Weg verfolge, habe ich zuvörderst die 42 verheiratheten Theilnehmer in Betracht zu ziehen, und zunächst (was gleichsam den Kern der Untersuchung bildet) den gegenwärtigen Geldwerth theils von den Beiträgen, zu welchen sie verpflichtet sind, theils der Pensionen welche ihre dermaligen Ehefrauen im Fall des Überlebens zu geniessen haben werden, nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung und den Mortalitätstafeln zu ermitteln. Ich concentrire hier auf Einer Seite die Resultate einer langen Arbeit in einem tabellarischen Abrisse.

Nro.	Jetzige verheirathete Theilnehm.	Zinsfuss 3½ Proc. Jetziger Geldwerth der Pensionen	Zinsfuss 3½ Proc. Jetziger Geldwerth der Beiträge	Zinsfuss 4 Proc. Jetziger Geldwerth der Pensionen	Zinsfuss 4 Proc. Jetziger Geldwerth der Beiträge	Nro.	Jetzige verheirathete Theilnehm.	Zinsfuss 3½ Proc. Jetziger Geldwerth der Pensionen	Zinsfuss 3½ Proc. Jetziger Geldwerth der Beiträge	Zinsfuss 4 Proc. Jetziger Geldwerth der Pensionen	Zinsfuss 4 Proc. Jetziger Geldwerth der Beiträge
		Thl.	Thl.	Thl.	Thl.			Thl.	Thl.	Thl.	Thl.
109	L.	1752	59	1634	58	174	H.	1175	120	1053	114
135	O.	1509	85	1386	83	175	R.	1154	142	1007	134
138	C.	1846	70	1706	68	177	W.	1117	131	991	124
139	U.	937	109	854	104	180	T.	1064	132	944	125
140	H.	1451	106	1310	101	183	V.	943	148	824	139
141	L.	1091	93	1004	90	184	B.	1023	146	893	137
147	R.	1441	105	1301	101	187	W.	917	134	817	127
149	G.	1717	101	1545	97	188	S.	867	134	774	127
151	O.	1051	130	933	123	189	H.	1138	129	1011	122
153	B.	865	109	790	104	190	H.	936	142	825	134
155	K.	925	114	840	109	191	D.	892	123	804	117
156	S.	853	114	776	109	192	R.	943	139	848	131
160	H.	1376	123	1221	117	193	G.	1047	148	907	140
161	B.	876	120	795	114	195	D.	981	140	866	132
164	W.	1359	122	1209	117	197	R.	916	154	791	145
167	S.	995	140	878	132	198	W.	1072	144	936	136
168	K.	1345	135	1173	128	199	F.	1127	127	1005	120
169	Z.	1118	134	988	127	200	L.	861	153	749	144
170	R.	1541	99	1397	96	201	W.	1073	145	935	137
171	C.	1193	105	1084	101	203	B.	932	127	835	121
173	F.	1120	127	998	121	204	E.	787	146	729	138
						Summa	Thaler	47324	5203	42366	4945

Den Totalwerth der Witwenpensionen vergrössere ich um seinen sechsten Theil wegen der Waisenpensionen, nicht sowohl deswegen, weil Kritter in seinem Gutachten dieses Verhältniss angenommen hat, als weil dasselbe sehr nahe aus meiner eignen Discussion der Erfahrungen bei unsrer Witwenkasse hervorgeht [S. 154]. Sodann wird der Totalwerth der Beiträge abgezogen, wodurch sich der reine Werth der Verbindlichkeit der Kasse gegen die 42 verheiratheten Mitglieder ergibt. Für die 9 jetzt unverheiratheten wird endlich schlechthin pro rata zugesetzt. Diese Rechnungen stehen dann folgendermaassen:

	Zinsfuss 3½ Proc.	Zinsfuss 4 Proc.
Witwenpensionen der 42 verheiratheten Mitglieder	47324 Thl.	42366 Thl.
Waisenpensionen	7887 „	7061 „
Pensionen	55211 „	49427 „
Beiträge	5203 „	4945 „

	Zinsfuss $3\frac{1}{2}$ Proc.	Zinsfuss 4 Proc.
Reine Verbindlichkeit der Kasse gegen 42 verheirathete Mitglieder	50008 Thl.	44482 Thl.
Danach verhältnissmässig gegen 9 unverheirathete Mitglieder	10716 ,,	9532 ,,
Totalwerth der zweiten Rubrik	60724 ,,	54014 ,,

Dass einer solchen Evaluirung nicht ganz dieselbe Zuverlässigkeit beigelegt werden kann, wie der Berechnung der Verbindlichkeiten der ersten Rubrik, habe ich schon in meinem mehrerwähnten Gutachten bevorwortet. Es finden nemlich bei unsrer Witwenkasse mehrere Umstände Statt, deren Wirkung einer Vorausberechnung gar nicht fähig ist, von welcher aber auch, in Ermangelung einer solchen Buchführung für die frühere Zeit, wie S. [145 unten] erwähnt ist, nicht einmal eine Schätzung gemacht werden kann. Als den einflussreichsten dieser Umstände bezeichne ich die Wiederverheirathung von Mitgliedern nach dem Tode ihrer Ehefrauen. Das Ableben der Frauen vor den Männern ist nemlich schon ein Theil der in der Rechnung berücksichtigten Chancen, und so ist jede Wiederverheirathung eine ausserhalb der Rechnung liegende neu hinzukommende Belastung des Kassen-Conto. Von der andern Seite kommt diesem Kassen-Conto wie eine nicht veranschlagte Entlastung zu Gute jeder anderweitige Abgang eines verheiratheten Mitgliedes, z. B. durch eine auswärtige Vocation. Auch der Umstand, dass solche verwitwete Mitglieder, die sich nicht wieder verheirathen, doch nach dem Tode der Frauen wenigstens eine Zeitlang die Beiträge fortzuzahlen pflegen, gehört in dieselbe Kategorie, obwohl er von geringer Erheblichkeit ist. Endlich ist vielleicht die Rechnung für die dermalen unverheiratheten Theilnehmer nach dem Durchschnittsresultate für die Verheiratheten, etwas zu hoch. Der jedesmalige Bestand der unverheiratheten Mitglieder wird gewöhnlich so zusammengesetzt sein, dass mit Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann, ein oder der andere davon werde sich überall nicht verheirathen: diess wird jedoch, wenigstens zum Theil, wieder dadurch aufgewogen, dass, je später Verheirathung erfolgt, desto mehr mit Wahrscheinlichkeit das künftige Überleben der Frau und ein langer Witwenstand präsumirt werden muss.

Bei der Unmöglichkeit, die Wirkung dieser verschiedenen Umstände im Voraus in Zahlen zu veranschlagen, darf man doch für wahrscheinlich halten, dass sie einander grossentheils compensiren.

III. Evaluirung des jetzigen Geldwerths der Verbindlichkeiten der Kasse gegen alle künftig beitretenden Mitglieder.

Für diese dritte Rubrik bieten die bisherigen Erfahrungen der Kasse ein sehr schätzbares Hülfsmittel dar; ja ohne diese Erfahrungen würde eine Veranschlagung ganz unmöglich sein. Mein Verfahren ist folgendes.

Ich habe für jeden der bis Michaelis 1804 beigetretenen Theilnehmer, bis einschliesslich Nro. 108*), sowohl den Werth der Beiträge, als den Werth der von ihren Hinterbliebenen bezogenen Pensionen auf den Zeitpunkt ihres Beitritts reducirt, und nach zweierlei Zinsfuss discontirt, jedoch mit folgenden, für den Gebrauch, der von diesen Rechnungen gemacht werden sollte, nothwendigen Modificationen:

1) Die jährlichen Beiträge und die Pensionen sind in Rechnung gebracht, nicht wie sie wirklich gezahlt sind, sondern nach ihrer jetzigen Höhe, nemlich 10 Rthl. für jene, 250 Rthl. für diese.

2) Die Waisenpensionen, welche bis 1791 nur bis zum vollendeten 12ten Jahre des jüngsten Kindes verabreicht wurden, sind so gerechnet, als ob sie noch 8 Jahre länger gedauert hätten. Durch Nachfor-

*) Dass ich gerade soweit und nicht weiter gegangen bin, ist mit Vorbedacht geschehen, es würde mich aber zu weit führen, wenn ich die Gründe hier ausführlich entwickeln wollte.

schung im Gerichtsarchiv ist ermittelt, dass die betreffenden jüngsten Kinder das Alter von 20 Jahren alle wirklich erreicht haben. Es kann indess sein, dass auf diese Weise immer noch etwas zu wenig gerechnet ist, da möglicherweise bei dem Tode eines oder des andern verwitweten Professors oder einer Professorwitwe noch Kinder zwischen 12 und 20 Jahren vorhanden gewesen sein können, die mithin nach jetziger Einrichtung pensionsberechtigt und also in meine Rechnung mit aufzunehmen gewesen sein würden: wenigstens haben die Gerichtsakten nicht in allen Fällen das Gegentheil zur Gewissheit gebracht. Indessen würde doch jedenfalls keine erhebliche Vergrösserung der Totalsumme dadurch hervorgebracht werden können.

3) Unter jenen 108 Theilnehmern befinden sich 7, deren Witwen noch jetzt am Leben sind. Für diese habe ich zu den Pensionszahlungen, welche sie bisher genossen haben, auch noch den schon oben nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung evaluirten künftigen Betrag beigefügt, nachdem derselbe von der Epoche 1845 October 1 auf das Moment des Beitritts der resp. Ehemänner zurückdiscontirt war. Ohne dieses Verfahren hätte ich nicht bloss diese Interessenten ausschliessen, sondern consequenterweise anstatt der Theilnehmer 1—108 mich auf die 1—60 beschränken müssen, was ich jedoch hier nicht weiter entwickeln kann.

Zur Ersparung des Raumes setze ich die Resultate der 108 Rechnungen nicht einzeln hieher, sondern nur den Totalbetrag von allen. Es findet sich

	nach dem Zinsfuss 3½ Proc.	4 Proc.
Summe der discontirten Beiträge	13909,00 Thl.	13115,94 Thl.
— — — Witwenpensionen	67915,80 „	59019,67 „
— — — Waisenpensionen	10945,04 „	9878,34 „
Summe aller discontirten Pensionen . . .	78860,84 „	68898,01 „

Es folgt hieraus zuvörderst, dass der (reducirte) Betrag der Waisenpensionen sehr nahe dem sechsten Theile des (reducirten) Betrages der Witwenpensionen gleich zu setzen ist: in der That ist jener bei dem Zinsfuss 3½ Proc. etwas kleiner, bei dem Zinsfuss 4 Proc. hingegen etwas grösser als dieses ⅙. Es liesse sich leicht nachweisen, dass diese kleine Verschiedenheit des Resultats nach Maassgabe des Zinsfusses vollkommen in der Natur der Sache begründet ist; da jedoch der Umfang der Erfahrungen zu klein ist, als dass dem Resultate überhaupt eine minutiöse Schärfe beigelegt werden könnte, so habe ich in der obigen Rechnung S. [152] mich schlechthin an das einfache Verhältniss 1 : 6 gehalten.

Man kann ferner sagen, dass die Gesammtrechte aller jener 108 Interessenten, nach jetziger Höhe der Pensionen und Beiträge taxirt und auf die Zeiten ihrer respectiven Eintritte reducirt, den Geldwerth hatten von 64951,84 Thalern bei dem Zinsfuss von 3½ Proc.
55782,07 Thalern bei dem Zinsfuss von 4 Proc.
oder, so weit eine so ausgedehnte Erfahrung maassgebend sein kann, dass nach dem Durchschnittswerth, der Eintritt in die Kasse für jeden einzelnen den Geldwerth von 601,40 Thalern, oder von 516,50 Thalern hat, jenachdem man 3½ oder 4 Proc. Zinsen rechnet.

Mancher, der mit Gegenständen dieser Art wenig bekannt ist, wird sich vielleicht über die Kleinheit dieses Resultats wundern. Allein das Auffallende verschwindet grösstentheils, wenn man erwägt, dass dabei die Reduction auf den Zeitpunkt des Eintritts jedes einzelnen zum Grunde liegt, und dass jede Geldsumme, durch Discontirung für eine beträchtliche Anzahl von Jahren, enorm vermindert erscheint. Ich will diess durch das Beispiel von Heyne erläutern, welcher 48 Jahr Beitrag geleistet, und dessen Witwe 21 Jahr 11 Monat Pension genossen hat. Nach meinen Rechnungsgrundlagen stellt sich also die Summe der Beiträge zu 480 Rthl. und die Summe der Pensionsbezüge zu 5470 Rthl. 4 Ggr. heraus, mithin der

reine Gewinn der Familie durch die Aufnahme in die Kasse (nicht wie er wirklich gewesen ist, sondern wie er bei jetziger Höhe der Beiträge und Pensionen gewesen sein würde) zu 4909 Rthl. 4 Ggr. Werden aber jene Summen durch Discontirung à 4 Proc. auf den Zeitpunkt des Beitritts, Michaelis 1763, zurückgeführt, so reduciren sich

die Beiträge auf 211 Rthl. 23 Ggr.
die Pensionsbezüge auf 527 ,, 10 ,,

und mithin jener grosse Gewinn, nach seinem Geldwerth für diese Epoche, auf die geringe Summe von 315 Rthl. 11 Ggr. Eine Rechnungsprobe würde haarscharf ergeben, dass dieses kleine Kapital, jährlich durch die Zulegung von 10 Rthl. und durch die Zinsen zu 4 Proc. vermehrt, und so fortwährend sich vergrössernd, am Schluss des Jahres 1812 eine solche Grösse erlangt haben würde, dass von da an durch die fernern Zinsen und theilweise durch Einziehen des Kapitals die Pension genau bis Ende November 1834 gedeckt war.

Aus diesem Grunde, so wie noch aus andern, deren Entwicklung mich hier zu weit führen würde, ist der mittlere Geldwerth der Aufnahme in die Gesellschaft, in dem Sinn wie er hier verstanden wird, gar nicht vergleichbar mit dem durchschnittlichen Geldwerth der Ansprüche aller in einem bestimmten Zeitpunkte coexistirenden Mitglieder, von denen immer ein grosser Theil schon sehr lange in der Gesellschaft gewesen ist.

Träte nun jedes Jahr *Ein* neues Mitglied ein, dessen Berechtigung durchschnittlich zu obigem Geldwerth angeschlagen werden müsste, so ist klar, dass zur Deckung dieser sich immer neu gebärenden Ansprüche die Zinsen eines eisernen Kapitals erforderlich und zureichend sein würden, dessen Höhe

bei dem Zinsfusse von $3\frac{1}{2}$ Proc. zu 17182,86 Thalern
bei dem Zinsfusse von 4 Proc. zu 12912,50 Thalern

angenommen werden müsste.

Bis hieher ruhet die Rechnung auf einer sichern Grundlage. Es fehlt nun aber zur Vollendung derselben noch ein wesentliches Element, für welches jede im Voraus gewagte Schätzung nach der Natur der Sache nur eine sehr precäre Geltung haben kann, ich meine die Durchschnittszahl der künftig jährlich neu beitretenden Theilnehmer. Befragt man die Erfahrung, so zeigt sich in der neuern Zeit eine sehr starke Vergrösserung dieses Elements. Für die ersten achtzig Jahre des Bestehens der Anstalt kann man die Durchschnittszahl der jährlich beitretenden nahe zu $1\frac{1}{4}$ annehmen; allein seit den letzten 20 Jahren sind überhaupt 64 Beitritte *) erfolgt, wovon 23 auf das Decennium 1825—1835, und 41 auf das Decennium 1835—1845 kommen. Das Mittel aus den letzten 20 Jahren wäre demnach $3\frac{1}{5}$, oder, wenn man G. nicht mitzählen will, $3\frac{3}{20}$. Für die letzten 10 Jahre allein ist dies Mittel $4\frac{1}{10}$, und für die letzten 5 Jahre allein, während welcher 27 neue Mitglieder eingetreten sind, sogar $5\frac{2}{5}$. Man erkennt hieraus, ein wie missliches Unternehmen es ist, hienach ein Prognosticon für die Zukunft zu stellen. Aber geringer als $2\frac{1}{2}$ würde ich doch nicht wagen, die künftige jährliche Durchschnittszahl anzunehmen, und dieses Verhältniss würde auch wie ganz harmonisch zu der jetzigen Interessentenzahl 51 betrachtet werden können, insofern die bisherigen Erfahrungen 20 Jahre oder etwas weniges mehr als durchschnittliche Dauer der Theilnahme herausgestellt haben. In dieser Hypothese stellt sich also der gegenwärtige Geldwerth

*) Unter denselben ist G. mitgezählt, dessen Witwe Pension geniesst, der aber selbst eigentlich nicht recipirt gewesen war. Wenn man aber voraussetzen muss, dass in einem ähnlichen künftigen Falle auch wieder abseiten der Verwaltung ein ähnlicher Beschluss gefasst werden wird, so dürfen solche, wenn auch seltene, Fälle nicht unberücksichtigt bleiben, sondern müssen in einer längern Reihe von Erfahrungen als *auch* mögliche Chancen mitgezählt werden.

der Verpflichtungen der Kasse gegen alle künftigen Interessenten, oder der Verpflichtungen der dritten Rubrik dar:

zu 42957 Thalern bei $3\frac{1}{2}$ Proc. Zinsfuss
zu 32281 Thalern bei 4 Proc. Zinsfuss.

Wollte man aber die jährlichen Beitritte durchschnittlich zu 3 veranschlagen, so würde man für diese Rubrik, je nach dem Zinsfuss, 8591 oder 6156 Thaler *mehr* ansetzen müssen.

Fassen wir endlich die Resultate der bisherigen Anschläge zusammen, so ergibt sich aus den drei Rubriken

	$3\frac{1}{2}$ Proc.	4 Proc.
Verpflichtungen gegen die jetzigen Witwen	46529 Thl.	44582 Thl.
Verpflichtungen gegen die Hinterbliebenen der jetzigen Interessenten	60724 ,,	54014 ,,
Verpflichtungen gegen die künftigen Interessenten	42957 ,,	32281 ,,
Totalsumme aller Verpflichtungen	150210 Thl.	130877 Thl.

Von Nebenkosten will ich hier nur folgende Rubriken nach dem Durchschnitt der letzten 15 Jahre in Rechnung bringen (alles auf Gold reducirt):

Bau- und Reparaturkosten, jährlich	43 Rthl.
Processkosten nach Abzug der Erstattungen	39 ,,
Kosten der Rechnungsführung	124 ,,
Zusammen	206 Rthl.

Die Bau- und Reparaturkosten sind vielleicht nach diesem Durchschnitt zu niedrig angeschlagen. In dem oben S. [132] angeführten P. M. werden sie für einen Zeitraum von 24 Jahren (1768—1792) zu 1844 Thaler Cassenmünze (1975 Thl. 17 Ggr. Gold) angesetzt, was also einen jährlichen Durchschnittsbetrag von 82 Thalern ergeben würde: ich will jedoch bei obigem Mittel stehen bleiben. Diese 206 Thaler jährlicher Ausgabe repräsentiren ein Kapitalbedürfniss von 5886 oder von 5150 Thalern je nach dem Zinsfuss.

Es darf nicht übersehen werden, dass das bei allen Rechnungen zum Grunde liegende Interusurienprincip nur in soweit gültig ist, als alle Zinsen zu rechter Zeit eingehen und sofort wieder benutzt werden. In der Praxis ist diess aber nicht auszuführen, sondern es ist immer ein gewisser bald kleinerer bald grösserer Theil des Vermögens müssig. Man könnte den mittlern Betrag dieser Geldsumme zur Abkürzung Betriebsfonds nennen, obwohl diese Benennung genau zu reden nur auf denjenigen Theil des baaren Geldwerths passt, der bereit gehalten werden muss, damit die Kasse ihren eignen Zahlungsverpflichtungen pünktlich genügen könne. Es muss aber dazu auch eingerechnet werden das zeitweilig müssig liegende Geld, wenn sich nicht gleich Gelegenheit zu sicherer und vortheilhafter Belegung darbietet, und die ausstehenden Rückstände. Wie viel nun diess zusammen nach wirklichem mittlern Durchschnitte beträgt, lässt sich aus den Jahresrechnungen nur unvollkommen entnehmen, da dieselben nur angeben, *was* im Laufe des Jahres eingenommen und verausgabt ist, nicht aber, an welchem Datum (dass diess *zum Theil* aus den *Belegen*, und auch aus diesen nicht ohne Ungewissheit, ergänzt werden *könnte*, kommt hier nicht in Betracht). Ich habe indessen diesen Betrag aus den Rechnungsabschlüssen der letzten 11 Jahre*) so gut es geschehen kann abzuleiten gesucht, und danach gefunden: 2636 Thaler als mittlern Betrag des nicht zinstragenden Vermögenstheils.

Ich lasse nun die Vereinigung dieser verschiedenen Artikel hier folgen:

*) Früher stellten die Rechnungen den Vermögensstatus gar nicht auf.

	3½ Proc.	4 Proc.
Verpflichtungen gegen Witwen, jetzige und künftige Interessenten	150210 Thl.	130877 Thl.
Fonds zur Bestreitung der Bau-, Process- und Rechnungskosten ..	5886 ,,	5150 ,,
Unverzinslicher Fonds	2636 ,,	2636 ,,
Totalsumme	158732 Thl.	138663 Thl.

Gegenüber zu stellen ist nun der Kapitalbetrag der Einnahmequellen der Witwenkasse. Da der Betrag der Beiträge der Mitglieder bei obigem ersten Ansatze bereits in Abzug gebracht war, so bleibt hier nur das Geldvermögen und die Apothekenpacht zu veranschlagen.

Das Vermögen ist in dem letzten Rechnungsabschlusse, also für 1845 Juli 1, zu 116369 Thl. 17 Ggr. 4 Pf. ausgeworfen. Um es aber auf den 1. Oct. der oben S. [149] angeführten Rechnungsgrundlage gemäss zu reduciren, muss abgezogen werden der halbjährige auf Michaelis 1845 fällig gewordene Betrag der Witwenpensionen mit 2350 Thl.; hinzugefügt hingegen die Beiträge der Mitglieder für das Jahr 1844—1845, nemlich an vollen Beiträgen 480 Thl. und an Stückzahlungen 18 Thl. 17 Ggr. 4 Pf., ferner die halbjährige Michaelis 1845 fällig gewordene Apothekenpacht mit 500 Thl. Um nichts zu übergehen, müssten auch noch die während der drei Monate 1. Juli bis 1. Oct. eingegangenen Zinsen hinzugerechnet werden, deren Betrag mir unbekannt ist; es wird aber wohl nicht viel gefehlt sein, wenn ich dafür den vierten Theil der Zinseinnahme des letzten Jahres unter Abzug der Einziehungskosten, mit 1153 Thalern in Rechnung bringe. Hienach setze ich mit Weglassung der Bruchtheile das Vermögen der Kasse am 1. Oct. 1845 zu 116171 Thalern an.

Die Apothekenpacht bei ihrer jetzigen Höhe von 1000 Thl. repräsentirt ein Kapitalvermögen von 28571 Thl. oder von 25000 Thl. je nach der Höhe des vorausgesetzten Zinsfusses. Es ist folglich das effective Vermögen der Kasse:

144742 Thl. oder 141171 Thl., jenachdem man 3½ oder 4 Proc. annimmt.

Es ergibt sich hieraus schliesslich die *Bilanz* der Kasse

als ein *Deficit* von 13990 Thl. für Zinsfuss 3½ Proc.
als ein *Überschuss* von 2508 Thl. für Zinsfuss 4 Proc.

Dass der in der zweiten Voraussetzung sich ergebende Überschuss bei weitem kleiner ist, als die bei den einzelnen Bestandtheilen der Rechnung übrig bleibenden Unsicherheiten, braucht wohl kaum bemerkt zu werden: ein einziger Todesfall kann leicht auf einmal die ganze Bilanz um 3000—3500 Rthl. zum Nachtheil der Kasse abändern. Ausserdem darf man aber auch nicht übersehen, dass ich gar nichts für mögliche Verluste, durch Insolvenz der Schuldner, angesetzt habe: ich habe dies unterlassen, weil jede präsumtive Veranschlagung höchst precär bleiben muss. Es würde interessant, aber bei der Form der Rechnungsführung der Jahresrechnungen, zumal in den frühern Zeiten, nicht ohne einen sehr grossen Zeitaufwand ausführbar sein, alle seit der Stiftung eingetretenen Verluste zusammenzustellen: ich selbst habe, um doch einigermassen eine Idee davon zu erhalten, mich mit einer Zusammenstellung der letzten 14 Jahre begnügen müssen, die (falls ich nichts übersehen habe) den Totalverlust 1729 Thl. 14 Ggr. 1 Pf., also den durchschnittlichen jährlichen Verlust = 123 Thl. 13 Ggr. ergeben hat. Kapitalisirt beträgt diess je nach dem Zinsfuss 3530 Thl. oder 3088 Thl., und dürfte man diesen Durchschnitt als maassgehend betrachten, so würde die *Bilanz* sich für *beide* Zinsfüsse wie ein *Deficit* herausstellen, nemlich

von 17520 Thl. bei dem Zinsfuss von 3½ Procent
von 580 Thl. bei dem Zinsfuss von 4 Procent.

Göttingen 1845 November 2. C. F. GAUSS.

[III.]

[*Commissionsbericht.*]

Die für die Witwenkassen-Angelegenheit ernannte Commission beehrt sich, das Resultat ihrer Berathung hiemit vorzulegen.

Es kam zuerst in Frage, welcher Zinsfuss als Grundlage für die zu treffenden Maassregeln anzunehmen sei.

Die Capitale der Witwenkasse sind zwar gegenwärtig dem grössten Theile nach noch zu höherm Zinsfuss als 3½ Procent belegt, jedoch so, dass bei richtiger Würdigung der Verhältnisse der mittlere Zinsfuss jedenfalls wie niedriger als 4 Procent stehend betrachtet werden muss. In Erwägung aber von folgenden Gründen:

1) dass ganz unverkennbar der Zinsfuss in allen Ländern Europas, einzelner Fluctuationen ungeachtet, die Tendenz zu weiterm Herabsinken zeigt *);

2) dass jede vom Zinsfusse wesentlich abhängige Anstalt, wenn sie nicht für eine durchaus unsichere gelten soll, nicht auf dem augenblicklich bestehenden, sondern auf einem etwas niedrigern Zinsfuss basirt werden muss;

3) dass auch die Regulirungen von 1791 uns in so fern mit einem guten Beispiele vorangegangen sind, als man damals wenigstens die Intention hatte, die Casse für den Zinsfuss von 3 Procent sicher zu stellen;

hält die Commission die Zugrundelegung eines höhern Zinsfusses als 3½ Proc. nicht für zulässig, und daher für unumgänglich nothwendig, dass man sich die Deckung des bei diesem Zinsfusse resultirenden Deficits von 17520 Thalern zum Ziele setze.

Wenn man vermeinte, dass die auch bei den bisherigen Einrichtungen zur Zeit noch Statt findenden jährlichen Überschüsse **) schon an sich Schritte zur Deckung des Deficits seien, und dass dieses getilgt sein werde, sobald nur das jetzige Vermögen sich um 17520 Thaler vergrössert haben würde, so würde eine solche Meinung nur auf einer Begriffsverwirrung und auf einer gänzlichen Verkennung der Bedeutung des Deficits beruhen. Im Geiste des Calcüls, durch welchen die Grösse des Deficits eruirt ist, liegt in dem Resultate implicite schon die volle Berücksichtigung der jetzt noch Statt findenden jährlichen Ersparnisse mit, und diese wie Schritte zur Deckung betrachten, würde dasselbe sein, als wenn man sie zweimal in Rechnung brächte ***). Die Genossenschaft möge sich also keine Illusion über die Wahrheit

---

*) Einer der erleuchtetsten Staatsmänner, namentlich im Fache der Finanzverhältnisse, der Grossherz. Badensche Minister NEBENIUS sagt in seinem bekannten Werke Über die Herabsetzung der Zinsen der öffentlichen Schulden, S. 129: 'Das allmählige weitere Sinken des Zinsfusses, welches bei längerer Fortdauer des Friedens nicht ausbleiben kann, wird zuletzt überall, hier etwas früher, dort etwas später, die Reduction auf drei Procent herbeiführen, oder sie wenigstens als eine nur von dem Entschlusse der Regierung abhängige Maassregel erscheinen lassen'; und an einer andern Stelle S. 21: 'Einer Periode grösserer Regsamkeit in productiven Unternehmungen, die das Sinken des Zinsfusses eine Zeitlang aufhält, folgt um so gewisser ein rasches Sinken des Zinsfusses nach.'

**) Die Jahresrechnung 1814—1815 ergibt keinen Überschuss; denn

für 1814 Juli 1 war das Geldvermögen ausgeworfen zu 116375 Thl. 14 Ggr. 6 Pf.

für 1815 Juli 1 aber, nur zu .... 116368 ,, 17 ,, 1 ,,

Da jedoch im laufenden Jahre drei Witwen weniger sind, so wird in demselben wieder auf Überschuss zu rechnen sein, der auch wahrscheinlich noch eine Zeitlang fortdauern wird.

***) Da ähnliche Ansichten dem Vernehmen nach hie und da geäussert sind, in diesem Bericht aber zur Beseitigung derselben nicht der Ort sein würde, so ist in der Anlage noch eine nähere Beleuchtung des

machen: Deckung des Deficits kann und muss ganz allein durch zweckmässige Abänderungen in den bisherigen Einrichtungen bewirkt werden.

Es ist von selbst klar, dass schwache Mittel auch nur schwache Wirkungen hervorbringen können. Zu solchen wäre zu rechnen: die Verwandlung der bisher freiwilligen Theilnahme in eine gezwungene für alle künftig ernannte Professoren, und die Aufhebung der Freiheit, zu jeder Zeit wieder auszutreten. Dass die Wirksamkeit einer solchen Maassregel nur eine sehr geringe sein könne, erhellet aus dem Umstande, dass, nach einem 20jährigen Durchschnitt, die mittlere Anzahl der nicht beitragenden obwohl zur Theilnahme berechtigten Professoren nur = 4,1 gewesen ist, also der Betrag der dadurch der Kasse jährlich entgehenden Einnahme, nach bisheriger Beitragshöhe = 44 Thaler, was mithin nach Verschiedenheit des Zinsfusses einem eisernen Kapital von 1100 oder von 1257 Rthl. gleichkommt. Allein diess wird, wenn auch nicht ganz, doch grossentheils durch die Strafgelder aufgewogen, welche nach der bestehenden sehr zweckmässigen Einrichtung bei verspäteten Beitritten zu erlegen und zum Theil sehr beträchtlich gewesen sind, wie aus folgenden Proben zu ersehen ist: Es haben doppelt nachgetragen

L. für 12 Jahre, R. für 13 Jahre, L. für 19 Jahre, S. für 25 Jahre, C. für 30 Jahre.

Die Commission ist daher der Meinung, dass ein so geringer und zweifelhafter Vortheil, wie aus der Verwandlung des Instituts in eine Zwangsanstalt für die Kasse hervorgehen könnte, gegen die Zerstörung des bisherigen liberalen Charakters dieser Stiftung nicht in Betracht kommen dürfe.

Ein paar andere Mittel von gleichfalls nur schwacher oder unsicherer Wirksamkeit werden am Schluss dieses Berichts erwähnt werden.

Als wirklich kräftige Mittel können demnach nur betrachtet werden:

1) Erhöhung der Beiträge.

2) Herabsetzung der Pensionen.

3) Verbindung beider Mittel.

Die in der Denkschrift aufgestellte Bilanzrechnung gewährt die Möglichkeit, genau anzugeben, in welchem Maasse diese Mittel in Anwendung gebracht werden müssen, wenn der Zweck erreicht werden, d. i. die Bilanz um 17520 Rthl. gebessert erscheinen soll. Details darüber würden hier nicht an ihrem Platze sein; das Endresultat aber ist:

1) Wenn das Deficit bloss durch Erhöhung der Beiträge gedeckt werden soll, so müssen diese allgemein, d. i. für *alle* jetzigen und künftigen Mitglieder, auf 4½ Louisd'or erhöhet werden.

2) Soll die Herabsetzung der Pensionen allein die Deckung bewirken, so müssen dieselben auf 223 Rthl. reducirt werden (wobei die der Professorin G. auf 200 Rthl. bestehen bliebe).

3) Bei einer Vertheilung der Last auf Beitragende und Pensionirte käme es darauf an, welches Verhältniss der Theilung man wählte: sollen z. B. erstere ⅔, letztere ⅓ übernehmen, so würden die Beiträge 3⅔ Louisd'or, die Pensionen 241 Rthl. betragen müssen. Sollen die Beiträge nur auf 3 Louisd'or erhöhet werden, so können, wenn das Deficit wirklich gedeckt sein soll, nur 235 Rthl. Pension verabreicht werden.

Bei allen diesen Rechnungen ist vorausgesetzt, dass die gewählten Änderungen von Michaelis 1845 an in Wirksamkeit treten, und dass im zweiten oder dritten Falle die Pensionsherabsetzungen sämmtliche Witwen, die gegenwärtigen wie die künftigen treffen. Sollten, ohne alle Beitragserhöhung und ohne Herabsetzung der Pension für die gegenwärtigen Witwen, die künftigen Witwen die Last allein tragen, so könnte für diese nur die Pension zu 213½ Rthl. gewährt werden.

Gegenstandes beigefügt, obwohl dieselbe für alle, welche die Denkschrift schon mit der nöthigen Aufmerksamkeit gelesen und erwogen haben, ganz überflüssig sein wird.

Sollen nun aber die Abänderungen für jetzt auf das äusserste Minimum des Zulässigen gestellt werden, so ist die Commission der Meinung, dass diess auf die möglich schonendste Weise durch folgenden Plan geschehen kann, welchen sie daher, bedingungsweise, zur Annahme empfiehlt.

I. Die jährlichen Beiträge werden auf 3 Louisd'or erhöhet.

II. Die Pensionen bleiben für jetzt auf der Höhe von 250 Rthl. bestehen, so lange die Zahl der Witwen*), ohne die Professorin G. mitzuzählen, nicht über 18 hinausgeht, welches die gegenwärtige Anzahl ist. Im entgegengesetzten Falle wird die Pension so bestimmt, dass zu 200 Rthl., als festem Theile, noch die Dividende hinzukommt, welche auf jede einzelne Witwe fällt, indem man 900 Rthl. (als 18 mal 50 Rthl.) unter die vorhandenen gleichmässig vertheilt. Bei der höchsten Witwenzahl, welche bisher vorgekommen ist, nemlich 21 (ohne die Prof. G.) würde also die Pension noch 242 Rthl. 20 Ggr. 7 Pf. Gold betragen.

Man erachtet leicht, dass bei dieser Einrichtung das Deficit noch nicht völlig gedeckt ist: in der That ergibt die Rechnung, dass, den Anfang der Wirksamkeit vom 1. Oct. 1845 an vorausgesetzt, noch 2963 Rthl. ungedeckt bleiben, bei späterm Anfang des erhöheten Beitrags also nach Verhältniss mehr. Wenn jedoch der zur Zeit noch bestehende höhere Zinsgenuss vorerst noch ohne erhebliche Schmälerung fortdauern wird, und sonst keine bedeutenden Verluste eintreten, so könnte man hoffen, dass jener Deficitsrest nach einer mässigen Anzahl von Jahren von selbst zur Deckung gelangen werde. Die Gesellschaft darf jedoch, wenn sie jenen Plan annimmt, sich nicht verhehlen, dass die Witwenkasse unter so sehr knapper Anmessung der Mittel zu den Obliegenheiten einem Schiffe gleicht, welches schwerbelastet in seichtem Fahrwasser geht, und seine Sicherheit nur in fortwährendem wachsamen Sondiren findet.

Die Commission hält daher für nnumgänglich nothwendig, dass mit obiger Regulirung noch verbunden werde

III. eine in angemessenen Zeitintervallen (etwa aller 10 oder 5 Jahr) zu wiederholende sorgfältige neue Bilanzrechnung, und dass je nach deren Ergebnissen eventuell weitere Nachhülfe vorbehalten bleibe. Als eine nothwendige vorbereitende Maassregel dazu würde von jetzt an eine solche pünktliche Buchführung über die für die Witwenkasse relevanten persönlichen Verhältnisse aller Interessenten, wie bereits an mehrern Stellen der Denkschrift angedeutet ist, einzuführen sein.

Die Commission hält es nicht für nöthig, die Vortheile, welche diese Regulirung darbietet, hier weitläuftig zu entwickeln, und macht nur auf Folgendes aufmerksam. Findet sich nach der ersten oder zweiten Revision, dass die Bilanz sich nicht nur gebessert, sondern viel mehr gebessert habe, als man hatte hoffen können, so wird man die Pensionen weiter erhöhen dürfen von 250 Rthl. auf 260 Rthl. für den Fall einer Witwenzahl unter 18, oder für den Fall der höhern Witwenzahl die ganze Zusatzdividende von 900 Rthl. auf 1080 Rthl. (d. i. 18 mal 60 Rthl.). Findet sich hingegen bei der Revision eine Verschlechterung der Bilanz, so wird man sich einige weitere Anstrengung gefallen lassen aber zugleich um so mehr Glück wünschen müssen, 1846 nicht die Hände in den Schooss gelegt zu haben. In beiden Fällen aber wird man die weitern Maassregeln mit Bewusstsein der Sicherheit oder der Nothwendigkeit treffen können.

Dass mit Annahme dieser Regulirung der Anfang des §. 10 des Regulativs, der in seiner unklaren Fassung als eine Hauptquelle des jetzigen Übels betrachtet werden muss, von selbst wegfällt, braucht nicht erinnert zu werden.

Bei der Anwendung der in diesem Plane enthaltenen Normirung darf abseiten der Witwenkasse kein

*) Es werden hier der Kürze wegen immer nur Witwen genannt, es versteht sich aber von selbst, dass immer eine Waisenpension wie eine Witwenpension gezählt werden muss.

Unterschied zwischen den jetzigen Witwen und den künftig hinzukommenden gemacht werden, denn nur unter Voraussetzung einer ganz gleichen Behandlung ist es möglich geworden, das Deficit auf den mässigen Rest von 2963 Rthl. herabzubringen. Zudem würden die neuen Witwen, wenn den frühern eine exceptionelle Bevorzugung *aus der Kasse* gewährt würde, sich für lädirt halten, da die Möglichkeit, bei so sehr gelinden Modificationen der Pensionen stehen zu bleiben, bloss durch die Erhöhung der Beiträge bewirkt wird, an welcher die Ehemänner der neuen Witwen Theil genommen haben werden, die der frühern aber nicht. Da jedoch, von der andern Seite, als wünschenswerth erscheint, dass jeder wenn auch im Rechte nicht begründeten Unzufriedenheit der gegenwärtigen Witwen vorgebeugt werde, so schlägt die Commission vor

> dass von Seiten der Universität an das h. Curatorium die Bitte gerichtet werde, für die Zeit, wo in Folge obiger Regulirung der Pensionsbetrag unter 250 Rthl. herabgehen wird, den gegenwärtigen Witwen, so viele dann noch am Leben sein werden, das an 250 Rthl. fehlende aus der Universitätskasse ergänzen zu lassen.

Eine solche Bitte würde sich mit nahe liegenden Gründen unterstützen lassen. Auch ist leicht zu übersehen, dass eine solche Beihülfe der Universitätskasse keine grosse Last auflegen könne. Unmöglich wäre es sogar nicht, dass der Fall der Beihülfe *niemals* einträte. Aber sollte sie auch, wenn früher eine neue Witwe hinzukommt, ehe eine der bisherigen abgegangen ist, bald schon erforderlich werden, so wird doch voraussichtlich für geraume Zeit der Zuschuss für jede einzelne Witwe nur wenige Thaler betragen können. In späterer Zukunft, z. B. nach 30 Jahren, könnte wenn wir Beispielshalber einen der extremsten Fälle annehmen, dass nemlich bis dahin gar keine Erhöhung der Pension zulässig geworden und die Zahl der Witwen auf 30 gestiegen wäre, die Grösse des Zuschusses für eine Witwe 20 Rthl. betragen: allein dann werden wahrscheinlich von den jetzigen Witwen nur noch wenige am Leben sein.

Die Commission glaubt hier noch ein paar andere Einrichtungen, die als Mittel zur Verbesserung der Bilanz zur Sprache gebracht sind, erwähnen zu müssen, ohne jedoch einen Antrag darauf richten zu wollen.

Es ist zuvörderst in Frage gekommen, ob nicht einige Verbesserung der Bilanz dadurch erreicht werden könne, dass den künftig eintretenden ausserordentlichen Professoren nur der Anspruch auf eine geringere Witwenpension beigelegt würde. Diese würden sonach eine zweite Klasse von Interessenten bilden, aus der sie bei ihrer Beförderung zur ordentlichen Professur von selbst in die erste hinaufrückten: die Beiträge der Mitglieder zweiter Klasse sollten dagegen ihre bisherige Grösse von 2 Louisd'or behalten. Den jetzigen ausserordentlichen Professoren sollte die Wahl gelassen werden, ob sie in der ersten Klasse bleiben oder in die zweite übertreten wollten, so jedoch, dass im letztern Fall ein Rücktritt in die erste Klasse nicht zulässig wäre, so lange sie ausserordentliche Professoren blieben.

Zu richtiger Würdigung dieses Gedankens ist zuvörderst wohl zu bedenken, dass in dem oben S. [160] aufgestellten Hauptplan die Reduction des Deficits von 17520 Rthl. auf 2963 Rthl. wesentlich von der Voraussetzung abhängt, dass die Beiträge *aller* Mitglieder, der jetzigen wie der künftigen von 2 auf 3 Louisd'or erhöhet werden, und dass mithin jener Hauptplan gar nicht bestehen kann, wenn diese Voraussetzung einen wesentlichen Abgang erleidet, ohne dass dafür anderweit ein vollständiger und sicherer Ersatz eintritt. Durch diese Betrachtung wird eine sonst durch ihre Einfachheit sich empfehlende Art, die Pension der zweiten Klasse niedriger zu normiren, von selbst als unzulässig ausgeschlossen, die nemlich, dass man den Witwen zweiter Klasse nur den fixen Theil der Pension, nemlich 200 Rthl. einräumen, oder sie völlig der Professorin G. gleichstellen sollte. Denn in der That ist leicht zu übersehen, dass dadurch sehr wahrscheinlich *die Kasse* gar keinen Ersatz für jene Einbusse an Beiträgen erhalten, und nur die Witwen erster Klasse etwas besser gestellt werden, indem die Zusatzdividende unter eine geringere Zahl von Participanten vertheilt würde.

Eher könnte als zulässig erscheinen die Einrichtung, dass für die Witwen zweiter Klasse, neben gleichmässiger Theilnahme an der Zusatzdividende, der fixe Theil der Pension niedriger als 200 Rthl. z. B. zu 150 Rthl. festgesetzt würde. Erwägt man jedoch,

dass die Einbusse an Beiträgen sogleich anfängt, sobald die zweite Klasse constituirt ist, und dann fortwährend zunimmt, je mehr neue ausserordentliche Professoren ernannt werden;

dass jetzt unter den 51 Mitgliedern der Witwenkasse 20 ausserordentliche Professoren sich befinden, und folglich, wenn auch in Zukunft ein ähnliches Verhältniss bleibt, von der im Hauptplane vorausgesetzten Beitragserhöhung ein nach und nach bis zu $\frac{2}{5}$ anwachsender Theil ausbleibt; indess dagegen

der Ersatz aus eintretenden geringern Pensionirungen aller Wahrscheinlichkeit nach erst nach langer Zeit anfangen, und bei der sehr geringen Mortalität, die demjenigen Alter zukommt, in dem die Mehrzahl der ausserordentlichen Professoren zu stehen pflegt, auch, durchschnittlich, selten sein wird

so bleibt es sehr problematisch, ob die Bestimmung des festen Theils der Pension zu 150 Rthl. für die zweite Klasse zureichen würde, der Kasse auch nur den vollen Ersatz für den Verlust durch die geringern Beiträge zu gewähren. Noch viel weniger aber dürfte man eine solche Maassregel als entschieden zum *Vortheil* der Kasse gereichend annehmen. [Dazu wäre man nur berechtigt, wenn man entweder die Beiträge in der zweiten Klasse eben so hoch wie in der ersten beibehielte, oder die Pension noch erheblich unter 150 Rthl. herabsetzte; allein das eine wie das andere würde so sehr wie eine Härte erscheinen, dass die Commission sich nicht dafür erklären kann.]

Eine andere Maassregel, durch welche zuweilen der Kasse einiger Vortheil zuwachsen könnte, wäre die Aufhebung der im 10. Artikel des Regulativs enthaltenen Bestimmung, nach welcher die Witwenpension durch eine Wiederverheirathung der Witwe ganz erlischt. Der Zweck dieser Verordnung kann nur gewesen sein, dass man in der Voraussetzung, solche Fälle würden öfters vorkommen, der Kasse einen Gewinn hat zuwenden wollen. Allein dieser Zweck wird so gut wie ganz verfehlt, da der Erfahrung zufolge Wiederverheirathungen der Witwen unter diesen Umständen etwas fast Unerhörtes sind. (Es ist schon in der Denkschrift bemerkt, dass in mehr als 100 Jahren nur Ein solcher Fall vorgekommen ist.) Zweckmässiger ist ohne Zweifel die bei andern Witwenkassen bestehende Einrichtung, dass die Witwenpension während eines zweiten Ehestandes nur ruhet, aber wieder auflebt, wenn die Wiederverheirathete zum zweiten Male Witwe wird. Man vergleiche die Statuten der Hof- und Civil-Diener Witwenkasse §. 25, der Prediger-Witwenkasse §. 24, der Schullehrer-Witwenkasse §. 22. Der Fall, wo der zweite Ehemann wieder ein hiesiger Professor ist, würde wohl ausgenommen werden müssen, da es unzulässig scheint, aus unsrer Witwenkasse Einer Witwe (oder Einer Familie) zwei Pensionen zu gewähren. Dagegen aber dürfte es rathsam sein, von weitern Beschränkungen der Reviviscenz Umgang zu nehmen, und namentlich die volle Professorenwitwenpension auch für den Fall wieder zuzuführen, wo die Witwe durch ihre zweite Verheirathung z. B. mit einem Prediger oder andern Staatsdiener eine Pension aus einer *andern* öffentlichen Kasse erhielte. Man muss nemlich erwägen, dass von einer Abänderung des bisherigen Statuts nur in so weit eine Wirkung erwartet werden kann, als die Abänderung nicht wieder durch Ausnahme-Verfügungen aufgehoben ist. Dass übrigens in dem Falle, wo aus der ersten Ehe Kinder unter 20 Jahren vorhanden sind, die Waisenpension auch während der zweiten Ehe in demselben Maasse wie bisher fortdauern müsste, versteht sich von selbst.

Note zum Commissionsberichte.

Wenn die Ausdrücke Bilanz und Deficit in Beziehung auf das Finanzbudget eines Staats gebraucht werden, so versteht man unter ersterer die Vergleichung der Ausgaben und Einnahmen, wie sie für Ein Jahr, oder für eine kleine Anzahl von Jahren, die eine Finanzperiode bilden, nach präsumtiver Veran-

schlagung erwartet werden, und unter Deficit den Unterschied, wenn für die Ausgabe eine grössere Summe sich ergibt, als für die Einnahme. In einem solchen Zusammenhange sind Überschüsse und Deficit einander gerade entgegengesetzt, und das eine schliesst das andere von selbst aus.

Von einer solchen Rechnung unterscheidet sich diejenige, welche in der zweiten Abtheilung der Denkschrift für die Witwenkasse geführt ist, in zwei wesentlichen Stücken.

1) Die letztere vergleicht nicht die Ausgaben und Einnahmen für Ein Jahr, oder für einige Jahre, sondern umfasst beide für die ganze unbegrenzte Zukunft, so weit und so genau, als es möglich ist, dieselbe im Voraus zu veranschlagen.

2) Sie summirt nicht die Gelder selbst, in der Grösse wie sie werden verausgabt oder vereinnahmt werden (was auch wegen der Unbegrenztheit ohne Sinn sein würde), sondern deren nach bestimmtem Zinsfuss auf den Anfangszeitpunkt discontirte oder reducirte Werthe. In diesem Sinne lässt sich auch eine ohne Begrenzung fortlaufende Reihe von Ausgaben oder Einnahmen doch zu einem bestimmten endlichen Resultate summiren, und diese Möglichkeit leuchtet leicht ein, wenn man bedenkt, dass eine Geldsumme durch Discontirung für einen sehr langen Zeitraum ganz enorm zusammenschmilzt, wie z. B. eine nach 422 Jahren zu leistende Zahlung von 7000 Rthl. nach dem Zinsfusse von $3\frac{1}{2}$ Procent jetzt nur den Werth von *einem Pfennig* hat. Noch leichter kommt man zu demselben Resultate durch die Erwägung, dass der jetzige Geldwerth einer ohne Aufhören jährlich in gleicher Grösse zu leistenden Zahlung nichts anderes ist, als die Kapitalsumme, welche nach dem gewählten Zinsfusse jährlich einen eben so grossen Zins abwirft.

Es ist nun zwar schon von selbst klar, dass wenn nach den factischen Grundlagen einer solchen Rechnung die Ausgaben in späterer Zeit grösser sein werden als jetzt, die ausser den Kapitalzinsen aber noch Statt findenden Einnahmen hingegen in der Rechnung nicht als steigend angenommen werden dürfen, das Resultat der Rechnung ein Deficit sein wird, falls jetzt Einnahme gegen Ausgabe keinen Überschuss gibt. Allein es lässt sich nicht ohne Weiteres umgekehrt behaupten, dass wenn jetzt Überschüsse von der Einnahme gegen die Ausgabe Statt finden, *kein* Deficit in der Totalrechnung sein werde, denn dazu wird nicht nur das Dasein von Überschüssen sondern eine hinlängliche Grösse derselben erfordert. Hat eine richtige Total-Bilanz-Rechnung als Endresultat ein Deficit ergeben, so steht dadurch fest, dass die jetzigen jährlichen Überschüsse zu klein sind, um die in späterer Zeit bevorstehenden Ausfälle zu decken. Die richtige Rechnung hat die gegenwärtigen zeitweiligen Überschüsse schon als Bestandtheile der Bilanz mit berücksichtigt, und dieselben dürfen der Anstalt nicht *zweimal* in Einnahme gestellt werden.

Eben so falsch, wie die Einbildung, dass jetzige zeitweilige Überschüsse ein jetzt vorhandenes Deficit vermindern werden, ist die Vorstellung, dass dies Deficit dann getilgt sein werde, sobald das Vermögen eine dem Betrage des Deficits gleichkommende Vergrösserung erhalten habe. Ein solcher Schluss ist nur in dem einzigen Falle zulässig, wenn die Vergrösserung des Vermögens *sogleich* und zwar durch *fremde* in der Bilanz nicht schon enthaltene Zuflüsse bewirkt wird. Gesetzt z. B. das Vermögen der Witwenkasse habe sich nach 20 Jahren (etwa theilweise unter Mitwirkung von neuen Zuflüssen die aber nicht fortdauernder Art wären) um 17520 Rthl. vergrössert, so wird darum alsdann doch das Deficit nicht gehoben sein, sondern es kann dann möglicherweise grösser sein als jetzt. Die Bilanz am 1. Oct. 1865 wird nemlich hervorgehen aus Vergleichung des dann vorhandenen Kassenvermögens mit dem auf *diesen* Zeitpunkt discontirten Betrage aller von da an bevorstehenden Ausgaben, welcher Betrag viel grösser sein wird, als der ähnliche Betrag für den 1. Oct. 1845, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil 1865 der Zeitpunkt der viel grössern jährlichen Ausgaben so viel näher gerückt sein wird, ja höchst wahrscheinlich diese alsdann schon in bedeutendem Maasse eingetreten sein werden.

[IV.]

Bilanz zwischen den Verpflichtungen und den Mitteln der Professoren-Witwenkasse zu Göttingen.

In Folge des von der Universitäts-Kirchendeputation vor einigen Monaten mir eröffneten Wunsches habe ich mich der neuen Berechnung der Bilanz der Professoren-Witwenkasse unterzogen und diese Arbeit jetzt vollendet. Ich werde meinen Bericht darüber so anordnen, dass ich zuerst die nöthigen allgemeinen Erläuterungen vorausschicke; hiernächst die Bilanzrechnung selbst in einer concisen leicht übersichtlichen Form aufstelle; sodann die einzelnen Posten der Rechnung näher erörtere, und endlich die Vorschläge für die nächst bevorstehende Periode daran knüpfe.

Die Bilanzaufstellung für ein solches Institut wie unsre Witwenkasse muss sich offenbar auf einen bestimmten *Zeitpunkt* beziehen. Dass ich dafür diesmal den 1. October 1851 gewählt habe, wird keiner weitläuftigen Rechtfertigung bedürfen. Die erste Bilanzrechnung war für den 1. October 1845 gestellt gewesen: aus nahe liegenden Gründen muss die Zwischenzeit zwischen zwei auf einander folgenden Prüfungen eine volle Anzahl von Jahren umfassen, um das Resultat reiner hervortreten zu lassen; endlich, wenn in Folge der neuen Prüfung eine Modification der bisherigen Punktationen als angemessen erscheinen sollte, so wird man bei dem Beschluss offenbar viel lieber sich auf den neuesten Zustand stützen wollen, als auf denjenigen, welcher vor einem Jahre Statt gefunden hat. Die jetzigen Statuten schreiben zwar aller fünf Jahre eine neue Revision vor: allein der Zeitpunkt, wo die Aufforderung an mich gelangte, liess eine andere Wahl nicht mehr zu; auch ist durch diese Erstreckung des fünfjährigen Zeitraumes auf einen sechsjährigen nicht nur nichts verloren, sondern vielmehr eine noch etwas entschiednere Ausprägung der Zustandsänderung gewonnen.

Das Wesen der ganzen Bilanzrechnung der jetzigen wie der von 1845, besteht darin, dass nicht für das nächste Jahr und nicht für einige Jahre, sondern für alle Zukunft, einerseits die Obliegenheiten des Instituts, andererseits seine Hülfsmittel auf den äquivalirenden Capitalwerth zurückgeführt werden. Nur auf diesem Wege ist es möglich, einer Anstalt, die nur zum kleinsten Theile auf Beiträge, und dem grössten Theile nach auf ihren Vermögensbesitz basirt, und in den letzten Decennien an Theilnehmerzahl so sehr vergrössert ist, die Haltbarkeit für alle Zukunft zu sichern.

Obgleich diesmal eben so wie 1845 alle Rechnungen doppelt geführt sind, nemlich nach dem Zinsfuss von $3\frac{1}{2}$ und nach dem von 4 Procent, so habe ich es doch für hinreichend gehalten, hier nur die Resultate nach ersteren aufzuführen. Ein Theil des Vermögens trägt wirklich nur $3\frac{1}{2}$ Procent; von einem andern jetzt höher verzinsbaren Theile ist eine Zinsherabsetzung in nicht zu grosser Ferne nicht unwahrscheinlich: jedenfalls aber ist eine Forderung der Vorsicht, bei derartigen Rechnungen immer einen etwas niedrigern Zinsfuss zum Grunde zu legen, als dermalen gangbar ist.

Als Mortalitätstafeln, so weit die Rechnungen davon abhängig sind, habe ich auch diesmal die von Brune benutzt, die zuverlässigsten, die überhaupt vorhanden sind.

Diejenigen Rechnungselemente, welche nur aus den bei der Witwenkasse selbst gemachten Erfahrungen abgeleitet werden können, und also an Zuverlässigkeit gewinnen, wenn diese Erfahrungen einen grössern Zeitraum umfassen, habe ich für die jetzige Bilanzrechnung sämmtlich neu bestimmt, indem ich die frühern Erfahrungen mit den neu hinzugekommenen verknüpfte. Bei den einzelnen Positionen wird dies näher angegeben werden.

Endlich bemerke ich noch, dass bei allen Geldangaben Goldwährung zu verstehen ist, und dass die Originalrechnungen zwar durchgehends auf Bruchtheile des Thalers genau geführt, diese Bruchtheile aber in gegenwärtigem Auszuge weggelassen sind. Aus diesem Umstande hat man einige scheinbare kleine Dis-

cordanzen bei den angesetzten Summationen zu erklären, die hin und wieder eine oder ein Paar Einheiten betragen können.

Bilanzrechnung der Witwenkasse für 1. October 1851.

Schuld.

		Thaler
	Capitalwerth des festen Theils der Pensionen	
1.	für die jetzt vorhandenen Witwen . .	28786
2.	für Witwen und Waisen der jetzigen Genossen	58463
3.	für Witwen und Waisen der künftig beitretenden Genossen	40712
4.	Capitalwerth des beweglichen Theils der Pensionen nach jetziger Normirung . .	25715
5.	Capitalwerth der sonstigen Ausgaben . . .	12907
	Summa Thaler	166581

Gut.

		Thaler
	Capitalwerth	
6.	des Ertrags der Apotheke	28571
7.	der Beiträge der jetzigen Genossen . . .	8961
8.	der Beiträge aller künftig eintretenden Genossen	13596
9.	Geldvermögen der Witwenkasse	122290
	Summa Thaler	173419

Das Resultat der Bilanzrechnung ist also ein *Überschuss* von 6837 Thalern.

Die einzelnen Positionen der vorstehenden Bilanzrechnung begleite ich mit folgenden nähern Erörterungen.

Zu (1). Der Capitalwerth der Witwenpensionen für sämmtliche 15 jetzt vorhandene Witwen nach dem festen Bestandtheile (zu 200 Thaler für jede) ist die Summe der jetzigen Capitalwerthe dieser Pensionen für jede einzelne Witwe nach ihrem Lebensalter berechnet, mit Berücksichtigung eventueller Waisenpensionen, wo minorenne Kinder jetzt vorhanden sind. Ich setze diese Werthe einzeln hieher: die Witwen sind numerirt nach der vollständigen Reihenfolge seit Stiftung der Anstalt.

31	Scn.	1066 Thaler	55	H.	1834 Thaler	65	H.	2003 Thaler
44	F.	1622	58	G.	2730	66	H.	1172
50	H.	2849	59	W.	1862	68	M.	2923
52	P.	1479	62	B.	1003	69	D.	2897
53	M.	1812	63	G.	1309	70	L.	2124

Die Zahlen (2) und (7) sind durch folgendes Verfahren ermittelt, dessen Rechtfertigung in der Denkschrift von 1845 zu finden ist. Unter den 53 Mitgliedern, welche gegenwärtig die Genossenschaft ausmachen, sind zur Zeit 47 verheirathet. Für jedes derselben ist, nach Maassgabe des Alters des Mannes und der Frau, der jetzige Capitalwerth sowohl der von ersterm zu leistenden Beiträge (zu 15 Thaler jährlich), als der der letztern im Fall des Überlebens zu Theil werdenden Witwenpension nach ihrem festen Theile (zu 200 Thaler) berechnet. So verstanden, ergibt sich die Summe der Beiträge zu 7947 Thaler, die Summe der Pensionen zu 45364 Thaler. Um die 6 jetzt unverheiratheten Mitglieder mit zu berücksichtigen, werden diese Zahlen mit $\frac{53}{47}$ multiplicirt, woraus die Beiträge = 8961 Thaler, und die Pensionen = 51155 Thaler hervorgehen: erstere Zahl ist obige Position (7). Letztere, der Waisenpension wegen um $\frac{1}{7}$ vergrössert, ergibt 58463 Thaler, die Position (2).

Die Rechtfertigung der Annahme des Bruches $\frac{1}{7}$ für die Waisenpensionen, anstatt des 1845 angewandten Bruches $\frac{1}{8}$, wird bei der Nachweisung der Positionen (3) und (5) gegeben werden.

Ich setze noch die Resultate obiger Rechnung für die einzelnen 47 verheiratheten Mitglieder hieher. Die Numerirung ist die Reihefolge des Eintritts in die Anstalt; die Zahlen der dritten Columne sind die Beiträge, die der vierten die Pensionen.

135	O.	102 Thl.	1179 Thl.	170	R.	124 Thl.	1261 Thl.	199	F.	167 Thl.	937 Thl.
138	C.	82	1402	171	C.	132	955	200	L.	211	748
139	U.	137	730	173	F.	168	931	201	W.	194	749
140	H.	134	1199	174	H.	163	1354	202	M.	201	991
141	L.	113	833	175	R.	195	996	203	B.	167	751
147	R.	133	1188	176	L.	190	1122	204	E.	201	697
149	G.	127	1439	177	W.	176	936	205	H.	195	790
151	O.	173	870	180	T.	177	887	206	H.	188	854
153	B.	154	1271	185	W.	198	919	207	W.	200	783
155	K.	145	727	186	H.	169	1134	208	E.	175	1278
156	v. S.	146	662	187	W.	180	748	209	B.	154	1051
160	H.	161	1173	189	H.	172	953	211	S.	195	1164
161	B.	156	682	192	R.	188	782	212	T.	181	895
164	W.	159	1155	193	G.	206	896	213	W.	200	811
167	S.	190	835	195	D.	191	822	214	B.	188	915
169	Z.	180	943	196	B.	207	968				

Zum Verständniss der Positionen (3) und (5) dient Folgendes. Das älteste der jetzigen Mitglieder hat die Numerirung 135: die ersten 134 sind sämmtlich verstorben oder auf andere Weise ausgeschieden. Für jedes dieser 134 ausgeschiedenen Mitglieder ist berechnet: der Betrag der von demselben geleisteten Beiträge, und, wo Hinterbliebene Pensionen erhalten haben, der Betrag der Witwenpensionen und der Waisenpensionen. Alle diese Zahlungen sind aber nicht nach ihrer wirklichen Grösse in Ansatz gebracht, sondern nach den gegenwärtig bestehenden Sätzen, nemlich 15 Thaler für jährlichen Beitrag, und 200 Thaler als jetziger Betrag der festen Pension: ausserdem aber sind sämmtliche gezahlten oder empfangenen Gelder durch Discontirung auf das Zeitmoment des Eintritts des betreffenden Mitgliedes reducirt. Rücksichtlich der Modificationen, welche an diese Rechnungen noch angebracht werden mussten bei denjenigen aus diesen 134 Mitgliedern, von welchen die Witwen noch am Leben sind, beziehe ich mich auf meine Denkschrift von 1845.

So verstanden, beträgt für alle diese 134 Mitglieder

die Summe aller Beiträge . . . . . . 25506 Thaler
die Summe aller Witwenpensionen 66771 „
die Summe aller Waisenpensionen 9604 „

woraus sich die Durchschnittswerthe ergeben: für die Beiträge 190,35 Thaler, für die Witwenpensionen 498,29 Thaler, für die Waisenpensionen 71,67 Thaler. Im Jahr 1845, wo die bis dahin ausgeschiedenen Mitglieder sich in ununterbrochener Folge nur bis zu Nr. 108 erstreckten, hatte ich für diese eine ganz ähnliche Rechnung ausgeführt, welche für die Durchschnittswerthe, wenn sie in dieselbe Form gebracht werden, ergeben hatte: 193,18 Thaler; 503,08 Thaler; 81,07 Thaler. Man erkennt hieraus mit Befriedigung, dass die bisherigen Erfahrungen sich schon sehr wohl zur Feststellung von Durchschnittswerthen eignen, und darin der Abschätzung der künftigen Bedürfnisse eine werthvolle Grundlage geben. Nach dem neuen Resultate ist das Verhältniss der Waisenpension zur Witwenpension durchschnittlich sehr nahe $\frac{1}{7}$, welches zur Feststellung der Position (2) benutzt ist (man vergl. S. [165] am Schluss).

Da nun ferner den allmähligen Leistungen jedes neu eintretenden Mitgliedes einerseits, und den Pensionsbezügen durch seine Relicten andererseits, die Summen 190,35 und 569,96 Thaler, im Zeitpunkte des Eintritts einmal in die Kasse eingezahlt und resp. aus derselben ausgezahlt, nach den Durchschnittswerthen äquivaliren: so brauchte man, wenn jedes Jahr Ein neues Mitglied einträte, nur diese beiden Zahlungen jedes Jahr wiederholt zu denken, und sie nun zu capitalisiren, d. i. ein für allemal der Kasse theils die Capitalsumme 5439 Thaler als Einnahme zuzuweisen, theils die andern 16285 Thaler als Ausgabe anzurechnen, um den Verpflichtungen und Berechtigungen aller künftig beitretenden Mitglieder Rechnung zu tragen. Diese Summen müssen nun aber noch mit derjenigen Ziffer multiplicirt werden, welche die Durch-

schnittszahl der jährlich neu beitretenden Mitglieder ausdrückt. In der Denkschrift von 1845 habe ich dafür 2½ angenommen, ohne zu verschweigen, dass dieses Element ein sehr ungewisses ist: alles wohl erwogen, habe ich dieselbe Ziffer auch diesmal beibehalten zu müssen geglaubt, und so haben sich die in der Bilanzrechnung angesetzten Positionen (8) und (3) ergeben.

Die Position (1) ist die capitalisirte jährliche Ausgabe von 900 Thalern, wovon der bewegliche Theil der Witwenpension zu bestreiten ist. Diese Summe wird unter alle berechtigten Witwen zu gleichen Theilen vertheilt, wenn deren Anzahl 18 oder mehr beträgt; ist dio Anzahl kleiner, so erhält jede 50 Thaler. Es erhellet hieraus, dass im letztern Falle (der auch in diesem Augenblick Statt findet) die Kasse eine Ersparniss macht, welche in der Bilanz nicht mit berechnet ist, und für etwas längere Zeit auch gar nicht im Voraus berechnet werden kann: jedenfalls aber ist diess nur ein vorübergehender Vortheil, welcher in späterer Zeit, wenn die Folgen der jetzigen grossen Ausdehnung der Genossenschaft sich erst entwickelt haben werden, selten oder vielleicht niemals wieder vorkommen wird.

Als Durchschnittswerthe der Nebenausgaben habe ich angenommen

	28 Thl.	1 Ggr	— Pf.	für Processkosten, soweit sie nicht erstattet,
	61 ,,	8 ,,	9 ,,	für Baukosten
	133 ,,	9 ,,	5 ,,	für Rechnungsführung und Copialien
	136 ,,	6 ,,	3 ,,	für Verluste
Zusammen	359 Thl.	4 Ggr.	5 Pf.	

Diese Ansätze gründen sich auf die Erfahrungen der letzten 21 oder 20 Jahre. Bei der Rechnung von 1845 hatten nur Erfahrungen von 15 oder 14 Jahren zum Grunde gelegt werden können, welche die Totalsumme 323 Thl. 13 Ggr. ergeben hatten. Die erstere Zahl, capitalisirt, erbringt 10262 Thl. 10 Ggr. Dieser Betrag unter Zufügung von 2641 Thl. 4 Ggr. (als mittlerm Werthe des unproductiven Vermögenstheils nach 17jährigem Durchschnitt) bildet die Position (5). Für die letztere Zahl war übrigens in der Rechnung von 1845 nach 14jährigem Durchschnitt der nahe gleiche Werth 2635 Thl. 18 Ggr. 4 Pf. angenommen worden.

Die Position (6) entsteht aus der Capitalisirung der jährlichen Einnahme aus dem Pachtzins der Universitäts-Apotheke (1000 Thaler).

Die Position (9) bedarf auch noch einiger Erläuterungen. In der Jahresrechnung für 1850—1851 ist das Geldvermögen der Kasse für den 1. Julius 1851 zu 125076 Thl. 1 Ggr. 11 Pf. angesetzt, wovon die verzinslichen Capitale 123372 Thl. 2 Ggr. 7 Pf. ausmachen; das übrige besteht in dem baaren Geldvorrath, den Rückständen, und einem dem Universitätsapotheker bewilligten unverzinslichen Vorschuss. Die Capitale sind etwa zur Hälfte bei Privatschuldnern hypothekarisch, die übrigen in unkündbaren Staatspapieren angelegt, und diese letztern sind in der neuesten Jahresrechnung (eben so wie schon in mehrern vorhergehenden) schlechthin nach dem Nominalwerthe in Ansatz gebracht. Im Jahre 1845 waren hingegen diese Ansätze nach den Ankaufpreisen gemacht, und ich habe in meiner damaligen Rechnung dieselben ungeändert beibehalten, weil damals die Schwankungen in dem Wertho der Staatspapiere viel geringer waren, als seit den letzten 3 bis 4 Jahren. Jetzt, wo ein beträchtlicher Theil der zum Vermögen der Witwenkasse gehörenden Staatspapiere so sehr tief unter dem Nennwerthe steht, halte ich für nothwendig, in der Bilanzrechnung die Papiere nach dem zeitigen wirklichen Werthe, wie sie sich realisiren lassen, zu evaluiren. Ich habe dazu die Börsencourse in Frankfurt und Hannover vom 1. October angewandt, weil doch ein bestimmtes Datum gewählt werden musste. Es sind die folgenden

Oesterreichische	4½ Metalliques . .	67¼	Hannoversche	5 Proc. . . .	104¼
—	4½ bei Goll	69⅞	—	4 Proc. . . .	102
—	4½ bei Bethmann	71⅞	—	3½ Courant .	98¼
Badensche 3½		87⅞	—	3½ Gold . .	97⅞

Den Goldcours habe ich angenommen 1 Louisd'or = 9 fl. 38 kr. und = 5¼ Thaler Courant. Theilweise sind übrigens die Course seitdem noch etwas, obwohl nur wenig, gewichen.

Das Resultat dieser Reductionen ist, dass dieselben verzinslichen Capitale, welche nach dem Nennwerthe zu 123372 Thaler angesetzt sind, nach dem zeitigen Börsencourswerthe nur 119044 Thl. 23 Ggr. erbringen, welcher Summe ich noch diejenigen 800 Thaler zusetze, für welche das vormals Müllersche Haus verkauft ist. So stellt sich unter Beifügung der andern Posten (baarer Geldvorrath u. s. w.) das Geldvermögen der Witwenkasse für den 1. Julius 1851 auf

121518 Thaler 22 Ggr.

Um, so weit ich dazu im Stande bin, die Reduction auf den 1. October 1851 abzuschätzen, ziehe ich von dieser Summe ab die auf Michaelis fällig gewordenen Witwenpensionen mit . 1787 Thl. 12 Ggr.
und setze hinzu
den Betrag der Beiträge für das Jahr 1850 bis 1851 . . . . 750 „
den halbjährigen Pachtzins für die Apotheke . . . . 500 „
und einen vierteljährigen Betrag der Zinseinnahme, unter Zugrundelegung der letztjährigen mit Abzug der Einziehungskosten . . . . 1218 „ 10 „
woraus dann obige Position (9) hervorgeht.

In Erwägung des bedeutenden Plus, mit welchem die Bilanzrechnung abschliesst, erscheint eine Erhöhung der Pension für die nächst bevorstehende Periode als zulässig, und über die Grösse der Erhöhung habe ich Folgendes zu bemerken.

Wenn die Frage aufgestellt wird, um wie viel unter Beibehaltung aller übrigen Einrichtungen der bewegliche Theil der Witwenpension erhöhet werden muss, damit in der Bilanz Debet und Credit zur vollkommenen Gleichheit gebracht werden, so findet sich durch eine leichte Rechnung diese Erhöhung = 13 Thl. 7 Ggr. Wählt man eine kleinere Erhöhung, so schliesst die veränderte Bilanz noch immer mit einem Plus ab, mit einem Minus hingegen, wenn eine grössere Erhöhung angenommen wird. Würde also der bewegliche Theil der Pension von jetzt an auf 60 Thaler normirt, so dass jede der daran berechtigten Witwen zusammen 260 Thaler erhielte, so lange deren Anzahl nicht 18 überschreitet, im entgegengesetzten Falle hingegen neben dem festen Theil zu 200 Thaler noch den betreffenden Antheil an der Totalsumme 1080 Thaler, so würde die auf gleiche Art wie oben geführte Bilanzrechnung noch mit einem Plus von 1695 Thalern abschliessen. Man hat also zu dieser Maassregel nicht nur vollkommene Berechtigung, sondern auch die Aussicht, dass nach wenigen Jahren eine abermalige Erhöhung wird Statt finden können, insofern keine *grosse* Verluste eintreten, der Genuss höhern Zinsfusses noch fortdauert, und bei der jetzt nicht erreichten Anzahl der Witwen 18 von der in Rechnung gebrachten jährlichen Summe vorerst jährlich etwas erübrigt wird.

Mit einem Minus von 877 Thalern hingegen würde die Bilanz abschliessen, wenn die Erhöhung auf 15 Thaler, und mit einem Minus von 3448 Thalern, wenn dieselbe auf 20 Thaler festgesetzt würde. Ein so geringes Minus, wie das im erstern Falle sich ergebende, würde aus den eben angeführten Gründen schon nach kurzer Zeit sich ausgleichen, und daher die Normirung des beweglichen Theils der Pension auf 65 Thaler (folglich bei mehr als 18 Witwen Vertheilung der Summe von 1170 Thalern) an sich gar kein Bedenken haben: vielleicht aber würde man nicht gern von dem bisher immer beobachteten Gebrauch abweichen wollen, wonach die halbjährige Pensionssumme stets eine ganze Anzahl Pistolen betragen hat (welche kleine Bequemlichkeit allerdings von selbst wegfallen wird, sobald die Anzahl der Witwen über 18 gestiegen ist). Schon jetzt aber den beweglichen Theil auf 70 Thaler zu setzen, würde ich schon des

Princips wegen nicht für gerathen halten, wenn ich auch unter den jetzigen günstigen Umständen gern die Hoffnung theile, dass das Minus von 3118 Thalern schon in den nächsten Jahren sich bedeutend vermindern würde.

Ich glaube im Vorstehenden der Universitäts-Kirchendeputation das hinlängliche Material zusammengebracht zu haben, wonach mit bewusster Sicherheit ein Beschluss gefasst werden kann, bin aber gern zu weitern Erläuterungen bereit, wenn solche für nöthig gehalten werden sollten.

Göttingen den 19. October 1851. C. F. Gauss.

[*Berechnung der Mittelwerthe der Beiträge und Pensionen.*

Die Anzahl der in ununterbrochener Reihenfolge nach der Numerirung ihrer Beitrittszeit bis zum 1. October 1851 verstorbenen oder auf andere Weise aus der Professoren-Witwenkasse ausgeschiedenen Mitglieder beträgt 134. Für jedes dieser 134 ausgeschiedenen Mitglieder ist in folgender Tabelle zusammengestellt: das Jahr an dessen 1. Oct. (und nur ausnahmsweise an dessen 1. Apr. bei Nr. 131) der Beitritt erfolgte, die Anzahl der Jahre und Monate, während welcher die Beiträge oder die Witwen und Waisenpensionen ein- oder ausgezahlt wurden, ebenso diejenigen welche vergingen bis zu dem Zeitpunkte von wo an die Pension gerechnet wird. Aus diesen Daten sind die in den daneben stehenden Spalten enthaltenen Werthe bestimmt, welche im Zeitpunkte des Eintritts für den Zinsfuss von $3\frac{1}{2}$ Proc. und 4 Proc. den jährlich mit 10 Thl. eingezahlten Beiträgen und den mit 250 Thl. ausgezahlten Witwen- und Waisenpensionen gleichkommen. Die Ansätze zu 10 Thl. und 250 Thl. sind von Gauss wohl deshalb gewählt, weil hierfür schon der grösste Theil der Tafel im Jahre 1845 berechnet war. Für die am 1. Oct. 1851 noch lebenden Witwen der Mitglieder Nr. 86. 103. 104. 109. 112. 114. 122 und 134 ist der Capitalwerth derjenigen Pensionsbezüge die nach jenem Zeitpunkte noch erfolgen mussten, mit Zuhülfenahme der Baume'schen Sterblichkeitstafeln bestimmt und unter der Voraussetzung dass die Zahlung am Ende jedes Jahres aber nur bis zum Schluss des Sterbemonats erfolgt. Die aus dieser Zusammenstellung sich unmittelbar ergebenden mittleren Capitalwerthe der Beiträge und Pensionen sind in der Bilanzrechnung von 1851 benutzt und zwar nachdem durch Multiplication mit einem Correctionsfactor der Umstand berücksichtigt ist, dass die Pensionen nicht jährlich sondern halbjährlich gezahlt werden. Für die Waisenpensionen ist hier angenommen, dass sie bis zum Schlusse des Monats galten, in welchem das 20ste Lebensjahr des Kindes vollendet wurde.

Die handschriftliche Tafel enthält keine Überschrift der einzelnen Spalten wie hier der Abdruck.]

Nr. des Mit-gl.	Nr. der Wit-we	Name	Jahr des Ein-tr.	Bei-trag gez. J. M.	Witwe J. M.	Waise J. M.	Anf. der Pens. nach Eintr. J. M.	Auf die Zeit des Eintritts nach dem Zinsfuss von 3½ Proc. Beiträge	Witw.P	Wais.P	von 4 Proc. discontirte Beiträge	Witw.P	Wais.P
1	16	Gebauer	1742	30	5. 9		30. 9	183.92	391.82		172.92	333.20	
2	1	Treuer	1742	0	18. 7		0. 5	0	3325.27		0	3181.63	
3		Gesner	1742	18				131.90			126.59		
4		Hollmann	1742	39				211.02			195.84		
5		Heumann	1742	18				131.90			126.59		
6		Crusius	1742	4				36.73			36.30		
7		Oporin	1742	10				83.17			81.11		
8	2	Reinharth	1742	0	1. 6		1	0	346.14		0	342.26	
9	5	Köhler	1742	12	23. 8		12. 9	96.63	2565.58		93.85	2292.07	
10	18	Richter	1742	30	7		31	183.92	526.20		172.92	444.85	
11		v. Haller	1741	2				19.00			18.86		
12		v. Segner	1742	12				96.63			93.85		
13	11	Feuerlein	1742	23	6. 8		24	156.20	640.78		148.57	560.68	
14	20	Ayrer	1742	31	24		32	187.36	1335.21		175.88	1086.57	
15	3	Penther	1742	7	52		7. 3	61.14	4631.51		60.02	4091.28	
16		Kahle	1742	5				45.15			44.52		
17	8	Brendel	1742	15	24. 7		15. 9	115.17	2371.13		111.18	2084.67	
18		Wähner	1742	17				126.51			121.66		
19		Ribov	1742	16				120.94			116.52		
20		Böhmer	1742	54				241.13			219.93		
21		Claproth	1742	5				45.15			44.52		
22	4	Kortholt	1742	9		15. 3	9	76.08		2139.12	74.35		1976.36
23	6	Wahl	1743	11	14. 2		12. 3	90.02	1807.60		87.60	1647.63	
24	7	v. Mosheim	1747	7	25.11		8. 9	61.14	3118.70		60.02	2829.65	
25		Pütter	1747	60				249.45			226.23		
26	27	Michaelis	1751	39	16. 2		40. 3	211.02	762.94		195.84	605.26	
27	14	Achenwall	1751	20		18. 5	21. 0	142.12		1627.44	135.90		1410.52
28		Weber, A.	1751	11				90.02			87.60		
29		Förtsch	1751	21				146.98			140.29		
30	9	Mayer, Tob.	1751	20	18. 2		10. 9	83.17	2293.04		81.11	2089.04	
31	10	Röderer	1751	11		13. 0	12	90.02		1704.54	87.60		1559.24
32	19	Vogel	1754	19	33.10		20	137.10	2468.73		131.34	2095.65	
33	24	Walch	1755	29	3. 9		29. 9	180.36	310.41		169.84	265.91	
34		Büsching	1754	6				53.29			52.42		
35	23	Meister	1755	26	24. 4		27	168.90	1599.74		159.83	1332.82	
36	17	Matthiae	1755	17	27. 8		18	126.51	2360.69		121.66	2042.62	
37	21	Murray	1755	20		15.10	20. 9	142.12		1469.05	135.90		1281.09
38		Kuhlenkamp	1755	20				142.12			135.90		
39	15	Hamberger	1755	17	8.10		17. 9	126.51	1016.16		121.66	912.02	
40		Kästner	1755	18				131.90			126.59		
41		Heilmann	1758	5				45.15			44.52		
42		Büttner	1759	10				83.17			81.11		
43	34	Claproth, J.	1759	45	16. 1		45. 9	224.95	629.01		207.20	486.04	
44	30	Gatterer	1759	39	7. 0		40. 0	211.02	386.69		195.84	312.54	
45		Klotz	1762	2				19.00			18.86		

Nr. des Mit-gl.	Nr. der Wit-we	Name	Jahr des Ein-tr.	Bei-trag gez. J. M.	Witwe J. M.	Waise J. M.	Anf. der Pens. nach Eintr. J. M.	Auf die Zeit des Eintritts nach dem Zinsfuss von 3½ Proc. Beiträge	Witw.P	Wais.P	von 4 Proc. discontirte Beiträge	Witw.P	Wais.P
46	12	Köhler, J.T.	1763	5	19. 0		5. 6	45.15	2835.95		44.52	2646.37	
47	39	Heyne	1763	48	21.11		49. 3	230.91	694.88		211.95	522.26	
48		Less	1763	27				172.85			163.30		
49	13	Schröder	1764	7	21. 0		7. 9	61.14	2814.56		60.02	2588.00	
50	26	Murray, J.A.	1764	26	14.11		27. 0	168.90	1132.47		159.83	960.00	
51		Dieze	1764	19				137.10			131.34		
52		Gatzert	1764	1				9.66			9.62		
53	37	Wrisberg	1764	43	25.10		43. 9	220.63	933.65		203.71	715.73	
54		Zachariae	1765	9				76.08			74.35		
55	25	Miller	1766	22	4. 6		23. 0	151.67	463.95		144.51	409.87	
56		Beckmann, J.	1766	44				212.83			205.49		
57	40	Richter	1767	44	18. 7		45. 3	222.83	711.21		205.49	548.26	
58		Feder	1768	28				176.67			166.63		
59		Pepin	1769	5				45.15			44.52		
60		Schlözer	1769	39				211.02			195.84		
61	29	Lichtenberg	1770	28	49. 3		28. 9	176.67	2168.49		166.63	1730.50	
62	22	Erxleben	1770	6	37. 2		7. 3	53.29	4016.23		52.42	3608.27	
63	35	Spangenberg	1771	33	1. 9	11. 6	33. 9	193.90	130.46	688.23	181.48	110.12	563.90
64		Baldinger	1772	9				76.08			74.35		
65	38	Meiners	1772	37	15. 6		38	205.70	798.55		191.43	641.24	
66	32	Eyring	1773	29	23. 0		30	180.36	1391.30		169.84	1145.15	
67	33	Gmelin	1775	29	23. 2		29. 6	180.36	1422.06		169.84	1172.95	
68		Koppe	1776	7				61.14			60.02		
69		Blumenbach	1776	63				253.00			228.87		
70	51	Stromeyer	1776	54	17. 4		54. 0	241.13	500.51		219.93	370.77	
71		Spittler	1779	17				126.51			121.66		
72	41	Waldeck	1782	32	32. 4		33. 3	190.69	1527.32		178.74	1219.01	
73		Reuss	1783	54				241.13			219.93		
74		Böhmer, J.F.	1784	35				200.01			186.65		
75		Meister	1784	44				222.83			205.49		
76		v. Martens	1784	23				156.20			148.57		
77		Planck	1784	49				232.77			213.41		
78		Möckert	1784	7				61.14			60.02		
79	36	Runde	1784	22	14. 8		22. 9	151.67	1293.70		144.51	1119.91	
80	56	Tychsen	1784	50	10. 2		50. 6	234.56	370.95		214.82	283.52	
81		Sextro	1784	2				19.00			18.86		
82		Volborth	1784	7				61.14			60.02		
83		Brandis	1787	2				19.00			18.86		
84		Grellmann	1787	14				109.20			105.63		
85		Buhle	1787	8				68.74			67.33		
86	66	Heeren	1787	54	?		54. 9	241.13	456.65		219.93	337.14	
87		Hugo	1788	56				244.10			222.20		
88	47	Eichhorn	1788	39	7.10		39. 0	211.02	440.96		195.84	358.01	
89		Arnemann	1789	12				96.63			93.85		
90		Seyffer	1789	14				109.20			105.63		

Nr. des Mit-gl.	Nr. der Wit-we	Name	Jahr des Ein-tr.	Bei-trag gez. J. M.	Witwe J. M.	Waise J. M.	Anf. der Pens. nach Eintr. J. M.	Auf die Zeit des Eintritts nach dem Zinsfuss von 3½ Proc. Beiträge	Witw.P	Wais.P	von 4 Proc. discontirte Beiträge	Witw.P	Wais.P
91	28	Bürger	1789	4		17. 1	4. 9	36.73		2695.53	36.30		2532.99
92		Schrage	1790	1				9.66			9.61		
93	46	Städlin	1790	36	4. 0		36. 3	202.90	263.87		189.08	218.97	
94		Marezoll	1790	1				19.00			18.86		
95	45	Osiander	1792	29	5. 2		29. 9	180.36	417.84		169.84	356.78	
96		Berg	1794	6				53.29			51.42		
97		Althof	1794	3				28.02			27.75		
98		v. Ammon	1794	10				83.17			81.11		
99		Leist	1795	12				96.63			93.85		
100	49	Sartorius	1797	31	1.11	2. 7	31. 3	187.36	155.45	193.87	175.88	131.77	163.80
101		Mayer	1799	29				180.36			169.84		
102	48	Bouterweck	1799	29		4. 1	29. 3	180.36		342.13	169.84		293.58
103	44	Fiorillo	1799	22	?		22. 3	151.67	2465.51		144.51	2051.41	
104	31	Schönemann	1799	2	?		3. 0	19.00	5469.38		18.86	4911.00	
105		Martin	1803	1				9.66			9.62		
106	61	Himly	1803	33	8. 0		33. 9	193.90	538.16		181.48	447.97	
107		Thibaut	1804	1				9.66			9.62		
108	60	Schrader	1804	32	13. 5		32. 6	190.69	867.28		178.74	717.98	
109	70	Langenbeck	1804	46	?		46. 9	217.01	559.31		208.85	427.74	
110		Pätz	1805	1				9.66			9.62		
111		Herbart	1805	3				28.02			27.75		
112	55	Harding	1805	29	?		29. 3	180.36	1610.43		169.84	1316.31	
113		Benecke	1805	16				120.94			116.52		
114	62	Bunsen	1805	31	?		31. 9	187.36	1183.66		175.88	969.77	
115	57	Stromeyer	1806	29	14. 9		29. 3	180.36	1039.03		169.84	871.57	
116		Artaud	1806	28				176.67			166.63		
117		Gauss	1807	38				208.41			193.68		
118	54	Hempel	1807	26		8. 8	16. 9	168.90		733.41	159.83		630.52
119		Lüder	1809	3				28.02			27.75		
110		Bergmann	1810	34				197.01			184.11		
121	42	Wunderlich	1810	5	25. 2		5. 9	45.15	3394.86		44.52	3129.00	
121	52	Planck	1810	21	?		21. 6	146.98	2113.17		140.29	1793.60	
123		Salfeld	1810	3				28.02			27.75		
124		Hausmann	1811	37				105.70			191.43		
125		Pott	1814	15				115.17			111.18		
116	67	Bauer	1814	29	1. 6		29. 0	180.36	132.10		169.84	114.14	
127		Heise	1814	3				28.02			27.75		
128	43	v. Crell	1814	2	14. 5		2. 0	19.00	2606.64		18.86	2495.03	
129		Schulze	1814	18				131.90			126.59		
130		Dissen	1814	15				115.17			111.18		
131		Eichhorn	1817	11				90.02			87.60		
132		Schweppe	1818	3				28.02			27.75		
133	64	Müller	1819	21	6. 2	3. 3	21. 3	146.98	657.08	294.08	140.29	583.26	255.08
134	63	Göschen	1822	15. 6	?		15. 9	118.06	2153.55		113.85	1859.85	

TAFELN

ZUR BESTIMMUNG DES ZEITWERTHES

VON EINFACHEN LEIBRENTEN

UND

VON VERBINDUNGSRENTEN.

Frauen							Männer					
Anzahl der Lebenden		Leibrentenwerth beim Zinsfuss				Alter	Anzahl der Lebenden		Leibrentenwerth beim Zinsfuss			
		von 3½ proc.		von 4 proc.					von 3½ proc.		von 4 proc.	
log.	decr.	log.	num.	log.	num.		log.	decr.	log.	num.	log.	num.
4,00620 92	620 92					19						
4,00000 00	599 10	1,27772	18,9548	1,24326	17,5088	20	4,00000 00	270 10	1,29473	19,7118	1,26069	18,2258
3,99400 90	580 69	1,27625	18,8909	1,24210	17,4624	21	3,99729 90	271 79	1,29068	19,5291	1,25704	18,0733
3,98820 21	561 43	1,27451	18,8152	1,24068	17,4052	22	3,99458 11	277 93	1,28644	19,3391	1,25319	17,9137
3,98258 78	541 31	1,27246	18,7265	1,23898	17,3372	23	3,99180 18	279 72	1,28205	19,1448	1,24920	17,7500
3,97717 47	524 98	1,27009	18,6248	1,23697	17,2572	24	3,98900 46	281 53	1,27745	18,9430	1,24500	17,5792
3,97192 49	512 64	1,26743	18,5109	1,23466	17,1656	25	3,98618 93	287 88	1,27262	18,7335	1,24059	17,4016
3,96679 85	499 79	1,26450	18,3865	1,23209	17,0644	26	3,98331 05	289 80	1,26760	18,5183	1,23598	17,2180
3,96180 06	491 21	1,26127	18,2504	1,22923	16,9523	27	3,98041 25	296 33	1,26233	18,2950	1,23113	17,0268
3,95688 85	487 14	1,25777	18,1037	1,22612	16,8315	28	3,97744 92	302 96	1,25683	18,0646	1,22606	16,8292
3,95201 71	487 76	1,25403	17,9487	1,22277	16,7019	29	3,97441 96	309 74	1,25110	17,8271	1,22075	16,6246
3,94713 95	493 30	1,25009	17,7864	1,21922	16,5662	30	3,97132 22	321 30	1,24512	17,5840	1,21519	16,4131
3,94220 65	498 96	1,24599	17,6192	1,21552	16,4256	31	3,96810 92	342 54	1,23891	17,3344	1,20942	16,1963
3,93721 69	504 77	1,24172	17,4468	1,21165	16,2800	32	3,96468 38	369 01	1,23257	17,0832	1,20351	15,9775
3,93216 92	510 70	1,23726	17,2688	1,20761	16,1292	33	3,96099 37	400 93	1,22614	16,8323	1,19751	15,7582
3,92706 22	511 57	1,23261	17,0848	1,20338	15,9729	34	3,95698 44	428 88	1,21966	16,5830	1,19147	15,5407
3,92194 65	517 68	1,22769	16,8923	1,19889	15,8085	35	3,95269 56	457 62	1,21309	16,3338	1,18533	15,3225
3,91676 97	518 60	1,22254	16,6931	1,19418	15,6379	36	3,94811 94	482 28	1,20641	16,0844	1,17910	15,1043
3,91158 37	524 87	1,21710	16,4854	1,18918	15,4589	37	3,94329 66	502 71	1,19957	15,8332	1,17272	14,8841
3,90633 50	531 28	1,21138	16,2696	1,18391	15,2725	38	3,93826 95	523 80	1,19252	15,5782	1,16612	14,6597
3,90102 22	532 35	1,20537	16,0461	1,17837	15,0790	39	3,93303 15	540 45	1,18523	15,3189	1,15929	14,4307
3,89569 87	538 95	1,19900	15,8125	1,17247	14,8755	40	3,92762 70	562 86	1,17764	15,0536	1,15217	14,1961
3,89030 92	545 72	1,19230	15,5704	1,16624	14,6637	41	3,92199 84	586 03	1,16978	14,7837	1,14477	13,9562
3,88485 20	558 40	1,18523	15,3189	1,15965	14,4427	42	3,91613 80	610 09	1,16163	14,5087	1,13709	13,7116
3,87926 80	565 68	1,17783	15,0603	1,15274	14,2148	43	3,91003 71	640 46	1,15317	14,2290	1,12910	13,4616
3,87361 12	573 14	1,17002	14,7917	1,14542	13,9771	44	3,90363 25	666 56	1,14443	13,9455	1,12085	13,2085
3,86787 98	586 78	1,16175	14,5127	1,13764	13,7291	45	3,89696 69	693 73	1,13535	13,6569	1,11225	12,9494
3,86201 20	600 85	1,15306	14,2253	1,12944	13,4722	46	3,89002 96	727 74	1,12589	13,3625	1,10326	12,6841
3,85600 35	615 43	1,14390	13,9284	1,12079	13,2067	47	3,88275 22	763 30	1,11608	13,0641	1,09392	12,4143
3,84984 92	636 73	1,13423	13,6216	1,11163	12,9309	48	3,87511 92	800 54	1,10588	12,7609	1,08422	12,1400
3,84348 19	658 84	1,12407	13,3067	1,10198	12,6468	49	3,86711 38	837 82	1,09528	12,4531	1,07411	11,8608
3,83689 35	681 83	1,11338	12,9832	1,09180	12,3537	50	3,85871 56	886 64	1,08425	12,1408	1,06355	11,5758
3,83007 52	712 30	1,10210	12,6503	1,08103	12,0511	51	3,84984 92	936 67	1,07280	11,8250	1,05259	11,2874
3,82295 22	757 37	1,09024	12,3094	1,06969	11,7405	52	3,84048 25	989 38	1,06091	11,5055	1,04119	10,9949
3,81537 85	811 41	1,07789	11,9644	1,05786	11,4250	53	3,83058 87	1051 87	1,04854	11,1826	1,02932	10,6985
3,80726 44	868 28	1,06508	11,6161	1,04556	11,1062	54	3,82007 00	1125 16	1,03574	10,8577	1,01700	10,3993
3,79858 16	935 35	1,05177	11,2634	1,03277	10,7837	55	3,80881 84	1203 60	1,02254	10,5327	1,00427	10,0988
3,78922 81	1006 47	1,03799	10,9142	1,01951	10,4595	56	3,79678 24	1287 88	1,00893	10,2077	0,99113	9,7978
3,77916 34	1089 54	1,02371	10,5612	1,00574	10,1330	57	3,78390 36	1378 83	0,99489	9,8830	0,97756	9,4964
3,76826 80	1178 40	1,00897	10,2086	0,99150	9,8062	58	3,77011 53	1477 41	0,98041	9,5590	0,96355	9,1950
3,75648 40	1273 91	0,99373	9,8567	0,97677	9,4792	59	3,75534 12	1584 80	0,96547	9,2357	0,94909	8,8938

Frauen							Männer						
Anzahl der Lebenden		Leibrentenwerth beim Zinsfuss				Alter	Anzahl der Lebenden		Leibrentenwerth beim Zinsfuss				
		von 3½ proc.		von 4 proc.					von 3½ proc.		von 4 proc.		
log.	decr.	log.	num.	log.	num.		log.	decr.	log.	num.	log.	num.
3,75648 40	1273 91	0,99373	9,8567	0,97677	9,4792	59	3,75534 12	1584 80	0,96547	9,2357	0,94909	8,8938
3,74374 49	1377 06	0,97797	9,5052	0,96150	9,1516	60	3,73949 32	1694 15	0,95009	8,9144	0,93417	8,5935
3,72997 43	1489 06	0,96166	9,1550	0,94568	8,8242	61	3,72255 17	1814 48	0,93416	8,5933	0,91869	8,2925
3,71508 37	1611 37	0,94478	8,8060	0,92928	8,4972	62	3,70440 69	1947 18	0,91770	8,2737	0,90267	7,9922
3,69897 00	1745 74	0,92730	8,4586	0,91229	8,1712	63	3,68493 51	2095 16	0,90069	7,9559	0,88611	7,6932
3,68151 26	1894 36	0,90922	8,1137	0,89468	7,8466	64	3,66398 35	2260 86	0,88317	7,6414	0,86901	7,3962
3,66256 90	2059 94	0,89053	7,7720	0,87647	7,5243	65	3,64137 49	2447 95	0,86519	7,3315	0,85144	7,1030
3,64196 96	2256 32	0,87126	7,4347	0,85766	7,2055	66	3,61689 54	2661 10	0,84683	7,0280	0,83349	6,8153
3,61940 64	2479 29	0,85157	7,1051	0,83842	6,8932	67	3,59028 44	2894 45	0,82824	6,7335	0,81530	6,5358
3,59461 35	2711 66	0,83160	6,7858	0,81889	6,5901	68	3,56133 99	3139 65	0,80952	6,4494	0,79697	6,2657
3,56749 69	2942 61	0,81130	6,4759	0,79901	6,2952	69	3,52994 34	3398 30	0,79067	6,1755	0,77850	6,0049
3,53807 08	3183 64	0,79047	6,1726	0,77858	6,0059	70	3,49596 04	3686 96	0,77172	5,9118	0,75992	5,7534
3,50623 44	3450 27	0,76898	5,8746	0,75749	5,7212	71	3,45909 08	4012 70	0,75288	5,6608	0,74144	5,5136
3,47173 17	3764 21	0,74686	5,5829	0,73576	5,4420	72	3,41896 38	4348 31	0,73449	5,4261	0,72339	5,2892
3,43408 96	4121 69	0,72439	5,3014	0,71367	5,1721	73	3,37548 07	4669 35	0,71663	5,2075	0,70587	5,0801
3,39287 27	4534 75	0,70185	5,0332	0,69148	4,9145	74	3,32878 72	4957 67	0,69911	5,0016	0,68869	4,8830
3,34752 52	4998 35	0,67969	4,7829	0,66965	4,6736	75	3,27921 05	5209 54	0,68148	4,8026	0,67140	4,6924
3,29754 17	5500 03	0,65840	4,5541	0,64869	4,4534	76	3,22711 51	5451 22	0,66316	4,6043	0,65342	4,5021
3,24254 14	5955 64	0,63847	4,3498	0,62908	4,2568	77	3,17260 29	5699 24	0,64372	4,4027	0,63432	4,3084
3,18298 50	6306 96	0,61949	4,1638	0,61042	4,0777	78	3,11561 05	5985 00	0,62282	4,1958	0,61376	4,1092
3,11991 54	6530 24	0,60023	3,9832	0,59147	3,9036	79	3,05576 05	6364 50	0,60036	3,9844	0,59162	3,9050
3,05461 30	6694 67	0,57881	3,7915	0,57038	3,7186	80	2,99211 15	6886 75	0,57689	3,7747	0,56846	3,7022
2,98766 63	7016 08	0,55367	3,5783	0,54554	3,5119	81	2,92324 40	7016 08	0,55367	3,5783	0,54554	3,5119
2,91750 55	7677 23	0,52541	3,3528	0,51755	3,2927	82	2,85308 32	7677 23	0,52541	3,3528	0,51755	3,2927
2,84073 32	8715 01	0,49709	3,1411	0,48948	3,0866	83	2,77631 09	8715 01	0,49709	3,1411	0,48948	3,0866
2,75358 31	9748 49	0,47327	2,9735	0,46588	2,9233	84	2,68916 08	9748 49	0,47327	2,9735	0,46588	2,9233
2,65609 82	10464 82	0,45516	2,8520	0,44800	2,8054	85	2,59167 59	10464 82	0,45516	2,8520	0,44800	2,8054
2,55145 00	10897 02	0,44032	2,7562	0,43339	2,7126	86	2,48702 77	10897 02	0,44032	2,7562	0,43339	2,7126
2,44247 98	11004 13	0,42591	2,6663	0,41925	2,6257	87	2,37805 75	11004 13	0,42591	2,6663	0,41925	2,6257
2,33243 85	11233 04	0,40746	2,5554	0,40109	2,5182	88	2,26801 62	11233 04	0,40746	2,5554	0,40109	2,5182
2,22010 81	11630 44	0,38481	2,4256	0,37875	2,3919	89	2,15568 58	11630 44	0,38481	2,4256	0,37875	2,3919
2,10380 37	12153 25	0,35819	2,2813	0,35247	2,2515	90	2,03938 14	12153 25	0,35819	2,2813	0,35247	2,2515
1,98227 12	12493 87	0,32708	2,1236	0,32174	2,0977	91	1,91784 89	12493 87	0,32708	2,1236	0,32174	2,0977
1,85733 25	13305 66	0,28570	1,9306	0,28075	1,9087	92	1,79291 02	13305 66	0,28570	1,9306	0,28075	1,9087
1,72427 59	14449 23	0,23416	1,7146	0,22962	1,6968	93	1,65985 36	14449 23	0,23416	1,7146	0,22962	1,6968
1,57978 36	16481 03	0,16881	1,4751	0,16471	1,4612	94	1,51536 13	16481 03	0,16881	1,4751	0,16471	1,4612
1,41497 33	18452 44	0,09036	1,2313	0,08672	1,2210	95	1,35055 10	18452 44	0,09036	1,2313	0,08672	1,2210
1,23044 89	23044 89	9,97728	0,9490	9,97412	0,9421	96	1,16602 66	23044 89	9,97728	0,9490	9,97412	0,9421
1,00000 00	30103 00	9,82594	0,6698	9,82327	0,6657	97	0,93557 77	30103 00	9,81594	0,6698	9,82327	0,6657
0,69897 00	39794 00	9,58712	0,3865	9,58503	0,3846	98	0,63454 77	39794 00	9,58712	0,3865	9,58503	0,3846
0,30103 00			0		0	99	0,23660 77			0		0

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 3½ Procent

	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9
20	1.20442	1.20460									
21	1.20138	1.20177	1.20191								
22	1.19796	1.19858	1.19893	1.19910							
23	1.19417	1.19504	1.19563	1.19600	1.19605						
24	1.18999	1.19109	1.19193	1.19252	1.19278	1.19280					
25	1.18541	1.18672	1.18780	1.18864	1.18912	1.18934	1.18935				
26	1.18047	1.18201	1.18329	1.18435	1.18507	1.18552	1.18572	1.18569			
27	1.17513	1.17687	1.17837	1.17963	1.18057	1.18127	1.18169	1.18185	1.18171		
28	1.16946	1.17136	1.17305	1.17453	1.17566	1.17660	1.17725	1.17763	1.17768	1.17757	
29	1.16349	1.16550	1.16735	1.16902	1.17037	1.17150	1.17237	1.17299	1.17325	1.17333	1.17317
30	1.15723	1.15932	1.16129	1.16312	1.16466	1.16599	1.16706	1.16789	1.16838	1.16867	1.16870
31	1.15071	1.15290	1.15494	1.15689	1.15859	1.16009	1.16138	1.16239	1.16310	1.16362	1.16386
32	1.14402	1.14630	1.14843	1.15045	1.15228	1.15392	1.15539	1.15661	1.15751	1.15823	1.15870
33	1.13719	1.13958	1.14180	1.14390	1.14581	1.14755	1.14917	1.15057	1.15168	1.15258	1.15325
34	1.13021	1.13277	1.13509	1.13728	1.13927	1.14108	1.14280	1.14434	1.14563	1.14673	1.14758
35	1.12308	1.12577	1.12826	1.13054	1.13261	1.13449	1.13628	1.13792	1.13936	1.14063	1.14168
36	1.11572	1.11860	1.12122	1.12367	1.12583	1.12779	1.12964	1.13134	1.13289	1.13430	1.13551
37	1.10813	1.11116	1.11398	1.11655	1.11886	1.12091	1.12284	1.12461	1.12621	1.12771	1.12905
38	1.10023	1.10344	1.10641	1.10916	1.11159	1.11379	1.11581	1.11764	1.11931	1.12087	1.12230
39	1.09194	1.09539	1.09853	1.10143	1.10405	1.10635	1.10850	1.11043	1.11217	1.11378	1.11527
40	1.08322	1.08688	1.09027	1.09333	1.09610	1.09857	1.10082	1.10289	1.10471	1.10638	1.10794
41	1.07408	1.07799	1.08159	1.08488	1.08779	1.09042	1.09285	1.09501	1.09697	1.09871	1.10033
42	1.06455	1.06867	1.07250	1.07599	1.07913	2.08192	1.08449	1.08681	1.08887	1.09074	1.09243
43	1.05455	1.05894	1.06296	1.06668	1.07002	1.07303	1.07575	1.07820	1.08042	1.08238	1.08420
44	1.04406	1.04876	1.05307	1.05697	1.06052	1.06373	1.06667	1.06925	1.07160	1.07372	1.07562
45	1.03304	1.03803	1.04264	1.04682	1.05054	1.05398	1.05710	1.05989	1.06237	1.06461	1.06666
46	1.02144	1.02676	1.03164	1.03612	1.04011	1.04372	1.04705	1.05001	1.05271	1.05508	1.05723
47	1.00925	1.01493	1.02013	1.02488	1.02916	1.03303	1.03652	1.03969	1.04256	1.04513	1.04741
48	0.99647	1.00250	1.00805	1.01310	1.01765	1.02180	1.02555	1.02888	1.03194	1.03468	1.03716
49	0.98302	0.98945	0.99534	1.00073	1.00557	1.00999	1.01401	1.01759	1.02080	1.02373	1.02637
50	0.96887	0.97572	0.98198	0.98768	0.99288	0.99759	1.00186	1.00571	1.00915	1.01224	1.01506
51	0.95402	0.96129	0.96797	0.97403	0.97955	0.98459	0.98914	0.99324	0.99694	1.00026	1.00322
52	0.93855	0.94614	0.95324	0.95971	0.96558	0.97093	0.97581	0.98018	0.98412	0.98770	0.99088
53	0.92246	0.93035	0.93776	0.94463	0.95091	0.95661	0.96179	0.96647	0.97068	0.97449	0.97792
54	0.90574	0.91397	0.92167	0.92885	0.93552	0.94162	0.94714	0.95211	0.95663	0.96071	0.96435
55	0.88849	0.89702	0.90504	0.91250	0.91947	0.92596	0.93187	0.93718	0.94198	0.94635	0.95026
56	0.87065	0.87951	0.88782	0.89560	0.90284	0.90963	0.91591	0.92161	0.92673	0.93139	0.93559
57	0.85225	0.86139	0.87004	0.87810	0.88565	0.89270	0.89927	0.90535	0.91084	0.91582	0.92028
58	0.83327	0.84273	0.85165	0.86002	0.86785	0.87520	0.88202	0.88839	0.89425	0.89959	0.90437
59	0.81368	0.82347	0.83270	0.84133	0.84947	0.85709	0.86420	0.87082	0.87696	0.88266	0.88779

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 3½ Procent.

− 10	− 11	− 12	− 13	− 14	− 15	− 16	− 17	− 18	− 19	− 20	
											20
											21
											22
											23
											24
											25
											26
											27
											28
											29
1.16850											30
1.16384	1.16362										31
1.15889	1.15885	1.15855									32
1.15367	1.15384	1.15371	1.15338								33
1.14820	1.14860	1.14868	1.14852	1.14819							34
1.14247	1.14307	1.14337	1.14341	1.14325	1.14288						35
1.13650	1.13728	1.13777	1.13803	1.13806	1.13787	1.13744					36
1.13021	1.13119	1.13185	1.13231	1.13256	1.13256	1.13229	1.13184				37
1.11359	1.12474	1.12558	1.12621	1.12666	1.12687	1.12679	1.12650	1.12606			38
1.11665	1.11792	1.11892	1.11974	1.12036	1.12076	1.12089	1.12080	1.12052	1.12003		39
1.10936	1.11072	1.11185	1.11282	1.11363	1.11418	1.11451	1.11462	1.11453	1.11420	1.11368	40
1.10180	1.10321	1.10442	1.10551	1.10648	1.10721	1.10770	1.10799	1.10811	1.10797	1.10759	41
1.09395	1.09540	1.09666	1.09783	1.09891	1.09980	1.10047	1.10091	1.10122	1.10128	1.10109	42
1.08578	1.08728	1.08859	1.08980	1.09096	1.09196	1.09278	1.09340	1.09386	1.09410	1.09411	43
1.07733	1.07888	1.08024	1.08149	1.08268	1.08377	1.08470	1.08546	1.08609	1.08648	1.08668	44
1.06846	1.07012	1.07153	1.07284	1.07406	1.07517	1.07618	1.07705	1.07782	1.07839	1.07874	45
1.05918	1.06091	1.06244	1.06380	1.06506	1.06621	1.06725	1.06819	1.06906	1.06978	1.07029	46
1.04946	1.05133	1.05295	1.05440	1.05571	1.05690	1.05797	1.05894	1.05987	1.06070	1.06134	47
1.03932	1.04129	1.04305	1.04457	1.04598	1.04722	1.04831	1.04931	1.05026	1.05115	1.05191	48
1.02872	1.03080	1.03166	1.03431	1.03578	1.03712	1.03825	1.03929	1.04026	1.04116	1.04198	49
1.01756	1.01982	1.02179	1.02353	1.02513	1.02652	1.02776	1.02884	1.02983	1.03075	1.03158	50
1.00590	1.00831	1.01046	1.01230	1.01398	1.01549	1.01679	1.01796	1.01898	1.01993	1.02077	51
0.99369	0.99627	0.99857	1.00058	1.00236	1.00394	1.00536	1.00658	1.00769	1.00867	1.00954	52
0.98095	0.98365	0.98612	0.98827	0.99022	0.99188	0.99338	0.99471	0.99587	0.99693	0.99783	53
0.96763	0.97053	0.97313	0.97543	0.97751	0.97934	0.98093	0.98233	0.98360	0.98469	0.98569	54
0.95375	0.95689	0.95969	0.96210	0.96433	0.96629	0.96803	0.96952	0.97086	0.97205	0.97309	55
0.93932	0.94267	0.94570	0.94831	0.95064	0.95276	0.95461	0.95616	0.95768	0.95892	0.96006	56
0.92431	0.92790	0.93112	0.93397	0.93647	0.93870	0.94069	0.94245	0.94402	0.94533	0.94653	57
0.90865	0.91253	0.91598	0.91902	0.92174	0.92415	0.92624	0.92813	0.92981	0.93126	0.93253	58
0.89237	0.89651	0.90022	0.90349	0.90640	0.90902	0.91129	0.91327	0.91507	0.91663	0.91805	59

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss $3\frac{1}{2}$ Procent.

	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9
59	0.81368	0.82347	0.83270	0.84133	0.84947	0.85709	0.86420	0.87082	0.87696	0.88266	0.88779
60	0.79344	0.80359	0.81315	0.82207	0.83047	0.83839	0.84576	0.85266	0.85905	0.86501	0.87050
61	0.77244	0.78298	0.79285	0.80214	0.81082	0.81900	0.82665	0.83380	0.84048	0.84668	0.85242
62	0.75065	0.76160	0.77186	0.78149	0.79049	0.79894	0.80684	0.81428	0.82120	0.82767	0.83364
63	0.72805	0.73943	0.75009	0.76009	0.76944	0.77820	0.78637	0.79405	0.80125	0.80796	0.81419
64	0.70464	0.71647	0.72755	0.73795	0.74766	0.75676	0.76524	0.77318	0.78061	0.78758	0.79405
65	0.68047	0.69273	0.70426	0.71507	0.72518	0.73464	0.74345	0.75168	0.75937	0.76657	0.77331
66	0.65576	0.66830	0.68026	0.69152	0.70204	0.71189	0.72106	0.72962	0.73761	0.74505	0.75201
67	0.63079	0.64348	0.65571	0.66740	0.67837	0.68863	0.69819	0.70711	0.71542	0.72315	0.73036
68	0.60559	0.61848	0.63086	0.64283	0.65423	0.66493	0.67491	0.68420	0.69287	0.70092	0.70841
69	0.57992	0.59324	0.60584	0.61795	0.62964	0.64077	0.65118	0.66089	0.66994	0.67834	0.68614
70	0.55364	0.56755	0.58059	0.59292	0.60476	0.61617	0.62702	0.63716	0.64662	0.65540	0.66354
71	0.52694	0.54148	0.55513	0.56788	0.57994	0.59150	0.60264	0.61321	0.62311	0.63229	0.64081
72	0.50042	0.51536	0.52963	0.54299	0.55549	0.56726	0.57856	0.58941	0.59975	0.60935	0.61828
73	0.47446	0.48957	0.50424	0.51823	0.53133	0.54354	0.55505	0.56604	0.57666	0.58669	0.59604
74	0.44941	0.46422	0.47907	0.49346	0.50718	0.51999	0.53192	0.54312	0.55387	0.56417	0.57394
75	0.42548	0.43941	0.45395	0.46852	0.48263	0.49605	0.50857	0.52018	0.53112	0.54154	0.55158
76	0.40276	0.41515	0.42880	0.44306	0.45734	0.47115	0.48428	0.49646	0.50780	0.51839	0.52853
77	0.38062	0.39167	0.40376	0.41712	0.43109	0.44507	0.45858	0.47137	0.48327	0.49424	0.50453
78	0.35757	0.36838	0.37910	0.39089	0.40395	0.41762	0.43130	0.44448	0.45697	0.46849	0.47915
79	0.33149	0.34401	0.35444	0.36483	0.37630	0.38909	0.40247	0.41582	0.42870	0.44082	0.45202
80	0.30088	0.31710	0.32919	0.33924	0.34931	0.36050	0.37300	0.38607	0.39915	0.41165	0.42345
81	0.26718	0.28704	0.30280	0.31447	0.32415	0.33390	0.34480	0.35702	0.36981	0.38251	0.39470
82	0.22677	0.24769	0.26718	0.28252	0.29381	0.30318	0.31264	0.32331	0.33527	0.34777	0.36018
83	0.18883	0.20607	0.22677	0.24594	0.26095	0.27196	0.28106	0.29033	0.30080	0.31254	0.32479
84	0.16007	0.17170	0.18883	0.20933	0.22827	0.24306	0.25382	0.26276	0.27185	0.28212	0.29368
85	0.14085	0.14853	0.16007	0.17706	0.19741	0.21618	0.23078	0.24135	0.25008	0.25899	0.26909
86	0.12744	0.13329	0.14085	0.15226	0.16912	0.18933	0.20792	0.22228	0.23263	0.24116	0.24984
87	0.11331	0.12178	0.12744	0.13482	0.14607	0.16279	0.18280	0.20114	0.21523	0.22531	0.23354
88	0.09415	0.10520	0.11331	0.11874	0.12592	0.13701	0.15353	0.17331	0.19134	0.20511	0.21482
89	0.07052	0.08353	0.09415	0.10193	0.10704	0.11401	0.12490	0.14121	0.16070	0.17838	0.19173
90	0.04346	0.05816	0.07052	0.08064	0.08800	0.09279	0.09951	0.11017	0.12624	0.14540	0.16265
91	0.00766	0.02977	0.04346	0.05507	0.06457	0.07146	0.07588	0.08230	0.09272	0.10848	0.12721
92	9.95813	9.98701	0.00766	0.02021	0.03095	0.03978	0.04616	0.05016	0.05629	0.06643	0.08182
93	9.89254	9.93136	9.95813	9.97712	9.98836	9.99816	0.00631	0.01211	0.01568	0.02150	0.03132
94	9.81113	9.85675	9.89254	9.91696	9.93410	9.94394	9.95279	9.96019	9.96542	9.96854	9.97405
95	9.69690	9.77061	9.81113	9.84345	9.86510	9.88015	9.88848	9.89630	9.90295	9.90755	9.91019
96	9.53030	9.63100	9.69690	9.73109	9.76059	9.77929	9.79228	9.79903	9.80593	9.81183	9.81579
97	9.28609	9.44543	9.53030	9.58848	9.61707	9.64143	9.95719	9.66782	9.67304	9.67904	9.68420
98		9.18918	9.28609	9.35668	9.40260	9.42231	9.44263	9.45406	9.46218	9.46559	9.47082
99											

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 3½ Procent.

— 10	— 11	— 12	— 13	— 14	— 15	— 16	— 17	— 18	— 19	— 20	
0.89237	0.89651	0.90022	0.90349	0.90640	0.90902	0.91129	0.91327	0.91507	0.91663	0.91805	59
0.87544	0.87987	0.88382	0.88736	0.89049	0.89328	0.89576	0.89791	0.89980	0.90148	0.90300	60
0.85770	0.86248	0.86673	0.87050	0.87389	0.87689	0.87953	0.88189	0.88394	0.88570	0.88734	61
0.83917	0.84429	0.84888	0.85293	0.85656	0.85980	0.86265	0.86518	0.86742	0.86935	0.87104	62
0.81994	0.82531	0.83023	0.83462	0.83852	0.84199	0.84508	0.84781	0.85020	0.85232	0.85417	63
0.80007	0.80566	0.81082	0.81553	0.81976	0.82349	0.82681	0.82977	0.83236	0.83463	0.83666	64
0.77955	0.78539	0.79076	0.79572	0.80028	0.80433	0.80791	0.81108	0.81391	0.81636	0.81854	65
0.75852	0.76458	0.77020	0.77536	0.78016	0.78453	0.78843	0.79185	0.79488	0.79757	0.79993	66
0.73710	0.74340	0.74924	0.75465	0.75964	0.76424	0.76845	0.77219	0.77547	0.77836	0.78094	67
0.71539	0.72190	0.72800	0.73362	0.73886	0.74365	0.74809	0.75213	0.75572	0.75886	0.76163	68
0.69340	0.70015	0.70646	0.71233	0.71777	0.72280	0.72743	0.73169	0.73559	0.73903	0.74204	69
0.67111	0.67813	0.68469	0.69076	0.69644	0.70168	0.70654	0.71099	0.71511	0.71883	0.72214	70
0.64873	0.65605	0.66286	0.66918	0.67505	0.68053	0.68559	0.69027	0.69457	0.69850	0.70211	71
0.62656	0.63422	0.64133	0.64791	0.65400	0.65968	0.66498	0.66985	0.67437	0.67848	0.68229	72
0.60472	0.61274	0.62017	0.62704	0.63339	0.63928	0.64478	0.64987	0.65457	0.65890	0.66288	73
0.58303	0.59144	0.59921	0.60639	0.61302	0.61916	0.62486	0.63013	0.63505	0.63956	0.64375	74
0.56107	0.56987	0.57801	0.58553	0.59246	0.59887	0.60480	0.61026	0.61534	0.62006	0.62442	75
0.53826	0.54746	0.55598	0.56386	0.57111	0.57781	0.58398	0.58966	0.59492	0.59980	0.60436	76
0.51435	0.52377	0.53268	0.54092	0.54853	0.55552	0.56197	0.56788	0.57335	0.57841	0.58311	77
0.48911	0.49861	0.50773	0.51634	0.52431	0.53163	0.53837	0.54454	0.55024	0.55550	0.56036	78
0.46234	0.47196	0.48115	0.48997	0.49830	0.50597	0.51304	0.51950	0.52545	0.53093	0.53597	79
0.43430	0.44427	0.45358	0.46247	0.47100	0.47904	0.48645	0.49327	0.49948	0.50520	0.51045	80
0.40614	0.41663	0.42629	0.43529	0.44388	0.45212	0.45989	0.46703	0.47358	0.47958	0.48506	81
0.37206	0.38317	0.39338	0.40275	0.41146	0.41978	0.42778	0.43529	0.44220	0.44853	0.45428	82
0.33697	0.34858	0.35945	0.36941	0.37853	0.38701	0.39513	0.40288	0.41019	0.41690	0.42300	83
0.30576	0.31771	0.32911	0.33978	0.34953	0.35844	0.36673	0.37461	0.38219	0.38932	0.39582	84
0.28047	0.29235	0.30412	0.31534	0.32579	0.33534	0.34404	0.35210	0.35982	0.36720	0.37412	85
0.25975	0.27094	0.28262	0.29419	0.30516	0.31541	0.32470	0.33317	0.34104	0.34852	0.35569	86
0.24198	0.25164	0.26259	0.27404	0.28532	0.29607	0.30602	0.31505	0.32326	0.33084	0.33807	87
0.22273	0.23086	0.24025	0.25092	0.26205	0.27307	0.28349	0.29314	0.30185	0.30974	0.31702	88
0.20102	0.20853	0.21632	0.22536	0.23570	0.24653	0.25720	0.26727	0.27656	0.28491	0.29241	89
0.17547	0.18424	0.19128	0.19863	0.20729	0.21728	0.22774	0.23804	0.24771	0.25656	0.26448	90
0.14387	0.15603	0.16416	0.17060	0.17746	0.18571	0.19530	0.20535	0.21519	0.22437	0.23272	91
0.10002	0.11594	0.12731	0.13464	0.14043	0.14678	0.15458	0.16375	0.17334	0.18265	0.19125	92
0.04629	0.06380	0.07887	0.08924	0.09568	0.10077	0.10657	0.11394	0.12266	0.13170	0.14041	93
9.98353	9.99799	0.01474	0.02871	0.03793	0.04339	0.04775	0.05306	0.06001	0.06823	0.07668	94
9.91535	9.92444	9.93826	9.95395	9.96656	9.97444	9.97882	9.98251	9.98736	9.99384	0.00149	95
9.81791	9.82275	9.83143	9.84447	9.85891	9.86994	9.87635	9.87971	9.88281	9.88726	9.89328	96
9.68740	9.68900	9.69356	9.70172	9.71374	9.72658	9.73571	9.74055	9.74299	9.74563	9.74970	97
9.47479	9.47708	9.47815	9.48247	9.48963	9.49997	9.51035	9.51696	9.52017	9.52182	9.52405	98
											99

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 4 Procent.

	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9
20	1.17536	1.17543									
21	1.17265	1.17293	1.17297								
22	1.16958	1.17009	1.17032	1.17033							
23	1.16615	1.16691	1.16736	1.16756	1.16755						
24	1.16233	1.16331	1.16401	1.16446	1.16462	1.16455					
25	1.15813	1.15931	1.16025	1.16093	1.16131	1.16143	1.16135				
26	1.15357	1.15497	1.15611	1.15700	1.15763	1.15797	1.15807	1.15794			
27	1.14860	1.15021	1.15157	1.15265	1.15350	1.15408	1.15439	1.15444	1.15427		
28	1.14332	1.14509	1.14663	1.14793	1.14897	1.14977	1.15031	1.15057	1.15059	1.15041	
29	1.13773	1.13962	1.14132	1.14280	1.14405	1.14504	1.14580	1.14630	1.14652	1.14652	1.14628
30	1.13186	1.13384	1.13565	1.13728	1.13872	1.13993	1.14086	1.14157	1.14204	1.14224	1.14217
31	1.12575	1.12781	1.12969	1.13144	1.13303	1.13442	1.13556	1.13645	1.13713	1.13756	1.13769
32	1.11947	1.12162	1.12358	1.12541	1.12711	1.12863	1.12996	1.13105	1.13191	1.13255	1.13290
33	1.11305	1.11530	1.11734	1.11926	1.12103	1.12266	1.12414	1.12540	1.12646	1.12724	1.12783
34	1.10649	1.10890	1.11103	1.11304	1.11489	1.11658	1.11816	1.11957	1.12081	1.12179	1.12255
35	1.09978	1.10231	1.10460	1.10671	1.10863	1.11039	1.11204	1.11355	1.11492	1.11607	1.11703
36	1.09286	1.09558	1.09799	1.10025	1.10226	1.10410	1.10581	1.10738	1.10885	1.11013	1.11126
37	1.08570	1.08858	1.09117	1.09355	1.09571	1.09763	1.09942	1.10105	1.10257	1.10396	1.10521
38	1.07823	1.08129	1.08403	1.08659	1.08887	1.09093	1.09280	1.09450	1.09607	1.09752	1.09886
39	1.07038	1.07368	1.07659	1.07929	1.08176	1.08392	1.08593	1.08771	1.08934	1.09085	1.09224
40	1.06211	1.06562	1.06877	1.07163	1.07423	1.07657	1.07868	1.08060	1.08231	1.08388	1.08532
41	1.05344	1.05717	1.06053	1.06362	1.06638	1.06886	1.07113	1.07315	1.07499	1.07663	1.07813
42	1.04438	1.04830	1.05189	1.05519	1.05817	1.06079	1.06320	1.06538	1.06732	1.06908	1.07064
43	1.03483	1.03903	1.04281	1.04633	1.04951	1.05236	1.05490	1.05721	1.05931	1.06115	1.06284
44	1.02481	1.02932	1.03337	1.03707	1.04047	1.04351	1.04627	1.04872	1.05092	1.05292	1.05470
45	1.01426	1.01905	1.02342	1.02737	1.03097	1.03421	1.03714	1.03981	1.04214	1.04426	1.04619
46	1.00313	1.00824	1.01288	1.01714	1.02097	1.02441	1.02754	1.03039	1.03292	1.03517	1.03721
47	0.99141	0.99688	1.00183	1.00636	1.01049	1.01418	1.01748	1.02052	1.02322	1.02567	1.02783
48	0.97911	0.98491	0.99021	0.99504	0.99945	1.00342	1.00697	1.01016	1.01306	1.01567	1.01802
49	0.96616	0.97234	0.97797	0.98314	0.98784	0.99207	0.99590	0.99933	1.00238	1.00518	1.00768
50	0.95248	0.95909	0.96509	0.97058	0.97561	0.98013	0.98421	0.98791	0.99120	0.99414	0.99682
51	0.93810	0.94513	0.95156	0.95741	0.96274	0.96760	0.97196	0.97590	0.97946	0.98262	0.98545
52	0.92310	0.93046	0.93730	0.94357	0.94925	0.95441	0.95910	0.96331	0.96710	0.97052	0.97356
53	0.90747	0.91513	0.92229	0.92897	0.93505	0.94055	0.94554	0.95007	0.95413	0.95778	0.96106
54	0.89121	0.89921	0.90666	0.91365	0.92013	0.92603	0.93136	0.93617	0.94054	0.94445	0.94795
55	0.87442	0.88271	0.89049	0.89776	0.90455	0.91083	0.91655	0.92170	0.92635	0.93056	0.93431
56	0.85703	0.86566	0.87373	0.88131	0.88838	0.89496	0.90106	0.90660	0.91157	0.91605	0.92009
57	0.83909	0.84801	0.85641	0.86427	0.87165	0.87850	0.88488	0.89079	0.89614	0.90093	0.90525
58	0.82056	0.82979	0.83847	0.84664	0.85430	0.86146	0.86809	0.87429	0.88000	0.88516	0.88979
59	0.80141	0.81097	0.81995	0.82839	0.83637	0.84380	0.85072	0.85717	0.86316	0.86868	0.87367

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 4 Procent.

−10	−11	−12	−13	−14	−15	−16	−17	−18	−19	−20	
											20
											21
											22
											23
											24
											25
											26
											27
											28
											29
1.14188											30
1.13758	1.13727										31
1.13300	1.13286	1.13254									32
1.12815	1.12821	1.12806	1.12771								33
1.12308	1.12335	1.12340	1.12321	1.12283							34
1.11773	1.11821	1.11847	1.11847	1.11826	1.11784						35
1.11216	1.11281	1.11316	1.11347	1.11346	1.11320	1.11273					36
1.10627	1.10712	1.10774	1.10814	1.10834	1.10827	1.10797	1.10750				37
1.10005	1.10106	1.10187	1.10243	1.10282	1.10196	1.10285	1.10254	1.10206			38
1.09352	1.09467	1.09562	1.09636	1.09692	1.09724	1.09735	1.09722	1.09689	1.09635		39
1.08664	1.08786	1.08895	1.08985	1.09059	1.09107	1.09136	1.09144	1.09129	1.09091	1.09038	40
1.07949	1.08076	1.08193	1.08195	1.08385	1.08450	1.08495	1.08521	1.08527	1.08507	1.08469	41
1.07206	1.07338	1.07458	1.07568	1.07670	1.07750	1.07813	1.07854	1.07879	1.07879	1.07858	42
1.06431	1.06568	1.06693	1.06807	1.06917	1.07008	1.07085	1.07144	1.07184	1.07202	1.07201	43
1.05629	1.05772	1.05901	1.06019	1.06132	1.06230	1.06319	1.06392	1.06449	1.06483	1.06499	44
1.04785	1.04940	1.05074	1.05196	1.05313	1.05414	1.05510	1.05594	1.05665	1.05716	1.05747	45
1.03901	1.04064	1.04209	1.04336	1.04456	1.04560	1.04659	1.04750	1.04832	1.04897	1.04945	46
1.02974	1.03151	1.03303	1.03441	1.03565	1.03672	1.03774	1.03868	1.03956	1.04031	1.04094	47
1.02005	1.02191	1.02357	1.02501	1.02636	1.01746	1.02853	1.02949	1.03039	1.03121	1.03194	48
1.00990	1.01187	1.01362	1.01520	1.01660	1.01781	1.01891	1.01990	1.02082	1.02166	1.02245	49
0.99919	1.00134	1.00320	1.00487	1.00639	1.00766	1.00886	1.00988	1.01082	1.01168	1.01249	50
0.98798	0.99028	0.99231	0.99409	0.99569	0.99708	0.99833	0.99945	1.00042	1.00130	1.00212	51
0.97623	0.97870	0.98087	0.98281	0.98451	0.98599	0.98735	0.98852	0.98958	0.99048	0.99132	52
0.96395	0.96654	0.96888	0.97094	0.97281	0.97438	0.97581	0.97710	0.97820	0.97919	0.98005	53
0.95109	0.95389	0.95634	0.95855	0.96055	0.96229	0.96380	0.96516	0.96637	0.96740	0.96834	54
0.93767	0.94070	0.94335	0.94567	0.94781	0.94969	0.95135	0.95279	0.95407	0.95520	0.95618	55
0.92370	0.92693	0.92982	0.93232	0.93458	0.93660	0.93837	0.93996	0.94132	0.94151	0.94360	56
0.90914	0.91261	0.91569	0.91841	0.92087	0.92299	0.92489	0.92659	0.92810	0.91936	0.93051	57
0.89394	0.89768	0.90099	0.90391	0.90658	0.90889	0.91088	0.91271	0.91433	0.91572	0.91694	58
0.87812	0.88210	0.88569	0.88882	0.89169	0.89420	0.89637	0.89829	0.90003	0.90153	0.90289	59

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 4 Procent.

	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9
59	0.80141	0.81097	0.81995	0.82839	0.83637	0.84380	0.85072	0.85717	0.86316	0.86868	0.87367
60	0.78160	0.79153	0.80084	0.80958	0.81780	0.82554	0.83272	0.83947	0.84570	0.85148	0.85683
61	0.76103	0.77135	0.78101	0.79008	0.79858	0.80658	0.81406	0.82106	0.82756	0.83358	0.83919
62	0.73966	0.75040	0.76044	0.76986	0.77867	0.78695	0.79468	0.80196	0.80870	0.81500	0.82084
63	0.71746	0.72864	0.73910	0.74889	0.75804	0.76663	0.77463	0.78215	0.78918	0.79571	0.80181
64	0.69445	0.70607	0.71696	0.72716	0.73668	0.74560	0.75391	0.76169	0.76896	0.77576	0.78209
65	0.67066	0.68273	0.69406	0.70468	0.71460	0.72388	0.73253	0.74060	0.74814	0.75516	0.76176
66	0.64633	0.65868	0.67046	0.68151	0.69186	0.70152	0.71053	0.71893	0.72674	0.73404	0.74087
67	0.62173	0.63422	0.64628	0.65778	0.66856	0.67864	0.68804	0.69680	0.70493	0.71251	0.71960
68	0.59686	0.60957	0.62178	0.63357	0.64479	0.65531	0.66512	0.67427	0.68276	0.69065	0.69802
69	0.57153	0.58468	0.59709	0.60904	0.62054	0.63150	0.64175	0.65131	0.66019	0.66843	0.67612
70	0.54557	0.55931	0.57216	0.58433	0.59599	0.60724	0.61793	0.62792	0.63722	0.64584	0.65388
71	0.51918	0.53354	0.54700	0.55961	0.57149	0.58290	0.59387	0.60431	0.61404	0.62308	0.63149
72	0.49294	0.50771	0.52181	0.53503	0.54736	0.55897	0.57010	0.58083	0.59100	0.60048	0.60929
73	0.46723	0.48219	0.49670	0.51057	0.52350	0.53555	0.54690	0.55777	0.56823	0.57814	0.58737
74	0.44243	0.45710	0.47180	0.48608	0.49964	0.51229	0.52408	0.53514	0.54575	0.55594	0.56558
75	0.41873	0.43254	0.44695	0.46140	0.47537	0.48866	0.50103	0.51252	0.52331	0.53362	0.54352
76	0.39625	0.40852	0.42206	0.43621	0.45035	0.46404	0.47704	0.48910	0.50029	0.51078	0.52078
77	0.37435	0.38529	0.39727	0.41053	0.42437	0.43824	0.45163	0.46430	0.47605	0.48693	0.49708
78	0.35155	0.36224	0.37285	0.38454	0.39749	0.41106	0.42463	0.43770	0.45004	0.46147	0.47200
79	0.32572	0.33812	0.34843	0.35872	0.37009	0.38278	0.39606	0.40931	0.42206	0.43408	0.44516
80	0.29535	0.31145	0.32342	0.33337	0.34332	0.35443	0.36684	0.37982	0.39277	0.40519	0.41687
81	0.26188	0.28165	0.29728	0.30883	0.31841	0.32806	0.33889	0.35100	0.36370	0.37632	0.38839
82	0.22166	0.24252	0.26188	0.27713	0.28829	0.29755	0.30696	0.31751	0.32939	0.34181	0.35413
83	0.18387	0.20107	0.22166	0.24075	0.25565	0.26653	0.27557	0.28473	0.29511	0.30677	0.31896
84	0.15522	0.16682	0.18387	0.20430	0.22315	0.23782	0.24850	0.25732	0.26632	0.27652	0.28801
85	0.13611	0.14375	0.15522	0.17216	0.19245	0.21111	0.22560	0.23606	0.24471	0.25353	0.26357
86	0.12281	0.12861	0.13611	0.14747	0.16429	0.18441	0.20291	0.21717	0.22742	0.23585	0.24448
87	0.10885	0.11721	0.12281	0.13015	0.14136	0.15802	0.17796	0.19620	0.21021	0.22018	0.22835
88	0.08980	0.10077	0.10885	0.11419	0.12134	0.13238	0.14887	0.16857	0.18652	0.20019	0.20982
89	0.06635	0.07926	0.08980	0.09752	0.10259	0.10952	0.12038	0.13665	0.15608	0.17369	0.18695
90	0.03948	0.05406	0.06635	0.07639	0.08371	0.08845	0.09514	0.10578	0.12181	0.14093	0.15809
91	0.00389	0.02587	0.03948	0.05102	0.06047	0.06731	0.07169	0.07810	0.08850	0.10423	0.12291
92	9.95460	9.98335	0.00389	0.01637	0.02706	0.03585	0.04218	0.04616	0.05228	0.06240	0.07777
93	9.88927	9.92795	9.95460	9.97352	9.98470	9.99446	0.00256	0.00835	0.01190	0.01771	0.02752
94	9.80813	9.85359	9.88927	9.91362	9.93070	9.94048	9.94930	9.95669	9.96189	9.96500	9.97050
95	9.69418	9.76773	9.80813	9.84039	9.86197	9.87698	9.88528	9.89309	9.89972	9.90431	9.90694
96	9.52788	9.62838	9.69418	9.72931	9.75776	9.77644	9.78939	9.79613	9.80301	9.80891	9.81287
97	9.28400	9.44306	9.52788	9.58599	9.61455	9.63890	9.65465	9.66526	9.67047	9.67647	9.68163
98	[illegible]	9.18709	9.28400	9.35458	9.40050	9.42022	9.44053	9.45197	9.46009	9.46349	9.46872

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 4 Procent.

—10	—11	—12	—13	—14	—15	—16	—17	—18	—19	—20	
0.87812	0.88210	0.88569	0.88882	0.89169	0.89420	0.89637	0.89829	0.90003	0.90153	0.90289	59
0.86163	0.86591	0.86974	0.87318	0.87622	0.87890	0.88128	0.88337	0.88519	0.88683	0.88827	60
0.84434	0.84896	0.85308	0.85676	0.86005	0.86294	0.86550	0.86778	0.86976	0.87148	0.87303	61
0.82624	0.83121	0.83567	0.83963	0.84314	0.84629	0.84905	0.85149	0.85366	0.85554	0.85716	62
0.80743	0.81266	0.81744	0.82174	0.82552	0.82890	0.83190	0.83453	0.83687	0.83893	0.84070	63
0.78798	0.79342	0.79844	0.80307	0.80717	0.81082	0.81405	0.81690	0.81944	0.82165	0.82360	64
0.76788	0.77358	0.77880	0.78367	0.78809	0.79206	0.79556	0.79862	0.80138	0.80378	0.80588	65
0.74725	0.75318	0.75865	0.76372	0.76837	9.77265	0.77648	0.77979	0.78275	0.78538	0.78766	66
0.72620	0.73239	0.73808	0.74339	0.74825	0.75276	0.75689	0.76053	0.76372	0.76656	0.76905	67
0.70487	0.71127	0.71721	0.72274	0.72784	0.73255	0.73691	0.74086	0.74435	0.74743	0.75012	68
0.68324	0.68988	0.69603	0.70181	0.70712	0.71206	0.71662	0.72078	0.72458	0.72796	0.73090	69
0.66131	0.66821	0.67460	0.68059	0.68614	0.69129	0.69606	0.70043	0.70445	0.70812	0.71136	70
0.63926	0.64646	0.65312	0.65935	0.66510	0.67049	0.67547	0.68006	0.68427	0.68814	0.69167	71
0.61743	0.62496	0.63193	0.63841	0.64440	0.64997	0.65518	0.65997	0.66440	0.66845	0.67219	72
0.59591	0.60380	0.61110	0.61788	0.62411	0.62990	0.63530	0.64031	0.64494	0.64920	0.65311	73
0.57453	0.58281	0.59047	0.59756	0.60407	0.61010	0.61571	0.62089	0.62574	0.63019	0.63430	74
0.55288	0.56156	0.56959	0.57702	0.58384	0.59013	0.59596	0.60135	0.60636	0.61101	0.61529	75
0.53039	0.53946	0.54788	0.55567	0.56281	0.56938	0.57547	0.58108	0.58627	0.59107	0.59555	76
0.50679	0.51609	0.52489	0.53305	0.54054	0.54743	0.55378	0.55963	0.56503	0.57000	0.57462	77
0.48185	0.49123	0.50025	0.50878	0.51663	0.52386	0.53050	0.53662	0.54225	0.54741	0.55219	78
0.45536	0.46488	0.47397	0.48271	0.49093	0.49851	0.50548	0.51188	0 51777	0.52315	0.52812	79
0.42760	0.43748	0.44669	0.45550	0.46393	0.47188	0.47920	0.48591	0.49209	0.49772	0.50291	80
0.39972	0.41013	0.41969	0.42860	0.43710	9.44525	0.45292	0.45999	0.46647	0.47239	0.47781	81
0.36589	0.37693	0.38704	0.39632	0.40495	0.41318	0.42107	0.42852	0.43536	0.44161	0.44731	82
0.33102	0.34256	0.35334	0.36321	0.37224	0.38063	0.38864	0.39634	0.40358	0.41021	0.41626	83
0.29999	0.31188	0.32320	0.33378	0.34343	0.35225	0.36045	0.36828	0.37579	0.38284	0.38928	84
0.27488	0.28669	0.29838	0.30952	0.31989	0.32933	0.33796	0.34597	0.35361	0.36093	0.36778	85
0.25432	0.26544	0.27705	0.28854	0.29946	0.30960	0.31883	0.32724	0.33503	0.34245	0.34955	86
0.23672	0.24633	0.25721	0.26858	0.27983	0.29047	0.30036	0.30933	0.31747	0.32500	0.33216	87
0.21766	0.22573	0.23506	0.24566	0.25676	0.26771	0.27806	0.28764	0.29630	0.30414	0.31135	88
0.19616	0.20360	0.21133	0.22032	0.23062	0.24140	0.25201	0.26203	0.27126	0.27956	0.28702	89
0.17085	0.17954	0.18651	0.19382	0.20244	0.21239	0.22282	0.23306	0.24267	0.25148	0.25935	90
0.13950	0.15159	0.15964	0.16605	0.17286	0.18109	0.19064	0.20065	0.21045	0.21958	0.22789	91
0.09591	0.11179	0.12307	0.13037	0.13611	0.14243	0.15022	0.15934	0.16890	0.17817	0.18674	92
0.04245	0.05995	0.07493	0.08527	0.09165	0.09672	0.10252	0.10985	0.11855	0.12757	0.13625	93
9.97997	9.99441	0.01111	0.02506	0.03424	0.03966	0.04402	0.04931	0.05624	0.06444	0.07287	94
9.91209	9.92118	9.93497	9.95065	9.96322	9.97108	9.97544	9.97911	9.98396	9.99044	9.99807	95
9.81498	9.81982	9.82848	9.84152	9.85594	9.86695	9.87334	9.87669	9.87978	9.88424	9.89025	96
9.68483	9.68644	9.69099	9.69915	9.71116	9.72398	9.73311	9.73794	9.74037	9.74302	9.74709	97
9.47270	9.47499	9.47606	9.48038	9.48754	9.49788	9.50825	9.51487	9.51802	9.51972	9.52196	98

EINRICHTUNG UND GEBRAUCH DER TAFELN.

[Den Zahlenangaben dieser Tafeln liegen die von Bruns im 16. Bande des Crelleschen Journals für Mathematik zusammengestellten Erfahrungen über die in der k. Preussischen allgemeinen Witwen-Verpflegungs-Anstalt während der Zeit von 1776 bis 1834 successive aufgenommenen 31500 Ehepaare zu Grunde. Es sind hier angegeben die Logarithmen der Anzahl der Frauen ($\log fm$) und der Männer ($\log FM$), welche unter 10000, die das vollendete 20ste Lebensjahr erreichten, bis zu dem Ende des in der Mitte bemerkten Altersjahres (m oder M) gelangten, jedoch mit der Abweichung von Bruns, dass das Absterben der Männer über 80 Jahren nach demselben Verhältnisse gerechnet ist, welches jenen Erfahrungen gemäss bei dem weiblichen Geschlechte gilt; weil wie in der Bilanzrechnung von 1845 erwähnt wird, die Registratur der Preussischen Witwenkasse zur directen Bestimmung des Absterbens der Männer im hohen Alter keine hinreichenden Daten enthält. Neben den Logarithmen der Lebenden stehen unter der Überschrift decr. die absoluten Werthe der Unterschiede jener Logarithmen ($\log gm = \log \frac{f(m-1)}{fm}$ und $\log Gm = \log \frac{F(M-1)}{FM}$) in Einheiten der siebenten Decimale ausgedrückt. Mit Hülfe der so erhaltenen Tafel für die Sterblichkeit hat Gauss die einfachen und die Verbindungsrenten bei dem Zinsfuss von $3\frac{1}{2}$ Proc. und von 4 Proc. berechnet.

Die sowohl in Logarithmen als in Zahlen ($\varphi m, \Phi M$) dargestellten einfachen Leibrentenwerthe gelten für das Ende des in der Mitte angegebenen Lebensjahres der Frau (m) oder des Mannes (M) als jetzigen Zeitmoment und unter der Voraussetzung, dass für den Fall des Erlebens des Endes jedes der nachfolgenden Jahre dann die Münzeinheit gezahlt wird, so dass also

$$\varphi m . fm = \rho f(m+1) + \rho\rho f(m+2) + \rho^3 f(m+3) + \dots$$
$$\Phi M . FM = \rho F(M+1) + \rho\rho F(M+2) + \rho^3 F(M+3) + \dots$$

ist, wenn ρ den Discontofactor ($= \frac{200}{207}$ bei $3\frac{1}{2}$ Proc. und $= \frac{25}{26}$ bei 4 Proc.) bezeichnet.

Die Tafel der Verbindungsrenten enthält die Logarithmen der Werthe $\psi(m, M)$, welche für den Zeitpunkt des zur Seite stehenden Alters (M) des Mannes solchen Renten, die am Schlusse jedes der folgenden Jahre im Falle des gleichzeitigen Lebens des Mannes (vom jetzigen Alter $= M$) und der Frau (vom Altersunterschiede $= m - M$) mit der Münzeinheit gezahlt werden, gleich kommen und also durch die Formel bestimmt sind:

$$\psi(m, M) . fm . Fm = \rho f(m+1) . F(M+1) + \rho\rho f(m+2) . F(M+2) + \rho^3 f(m+3) . F(M+3) + \dots$$

Werthe von Leibrenten und Lebensversicherungen für Männer.

Die Tafel für die Leibrenten der Männer hat GAUSS zu einer genauen Berechnung des Einflusses benutzt, den diejenige Bestimmung der Statuten, dass ein Wiederaustritt des lebenden Mitgliedes nicht gestattet sein solle, haben würde. Er findet, dass für die 42 verheiratheten Mitglieder der Bilanzrechnung vom 1. Oct. 1845 der Zeitwerth der Beiträge sich dadurch um 898 Thl. bei $3\frac{1}{2}$ Proc. und um 665 Thl. bei 4 Proc. vermehren würde. Ausserdem hat er mit Hülfe dieser Tafel einige Rechnungen über die Werthe von Lebensversicherungen ausgeführt und dabei für ein jetziges Mannesalter von M Jahren $\rho - (1-\rho)\Phi M$ als Zeitwerth der am Ende des Todesjahres auszuzahlenden Münzeinheit genommen.]

Werth der bestehenden Witwenpension Pm.

m jetziges Alter der Witwe.

φm Werth der Pension wenn jährlich und nur an noch Lebende gezahlt wird.

ρ Discontofactor ($= \frac{25}{26}$ für 4 Proc., $= \frac{200}{207}$ für $3\frac{1}{2}$ Proc.) oder der Zinsfuss so verstanden, dass ρ nach einem Jahre auf 1 anwächst.

fx Lebende des Alters x nach Angabe der Mortalitätstafel.

[Die Bilanz wird für den 1. October eines bestimmten Jahres berechnet und dieser Zeitpunkt hier überall nur kurz der jetzige genannt. Nach dem Regulative vom 11. October 1833 und den später ergangenen Verfügungen die Professoren Witwenkasse betreffend wird die Pension in halbjährigen am 1. April und am 1. October jeden Jahres fälligen Raten ausbezahlt und erlischt bei Witwen mit dem Sterbemonate, welcher zu voll bezahlt wird. Mit Rücksicht hierauf ist für den wahrscheinlichen Jetztwerth Pm einer mit der Münzeinheit jährlich auszuzahlenden Witwenpension:]

$$\begin{aligned} fm \,.\, Pm = {} & \tfrac{1}{12}\rho^{\frac{1}{2}}\left\{fm + f(m+\tfrac{1}{12}) + f(m+\tfrac{2}{12}) + \ldots + f(m+\tfrac{5}{12})\right\} \\ & + \tfrac{1}{12}\rho\left\{f(m+\tfrac{6}{12}) + f(m+\tfrac{7}{12}) + \ldots\ldots + f(m+\tfrac{11}{12})\right\} \\ & + \text{u.s.w.} \end{aligned}$$

oder

$$fm \,.\, Pm = \tfrac{1}{2}\rho^{\frac{1}{2}} f(m+\tfrac{5}{24}) + \tfrac{1}{2}\rho f(m+\tfrac{17}{24}) + \tfrac{1}{2}\rho^{\frac{3}{2}} f(m+\tfrac{29}{24}) + \text{u.s.w.}$$

wofür genommen werden kann

$$= \rho^{\frac{3}{4}} f(m+\tfrac{11}{24}) + \rho^{\frac{7}{4}} f(m+\tfrac{35}{24}) + \text{u.s.w.}$$

Die Tafel gibt

$$fm \,.\, \varphi m = \rho f(m+1) + \rho\rho f(m+2) + \ldots$$

also

$$Pm = \rho^{-\frac{1}{4}} \,.\, \frac{f(m-\frac{13}{24})}{fm} \,.\, \varphi(m-\tfrac{13}{24}) = \rho^{-\frac{1}{4}} \,.\, g(m+\tfrac{11}{24})^{\frac{13}{24}} \,.\, \varphi(m-\tfrac{13}{24})$$

[wenn man die in obiger Tafel unter decr. in Einheiten der siebenten Decimale enthaltenen Werthe von $\log f(m-1) - \log fm$ mit $\log . gm$ bezeichnet. Eine zur Berechnung von Hülfstafeln etwas bequemere Formel entsteht, wenn man bei jeder ganzen Zahl n und jedem echten Bruche k für $f(n+k)$ die Grösse $(k-1)fn + kf(n+1)$ setzt, nemlich:]

$$P m = A + B . \varphi m$$

wo $\qquad 48 A = 19\rho^{\frac{1}{2}} + 7\rho, \qquad 48 B = 5\rho^{-\frac{1}{2}} + 17 + 19\rho^{\frac{1}{2}} + 7\rho$

und nahe genug $\qquad A = \frac{13}{24}\rho^{\frac{15}{24}}, \qquad B = \rho^{\frac{7}{24}}$

für $3\frac{1}{2}$ Proc. $\log\frac{1}{\rho} = 0.0149403$ Genau $A = 0.52998474, \quad \log B = 9.9956901$

die Näherungsformel gibt $\qquad A = 0.5299694. \quad \log B = 9.9956424$

Gerechnet war nach $\frac{13}{24} + \varphi m = P^0$

man kann also setzen $P = \rho^{\frac{7}{24}} P^0 - \frac{13}{24}(\rho^{\frac{7}{24}} - \rho^{\frac{3}{4}}) = P^0 - \frac{7}{24}(1-\rho)P^0 - \frac{143}{576}(1-\rho)$

also für $3\frac{1}{2}$ Proc. $\quad P = P^0 - \frac{49}{4968}P^0 - \frac{1001}{119232} \qquad$ für 4 Proc. $\quad P = P^0 - \frac{7}{624}P^0 - \frac{11}{1152}$

Beispiel: Nr. 65. H.. 4 Proc. $\quad m = 53.784$

$\log\varphi(m - \frac{13}{24})$ 1.05488	$\log\varphi m$ 1.04830	Verbesserung des frühern Werthes P^0
comp. $\log\rho^{\frac{1}{4}}$ 0.00426	$\log\rho^{\frac{7}{24}}$ .. -0.00497	$P^0 - \frac{7}{624}P^0 - \frac{11}{1152}$
	$B\varphi m$.... 11.0492	$\frac{13}{24} + \varphi m = 11.7179$
$\log g(m + \frac{13}{24})^{\frac{13}{24}}$ 0.00440	$\frac{13}{24}\rho^{\frac{3}{4}}$ 0.5260	$-0.1314\ 5$
1.06354		$-0.0095\ 5$
$P =$ 11.5755	11.5752	11.5769

Stehende Ehe.

Alter des Mannes M, der Frau m zur Zeit von Oct. 1. Sterblichkeitstafel lebende Männer vom Alter $x = Fx$, Werth der Witwenpension $= R - Q$.

[Nach den Statuten nimmt die Pension mit dem Ablaufe des Gnadenquartals ihren Anfang, wird in halbjährigen am 1. April und am 1. October jeden Jahres fälligen Raten ausgezahlt und erlischt mit dem Schlusse des Sterbemonats. Für den Zeitwerth $R - Q$ einer etwa eintretenden Witwenpension welche jährlich die Münzeinheit beträgt ist demnach

$$\begin{aligned}(R-Q).fm.Fm = \; & \tfrac{1}{12}\rho \left\{Fm - F(m+\tfrac{1}{4})\right\}\left\{f(m+\tfrac{4}{12}) + f(m+\tfrac{5}{12}) + f(m+\tfrac{6}{12})\right\} \\ & + \tfrac{1}{12}\rho \left\{Fm - F(m+\tfrac{1}{2})\right\}\left\{f(m+\tfrac{7}{12}) + f(m+\tfrac{8}{12}) + f(m+\tfrac{9}{12})\right\} \\ & + \tfrac{1}{12}\rho^{\frac{3}{2}} \left\{Fm - F(m+\tfrac{3}{4})\right\}\left\{f(m+\tfrac{10}{12}) + f(m+\tfrac{11}{12}) + f(m+\tfrac{12}{12})\right\} \\ & + \tfrac{1}{12}\rho^{\frac{3}{2}} \left\{Fm - F(m+1)\right\}\left\{f(m+\tfrac{13}{12}) + f(m+\tfrac{14}{12}) + f(m+\tfrac{15}{12})\right\} \\ & + \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

oder:]

$$\begin{aligned} R.fm &= \tfrac{1}{2}\rho f(m+\tfrac{11}{24}) + \tfrac{1}{2}\rho^{\frac{3}{2}} f(m+\tfrac{23}{24}) + \tfrac{1}{2}\rho\rho f(m+\tfrac{35}{24}) + \ldots \\ &= \rho^{\frac{3}{4}} f(m+\tfrac{17}{24}) + \rho^{\frac{7}{4}} f(m+\tfrac{41}{24}) + \ldots \\ R &= \tfrac{1}{24}\rho^{\frac{3}{4}} + \rho^{\frac{7}{24}}\varphi m \\ Q.fm.Fm &= \rho^{\frac{3}{4}} f(m+\tfrac{17}{24}).F(M+\tfrac{1}{2}) + \rho^{\frac{7}{4}} f(m+\tfrac{41}{24}) F(M+\tfrac{3}{2}) + \ldots\end{aligned}$$

Werth der noch zu zahlenden Beiträge S.

[Regulativ vom 11. October 1833 und 24. November 1846. Jeder Theilnehmer an der Witwenkasse hat postnumerando jährlich am 17. September den Beitrag an den Rechnungsführer zu entrichten, und werden diese Beiträge von Michaelis zu Michaelis gerechnet. — Wenn ein Mitglied der Witwenkasse in der ersten Hälfte des Beitragsjahres, mithin in den Monaten vom October bis incl. März stirbt, so haben die Erben für das betreffende Jahr den Beitrag nicht mehr einzuzahlen; stirbt dagegen ein Mitglied in der zweiten Hälfte des Jahres, so muss von den Erben am 17. September des Sterbejahres noch der volle Beitrag entrichtet werden. — Die Aufkündigung von Seiten der Theilnehmer muss mittelst schriftlicher Erklärung vor dem 17. September des von Michaelis zu Michaelis laufenden Beitrittsjahres geschehen, der an diesem Tage fällig werdende jährliche Beitrag jedoch noch einmal zu voll bezahlt werden; wer diese Frist nicht einhält, muss für das ganze folgende Beitrittsjahr noch Zahlung leisten, bleibt dann aber bis dahin auch noch Mitglied.

Für den Zeitwerth S der jährlich als Beitrag zu zahlenden Münzeinheit erhält man daher:]

$$S.fm.Fm = \rho.fm.F(M+\tfrac{1}{2}) + \rho\rho.f(m+1).F(M+\tfrac{3}{2}) + \ldots$$

Bezeichnet man also

$$\psi(m, M).fm.Fm = \rho f(m+1)F(m+1) + \rho\rho f(m+2)F(m+2) + \ldots$$

so ist

$$Q = \frac{f(m-\frac{1}{12})}{fm} \cdot \frac{F(M-\frac{1}{2})}{FM} \cdot \rho^{\frac{1}{2}} \psi(m-\tfrac{1}{12}, M-\tfrac{1}{2})$$

$$S = \frac{f(m-1)}{fm} \cdot \frac{F(M-\frac{1}{2})}{FM} \cdot \psi(m-1, M-\tfrac{1}{2})$$

Schreibt man noch

$$\frac{f(m-1)}{fm} = gm$$

$$\frac{F(M-1)}{FM} = GM$$

so wird

$$R = \tfrac{1}{12}\rho^{\frac{1}{2}} + \rho^{\frac{1}{12}} \varphi m$$

$$Q = g(m+\tfrac{11}{12})^{\frac{1}{12}} \cdot G(M+\tfrac{1}{12})^{\frac{1}{2}} \cdot \rho^{\frac{1}{2}} \cdot \psi(m-\tfrac{1}{12}, M-\tfrac{1}{2})$$

$$S = gm \cdot G(M+\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \cdot \psi(m-1, M-\tfrac{1}{2})$$

Beispiel: Nr. 138 Conradi. $M = 65.02$, $m = 46.08$

	4 Proc.	3½ Proc.
$\log \varphi m$	1.12875	1.15233
$\frac{7}{24}\log\rho$	−497	−436
	13.2979	14.0594
$\frac{1}{24}\rho^{\frac{5}{4}}$	0.0397	399
$R =$	13.3376	14.0993
für Q, $\log\psi$ . . .	0.80912	0.82183
$\log gG$ . .	+897	+897
$\frac{1}{4}\log\rho$ . . .	−426	−374
$Q =$	6.5137	6.7150
$R-Q =$	6.8239	7.3843
für S, $\log\psi$ . . .	0.81325	0.82606
$\log gG$ . .	+1744	+1744
$S =$	6.7716	6.9743

$\log\rho = -0.0170333393$ für 4 Proc.

$\log\rho = -0.0149403498$ für 3½ Proc.

für Q	für S
$\psi(46.04;\ 64.65)$ . . 18.61	$\psi(45.08;\ 64.52)$ . . 19.44
18.61	19.44
64 ‖ 0.82079 | 0.83374	0.82251 | 0.83552
65 ‖ 0.80284 | 0.81540	0.80470 | 0.81732
$g(46.56)$ . . . 25	$g(46.08)$ . . . 588
$G(65.33)$ . . . 872	$G(65.27)$ . . . 1156

Bei der Aufstellung dieser Tafeln hat Gauss sich seiner fünfstelligen Tafel zur Berechnung des Logarithmus der Summe von Grössen, die nicht selbst, sondern nur durch ihre Logarithmen gegeben sind, bedient, und deshalb bei jedem Zinsfuss und jedem Altersunterschiede mit der Bestimmung der Rentenwerthe für die höchsten Lebensjahre den Anfang gemacht. Die einzelnen Zahlenangaben können aus diesem Grunde auch abgesehen von der Verbesserung, welche die Sterblichkeitstafel durch erweiterte Erfahrungen der Preussischen Witwenkasse schon seither erlitten hat, um einzelne Einheiten in der fünften Decimale der Logarithmen ungenau sein.

Einige Rechenfehler, auf die ich durch Bildung der Quotienten zwischen den 3½ und 4 procentigen Rentenwerthen und der Differenzen der auf einander folgenden Quotienten aufmerksam geworden bin, habe ich beim Abdruck berichtigt. In Einheiten der fünften Decimale des Logarithmus betragen diese Fehler an den Orten ihres Entstehens: +20 für das 77. Jahr der Frau in deren Leibrentenwerthen bei 4 Proc. ferner für das 71. und 93. Jahr des Mannes und die resp. Altersunterschiede der Frau von +1 und 0 Jahr bei 3½ Proc.; +10 für das 76. Jahr des Mannes in dessen Leibrentenwerth bei 3½ Proc. und ebenso viel für das 79. Jahr des Mannes nnd den Altersunterschied der Frau von −9 Jahr bei 4 Proc.; −10 für das 28. 68. 91. 94. und 94. Jahr des Mannes und die resp. Altersunterschiede von −8, −13, −11, −2, und −14 Jahr bei den resp. Procenten 4.4.3½.4 und 3½. Diese und einige andere Rechenfehler von geringerem Betrage haben auf die Bestimmung der Rentenwerthe für die zunächst jüngeren Altersjahre einigen Einfluss gehabt, der allmälig und im äussersten Falle erst für das Ende des zweiten Jahrzehnt verschwindet. Die Angaben der einfachen Leibrenten in Zahlen sind aus den Logarithmen abgeleitet und haben nach der angegebenen Berichtigung derselben hier auch eine entsprechende Abänderung erfahren müssen.

Die bei den Anwendungen der Tafeln zu gebrauchenden Formeln und die Rechnungsbeispiele zu denselben sind den zerstreuten Notizen auf einzelnen Handblättchen entlehnt und hier durch einige Einschaltungen erläutert

Schering.

ALLGEMEINE AUFLÖSUNG DER AUFGABE

DIE THEILE EINER GEGEBNEN FLÄCHE

AUF EINER ANDERN GEGEBNEN FLÄCHE SO ABZUBILDEN

DASS DIE ABBILDUNG DEM ABGEBILDETEN

IN DEN KLEINSTEN THEILEN ÄHNLICH WIRD

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS

ALS BEANTWORTUNG DER VON DER KÖNIGLICHEN SOCIETÄT DER WISSENSCHAFTEN IN COPENHAGEN FÜR MDCCCXXII AUFGEGEBNEN PRISFRAGE.

'Ab his via sternitur ad maiora.'

Astronomische Abhandlungen herausgegeben von H. C. SCHUMACHER.
Drittes Heft. Altona 1825.

Der Verfasser dieser Abhandlung hat die zweimalige Wahl der Aufgabe, die ihren Gegenstand ausmacht, als einen Beweis von der Wichtigkeit betrachten zu müssen geglaubt, welche die königliche Societät derselben beilegt, und ist dadurch aufgemuntert worden, dieser seine schon vor längerer Zeit gefundene Auflösung vorzulegen, wovon ihn sonst die späte von der Preisfrage erhaltene Kenntniss abgehalten haben würde. Er bedauert, dass der letztere Umstand ihn genöthigt hat, sich fast nur auf das Wesentliche und auf die Andeutung einiger näher liegenden Benutzungen für Kartenprojectionen und für die höhere Geodäsie zu beschränken, da er ohne die Nähe des Schlusstermins gern die Entwicklung einiger Nebenumstände noch weiter verfolgt, und die vielseitigen Anwendungen in der höheren Geodäsie ausführlich bearbeitet haben würde, welches er sich nun für eine andere Zeit und für einen andern Ort vorbehalten muss.

Im December 1822.

ALLGEMEINE AUFLÖSUNG DER AUFGABE

DIE THEILE EINER GEGEBENEN FLÄCHE

AUF EINER ANDERN GEGEBENEN FLÄCHE SO ABZUBILDEN

DASS DIE ABBILDUNG DEM ABGEBILDETEN

IN DEN KLEINSTEN THEILEN ÄHNLICH WIRD.

1.

Die Natur einer krummen Fläche wird durch eine Gleichung zwischen den sich auf jeden Punkt derselben beziehenden Coordinaten x, y, z bestimmt. Vermöge dieser Gleichung kann jede dieser drei veränderlichen Grössen wie eine Function der beiden andern betrachtet werden. Noch allgemeiner ist es, noch zwei neue veränderliche Grössen t, u einzuführen, und jede der x, y, z als eine Function von t und u darzustellen, wodurch, wenigstens allgemein zu reden, bestimmte Werthe von t und u allemal einem bestimmten Punkte der Oberfläche angehören, und umgekehrt.

2.

In Beziehung auf eine zweite krumme Fläche sollen X, Y, Z, T, U ähnliche Bedeutungen haben, wie resp. x, y, z, t, u in Beziehung auf die erstere.

3.

Die erste Fläche auf der zweiten *abbilden* heisst, ein Gesetz festsetzen, nach welchem einem jeden Punkte der ersten Fläche ein bestimmter Punkt der zweiten entsprechen soll. Dieses wird dadurch geschehen, dass T und U bestimmten Functionen der zwei veränderlichen Grössen t und u gleich gesetzt werden.

Insofern die Abbildung gewissen Bedingungen Genüge leisten soll, werden diese Functionen nicht mehr willkürlich sein dürfen. Indem dadurch auch X, Y, Z zu Functionen von t und u werden, müssen diese Functionen, neben der Bedingung, welche die Natur der zweiten Fläche vorschreibt, auch noch derjenigen Genüge leisten, welche in der Abbildung erfüllt werden soll.

4.

Die Aufgabe der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften schreibt vor, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich sein soll. Es kommt zuvörderst darauf an, diese Bedingung analytisch auszudrücken.

Aus der Differentiation der Functionen von t, u, durch welche x, y, z, X, Y, Z ausgedrückt werden, mögen folgende Gleichungen hervorgehen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= a\,\mathrm{d}t + a'\mathrm{d}u \\
\mathrm{d}y &= b\,\mathrm{d}t + b'\mathrm{d}u \\
\mathrm{d}z &= c\,\mathrm{d}t + c'\mathrm{d}u \\
\mathrm{d}X &= A\,\mathrm{d}t + A'\mathrm{d}u \\
\mathrm{d}Y &= B\,\mathrm{d}t + B'\mathrm{d}u \\
\mathrm{d}Z &= C\,\mathrm{d}t + C'\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Die vorgeschriebene Bedingung erfordert, erstlich, dass alle von Einem Punkte der ersten Fläche ausgehende und in ihr liegende unendlich kleine Linien den ihnen entsprechenden Linien der zweiten Fläche proportional sind, und zweitens, dass jene unter sich dieselben Winkel machen, wie diese.

Ein solches Linear-Element auf der ersten Fläche wird

$$= \sqrt{((aa+bb+cc)\mathrm{d}t^2 + 2(aa'+bb'+cc')\mathrm{d}t.\mathrm{d}u + (a'a'+b'b'+c'c')\mathrm{d}u^2)}$$

und das entsprechende auf der zweiten Fläche

$$= \sqrt{((AA+BB+CC)\mathrm{d}t^2 + 2(AA'+BB'+CC')\mathrm{d}t.\mathrm{d}u + (A'A'+B'B'+C'C')\mathrm{d}u^2)}$$

Sollen beide, unabhängig von $\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}u$, in einem bestimmten Verhältniss zu einander stehen, so müssen offenbar die drei Grössen

$$aa+bb+cc,\quad aa'+bb'+cc',\quad a'a'+b'b'+c'c'$$

respective den drei folgenden proportional sein:

$$AA+BB+CC,\quad AA'+BB'+CC',\quad A'A'+B'B'+C'C'$$

Wenn den Endpunkten eines zweiten Elements auf der ersten Fläche die Werthe

$$t,\, u \quad \text{und} \quad t+\delta t,\, u+\delta u$$

entsprechen, so ist der Cosinus des Winkels, welchen dasselbe mit dem ersten Elemente macht,

$$=\frac{(a\,\mathrm{d}t+a'\mathrm{d}u)(a\,\delta t+a'\delta u)+(b\,\mathrm{d}t+b'\mathrm{d}u)(b\,\delta t+b'\delta u)+(c\,\mathrm{d}t+c'\mathrm{d}u)(c\,\delta t+c'\delta u)}{\sqrt{((a\,\mathrm{d}t+a'\mathrm{d}u)^2+(b\,\mathrm{d}t+b'\mathrm{d}u)^2+(c\,\mathrm{d}t+c'\mathrm{d}u)^2).((a\,\delta t+a'\delta u)^2+(b\,\delta t+b'\delta u)^2+(c\,\delta t+c'\delta u)^2)}}$$

und für den Cosinus des Winkels zwischen den correspondirenden Elementen auf der zweiten Fläche ergibt sich ein ganz ähnlicher Ausdruck, wenn nur a, b, c, a', b', c' in A, B, C, A', B', C' verwandelt werden. Offenbar werden beide Ausdrücke einander gleich, wenn die obige Proportionalität Statt findet, und die zweite Bedingung wird daher schon mit in der ersten begriffen, welches auch bei einigem Nachdenken von selbst klar ist.

Der analytische Ausdruck der Bedingung unserer Aufgabe ist demnach, dass

$$\frac{AA+BB+CC}{aa+bb+cc}=\frac{AA'+BB'+CC'}{aa'+bb'+cc'}=\frac{A'A'+B'B'+C'C'}{a'a'+b'b'+c'c'}$$

werden muss, welches eine endliche Function von t und u sein wird, die wir $=mm$ setzen wollen. Es drückt dann m das Verhältniss aus, in welchem die Lineargrössen auf der ersten Fläche in ihrer Abbildung auf der zweiten vergrössert oder verkleinert werden (je nachdem m grösser oder kleiner ist als 1). Dieses Verhältniss wird, allgemein zu reden, nach den Stellen verschieden sein: in dem speciellen Falle, wo m constant ist, wird eine vollkommene Aehnlichkeit auch in den endlichen Theilen, und wenn überdiess $m=1$ ist, wird eine vollkommene Gleichheit Statt finden, und die eine Fläche sich auf die andere abwickeln lassen.

5.

Indem wir Kürze halber

$$(aa+bb+cc)\,\mathrm{d}t^2+2(aa'+bb'+cc')\,\mathrm{d}t.\mathrm{d}u+(a'a'+b'b'+c'c')\,\mathrm{d}u^2=\omega$$

setzen, bemerken wir, dass die Differentialgleichung $\omega=0$ *zwei* Integrationen zulassen wird. Indem man nemlich das Trinomium ω in zwei, in Beziehung auf

33*

$\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}u$ lineare, Factoren zerlegt, muss entweder der eine oder der andere Factor $=0$ werden, welches zwei verschiedene Integrationen geben wird. Die eine Integration wird der Gleichung

$$0=(aa+bb+cc)\mathrm{d}t$$
$$+\{aa'+bb'+cc'+i\sqrt{((aa+bb+cc)(a'a'+b'b'+c'c')-(aa'+bb'+cc')^2)}\}\mathrm{d}u$$

entsprechen (wo i Kürze halber für $\sqrt{-1}$ geschrieben ist, indem man sich leicht überzeugt, dass der irrationale Theil des Ausdrucks imaginär werden muss); die andere einer ganz ähnlichen Gleichung, wenn nur i mit $-i$ vertauscht wird. Ist also das Integral der erstern Gleichung dieses:

$$p+iq=\text{Const.}$$

wo p und q reelle Functionen von t und u bedeuten, so wird das andere Integral

$$p-iq=\text{Const.}$$

und die Natur der Sache wird es mit sich bringen, dass

$$(\mathrm{d}p+i\mathrm{d}q).(\mathrm{d}p-i\mathrm{d}q) \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}p^2+\mathrm{d}q^2$$

ein Factor von ω, oder

$$\omega=n(\mathrm{d}p^2+\mathrm{d}q^2)$$

werden muss, wo n eine endliche Function von t und u sein wird.

Wir wollen nun das Trinomium, in welches

$$\mathrm{d}X^2+\mathrm{d}Y^2+\mathrm{d}Z^2$$

übergeht, wenn für $\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}Y$, $\mathrm{d}Z$ ihre Werthe durch T, U, $\mathrm{d}T$, $\mathrm{d}U$ substituirt werden, durch Ω bezeichnen, und annehmen, dass auf ähnliche Weise, wie vorher, die beiden Integrale der Gleichung $\Omega=0$ diese seien:

$$P+iQ=\text{Const.}$$
$$P-iQ=\text{Const.}$$

und

$$\Omega=N(\mathrm{d}P^2+\mathrm{d}Q^2)$$

wo P, Q, N reelle Functionen von T und U bedeuten werden.

Diese Integrationen lassen sich (die allgemeinen Schwierigkeiten des Integrirens bei Seite gesetzt) offenbar vor der Auflösung unserer Hauptaufgabe ausführen.

Wenn nun für T, U solche Functionen von t, u substituirt werden, wobei die Bedingung unsrer Hauptaufgabe erfüllt wird, so geht Ω in $mm\omega$ über, und es wird

$$\frac{(\mathrm{d}P+i\,\mathrm{d}Q).(\mathrm{d}P-i\,\mathrm{d}Q)}{(\mathrm{d}p+i\,\mathrm{d}q).(\mathrm{d}p-i\,\mathrm{d}q)}=\frac{mmn}{N}$$

Man sieht aber leicht, dass der Zähler im ersten Theile dieser Gleichung durch den Nenner nur dann theilbar sein kann, wenn

entweder $\mathrm{d}P+i\,\mathrm{d}Q$ durch $\mathrm{d}p+i\,\mathrm{d}q$, und $\mathrm{d}P-i\,\mathrm{d}Q$ durch $\mathrm{d}p-i\,\mathrm{d}q$,
oder $\mathrm{d}P+i\,\mathrm{d}Q$ durch $\mathrm{d}p-i\,\mathrm{d}q$, und $\mathrm{d}P-i\,\mathrm{d}Q$ durch $\mathrm{d}p+i\,\mathrm{d}q$

theilbar ist. Im ersteren Falle wird demnach $\mathrm{d}P+i\,\mathrm{d}Q$ verschwinden, wenn $\mathrm{d}p+i\,\mathrm{d}q=0$, oder $P+iQ$ wird constant werden, wenn $p+iq$ constant angenommen wird, d. i. $P+iQ$ wird bloss Function von $p+iq$ sein, und eben so $P-iQ$ Function von $p-iq$. Im andern Falle wird $P+iQ$ Function von $p-iq$, und $P-iQ$ Function von $p+iq$ sein. Es ist leicht einzusehen, dass diese Folgerungen auch umgekehrt gelten, nemlich dass, wenn für $P+iQ$, $P-iQ$ Functionen von $p+iq$, $p-iq$ (entweder respective, oder verkehrt) angenommen werden, die endliche Theilbarkeit des Ω durch ω, und sonach die oben erforderlich gefundene Proportionalität Statt haben wird.

Man überzeugt sich übrigens leicht, dass wenn z. B.

$$P+iQ=f(p+iq)$$
$$P-iQ=f'(p-iq)$$

gesetzt werden, die Beschaffenheit der Function f' schon durch die von f bedingt wird. Wenn nemlich unter den constanten Grössen, welche letztere etwa involviren mag, keine andere als reelle befindlich sind, so wird die andere f' mit der f ganz identisch sein müssen, damit jedesmal reellen Werthen von p, q reelle Werthe von P, Q entsprechen; im entgegengesetzten Falle wird sich f' von f nur dadurch unterscheiden, dass in den imaginären Elementen von f statt i überall das entgegengesetzte $-i$ gesetzt werden muss.

Man hat hiernächst

$$P = \tfrac{1}{2}f(p+iq) + \tfrac{1}{2}f'(p-iq)$$
$$iQ = \tfrac{1}{2}f(p+iq) - \tfrac{1}{2}f'(p-iq)$$

oder, was dasselbe ist, indem die Function f ganz willkürlich angenommen wird (nach Gefallen mit Inbegriff constanter imaginärer Elemente), wird P dem reellen und iQ (bei der zweiten Auflösung $-iQ$) dem imaginären Theile von $f(p+iq)$ gleich gesetzt, und hieraus sodann vermittelst der Elimination T und U in der Gestalt von Functionen von t und u dargestellt werden. Hiedurch ist die vorgegebene Aufgabe ganz allgemein und vollständig aufgelöst.

6.

Wenn $p'+iq'$ eine beliebige bestimmte Function von $p+iq$ vorstellt (indem p', q' reelle Functionen von p, q sind), so sieht man leicht, dass auch

$$p'+iq' = \text{Const.} \quad \text{und} \quad p'-iq' = \text{Const.}$$

die Integrale der Differentialgleichung $\omega = 0$ darstellen; in der That werden jene mit den obigen

$$p+iq = \text{Const.} \quad \text{und} \quad p-iq = \text{Const.}$$

resp. ganz gleichbedeutend sein. Eben so werden die Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$

$$P'+iQ' = \text{Const.} \quad \text{und} \quad P'-iQ' = \text{Const.}$$

mit den obigen

$$P+iQ = \text{Const.} \quad \text{und} \quad P-iQ = \text{Const.}$$

ganz gleichbedeutend sein, wenn $P'+iQ'$ eine beliebige bestimmte Function von $P+iQ$ vorstellt (indem P', Q' reelle Functionen von P, Q sind). Es erhellet hieraus, dass in der allgemeinen Auflösung unsrer Aufgabe, welche wir im vorhergehenden Artikel gegeben haben, auch p', q' die Stelle von p, q; und P', Q' die Stelle von P, Q resp. vertreten können. Wenn gleich die Allgemeinheit der Auflösung durch eine solche Abänderung nichts gewinnt, so kann doch zuweilen für die Anwendung eine Form zu diesem, die andere zu jenem Zweck bequemer sein.

7.

Wenn die Functionen, welche aus der Differentiation der willkürlichen Functionen f, f' entspringen, durch φ und φ' resp. bezeichnet werden, so dass $d.f\upsilon = \varphi\upsilon.d\upsilon$, $d.f'\upsilon = \varphi'\upsilon.d\upsilon$, so wird in Folge unsrer allgemeinen Auflösung

$$\frac{dP+idQ}{dp+idq} = \varphi(p+iq), \quad \frac{dP-idQ}{dp-idq} = \varphi'(p-iq)$$

also

$$\frac{mmn}{N} = \varphi(p+iq).\varphi'(p-iq)$$

Das Vergrösserungsverhältniss bestimmt sich daher durch die Formel

$$m = \sqrt{\left\{\frac{dp^2+dq^2}{\omega}\cdot\frac{\Omega}{dP^2+dQ^2}\cdot\varphi(p+iq).\varphi'(p-iq)\right\}}$$

8.

Wir wollen nun noch unsre allgemeine Auflösung mit einigen Beispielen erläutern, wodurch sowohl die Art der Anwendung, als die Beschaffenheit einiger dabei noch in Betracht kommenden Umstände am besten ins Licht gesetzt werden wird.

Es seien zuvörderst beide Flächen Ebnen, wo wir

$$x = t, \quad y = u, \quad z = 0$$
$$X = T, \quad Y = U, \quad Z = 0$$

werden setzen können. Die Differentialgleichung

$$\omega = dt^2 + du^2 = 0$$

gibt hier die beiden Integrale

$$t+iu = \text{Const.}, \quad t-iu = \text{Const.}$$

und eben so sind die beiden Integrale der Gleichung $\Omega = dT^2 + dU^2 = 0$, folgende:

$$T+iU = \text{Const.}, \quad T-iU = \text{Const.}$$

Die beiden allgemeinen Auflösungen der Aufgabe sind demnach:

$$\text{I.} \quad T+iU = f(t+iu), \quad T-iU = f'(t-iu)$$
$$\text{II.} \quad T+iU = f(t-iu), \quad T-iU = f'(t+iu)$$

Dieses Resultat lässt sich auch so ausdrücken: Indem die Charakteristik f eine beliebige Function bedeutet, hat man den reellen Theil von $f(x+iy)$ für X, und den imaginären Theil, mit Weglassung des Factors i, entweder für Y oder für $-Y$ anzunehmen.

Gebraucht man die Charakteristiken φ, φ' in der Bedeutung des Art. 7 und setzt

$$\varphi(x+iy) = \xi + i\eta, \quad \varphi'(x-iy) = \xi - i\eta$$

wo offenbar ξ und η reelle Functionen von x und y sein werden, so hat man, in der *ersten* Auflösung,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X + i\,\mathrm{d}Y &= (\xi + i\eta)(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) \\ \mathrm{d}X - i\,\mathrm{d}Y &= (\xi - i\eta)(\mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X &= \xi\,\mathrm{d}x - \eta\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}Y &= \eta\,\mathrm{d}x + \xi\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Macht man nun

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma.\cos\gamma, & \eta &= \sigma.\sin\gamma \\ \mathrm{d}x &= \mathrm{d}s.\cos g, & \mathrm{d}y &= \mathrm{d}s.\sin g \\ \mathrm{d}X &= \mathrm{d}S.\cos G, & \mathrm{d}Y &= \mathrm{d}S.\sin G \end{aligned}$$

so dass $\mathrm{d}s$ ein Linearelement in der ersten Ebne, g dessen Neigung gegen die Abscissenlinie, $\mathrm{d}S$ das correspondirende Linearelement in der zweiten Ebne und G dessen Neigung gegen die Abscissenlinie bedeutet, so geben die obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S.\cos G &= \sigma.\mathrm{d}s.\cos(g+\gamma) \\ \mathrm{d}S.\sin G &= \sigma.\mathrm{d}s.\sin(g+\gamma) \end{aligned}$$

und folglich, wenn man, was erlaubt ist, σ als positiv betrachtet,

$$\mathrm{d}S = \sigma.\mathrm{d}s, \quad G = g + \gamma$$

Man sieht also (in Uebereinstimmung mit Art. 7), dass σ das Verhältniss der Vergrösserung des Elements $\mathrm{d}s$ in der Darstellung $\mathrm{d}S$ vorstellt, und, wie gehörig, von g unabhängig ist; und eben so zeigt die Unabhängigkeit des Winkels γ von g, dass alle von einem Punkte ausgehende Linearelemente in der ersten Ebne

durch Elemente in der zweiten Ebne dargestellt werden, die unter sich und, wie wir hinzufügen können, *in demselben Sinn*, dieselben Winkel bilden, wie jene.

Wählt man für f eine linearische Function, so dass $f\upsilon = A + B\upsilon$, wo die constanten Coëfficienten von der Form sind

$$A = a + bi, \quad B = c + ei$$

so wird $$\varphi\upsilon = B = c + ei$$

also $$\sigma = \sqrt{(cc + ee)}, \quad \gamma = \text{Arc.tang}\frac{e}{c}$$

Das Vergrösserungsverhältniss ist folglich in allen Punkten constant, und die Darstellung dem Dargestellten durchaus ähnlich.

Für jede andere Function f wird (wie man leicht beweisen kann) das Vergrösserungsverhältniss nicht constant sein, und die Aehnlichkeit also nur in den kleinsten Theilen Statt finden können.

Sind die Plätze, welche einer bestimmten Anzahl von gegebnen Punkten der ersten Ebne in der Darstellung entsprechen sollen, vorgeschrieben, so kann man leicht nach der gemeinen Interpolationsmethode die einfachste algebraische Function f finden, wodurch diese Bedingung erfüllt wird. Bezeichnet man nemlich die Werthe von $x + iy$ für die gegebnen Punkte durch a, b, c u. s. w., und die correspondirenden Werthe von $X + iY$ durch A, B, C u. s. w., so wird man

$$f\upsilon = \frac{(\upsilon - b)(\upsilon - c)\ldots}{(a - b)(a - c)\ldots} . A + \frac{(\upsilon - a)(\upsilon - c)\ldots}{(b - a)(b - c)\ldots} . B + \frac{(\upsilon - a)(\upsilon - b)\ldots}{(c - a)(c - b)\ldots} . C + \text{ etc.}$$

setzen müssen, welches eine algebraische Function von υ ist, deren Ordnung um eine Einheit kleiner ist, als die Anzahl der vorgegebnen Punkte. Für zwei Punkte, wo die Function linearisch wird, findet folglich vollkommene Aehnlichkeit Statt.

Man kann von diesem Verfahren in der Geodäsie eine nützliche Anwendung machen, um eine auf mittelmässige Messungen gegründete Karte, die im kleinen Detail gut, aber im Ganzen etwas verzerrt ist, in eine bessere zu verwandeln, wenn man die richtige Lage einer Anzahl von Punkten kennt. Es versteht sich jedoch, dass man bei einer solchen Umformung nicht viel über die Gegend hinausgehen darf, welche letztere Punkte umfassen.

Wenn man die *zweite* Auflösung auf dieselbe Art durchführt, so findet man, dass der ganze Unterschied nur darin besteht, dass die Aehnlichkeit eine verkehrte ist, indem alle Elemente in der Darstellung zwar eben so grosse Winkel mit einander machen, wie im Dargestellten, aber in verkehrtem Sinn, so dass

dort rechts liegt, was hier links ist. Dieser Unterschied ist aber kein wesentlicher, und verschwindet, wenn man in der einen Ebne diejenige Seite, welche man vorher als obere betrachtete, zur untern macht. Diese letztre Bemerkung lässt sich übrigens allemal in Anwendung bringen, wenn die eine der beiden Flächen eine Ebne ist, daher wir in den folgenden Beispielen dieser Art uns bloss auf die erste Auflösung beschränken können.

9.

Wir wollen nun (als zweites Beispiel) die Darstellung der Fläche eines geraden Kegels in der Ebne betrachten. Als Gleichung der erstern nehmen wir an

$$xx + yy - kkzz = 0$$

wo wir ferner

$$x = kt\cos u$$
$$y = kt\sin u$$
$$z = t$$

und wie vorhin $Y = T$, $Y = U$, $Z = 0$ setzen.

Die Differentialgleichung

$$\omega = (kk+1)\,\mathrm{d}t^2 + kktt\,\mathrm{d}u^2 = 0$$

gibt hier die beiden Integrale

$$\log t \pm i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\,.\,u = \text{Const.}$$

Wir haben demnach die Auflösung

$$X + iY = f(\log t + i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\,.\,u)$$
$$X - iY = f'(\log t - i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\,.\,u)$$

d. i. es wird, indem f eine willkürliche Function bedeutet, für X der reelle Theil von

$$f(\log t + i\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\,.\,u)$$

und für Y der imaginäre, nach Weglassung des Factors i, angenommen.

Setzt man für f z.B. eine Exponentialgrösse, nemlich

$$f\upsilon = he^{\upsilon}$$

wo h constant ist und e die Basis der hyperbolischen Logarithmen bedeutet, so hat man die einfachste Darstellung

$$X = ht\cos\sqrt{\tfrac{kk}{kk+1}}\,.\,u, \qquad Y = ht\sin\sqrt{\tfrac{kk}{kk+1}}\,.\,u$$

Die Anwendung der Formeln des 7. Art. gibt hier

$$n = (kk+1)tt, \qquad N = 1$$

und, da $\varphi\upsilon = \varphi'\upsilon = he^{\upsilon}$,

$$\varphi(\log t + i\sqrt{\tfrac{kk}{kk+1}}\,.\,u)\,.\,\varphi'(\log t - i\sqrt{\tfrac{kk}{kk+1}}\,.\,u) = hhtt$$

folglich

$$m = \frac{h}{\sqrt{(kk+1)}}$$

also constant. Macht man also noch

$$h = \sqrt{(kk+1)}$$

so wird die Darstellung eine vollkommne Abwicklung.

10.

Es sei drittens die Kugelfläche, deren Halbmesser $= a$, in der Ebne darzustellen. Wir setzen hier

$$x = a\cos t\,.\,\sin u$$
$$y = a\sin t\,.\,\sin u$$
$$z = a\cos u$$

wodurch wir erhalten

$$\omega = aa\sin u^2\,\mathrm{d}t^2 + aa\,\mathrm{d}u^2$$

Die Differentialformel $\omega = 0$ gibt folglich

$$\mathrm{d}t \mp i\,.\,\frac{\mathrm{d}u}{\sin u} = 0$$

und deren Integration

$$t \pm i\log\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}u = \text{Const.}$$

Es wird daher, wenn wir wiederum durch die Charakteristik f eine willkürliche Funktion andeuten, X dem reellen und iY dem imaginären Theile von

$$f(t+i\log\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}u)$$

gleich gesetzt werden müssen. Wir wollen ein Paar specielle Fälle dieser allgemeinen Auflösung anführen.

Wählt man für f eine lineäre Function, indem man $fv = kv$ setzt, so wird

$$X = kt, \quad Y = k\log\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}u$$

Auf die Erde angewandt, ist dies, wenn man t die geographische Länge, $90^0 - u$ die Breite bedeuten lässt, offenbar mit Mercators Projection einerlei. Für das Vergrösserungsverhältniss geben hier die Formeln des 7. Artikels

$$m = \frac{k}{a\sin u}.$$

Nimmt man für f eine imaginäre Exponentialfunction, und zwar zuerst die einfachste $fv = ke^{iv}$, so wird

$$f(t+i\log\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}u) = ke^{\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}u+it} = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u(\cos t + i\sin t)$$

und

$$X = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u.\cos t, \quad Y = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u.\sin t$$

welches, wie man leicht sieht, die stereographische Polarprojection ist.

Setzt man allgemeiner $fv = ke^{i\lambda v}$, so wird

$$X = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u^{\lambda}.\cos\lambda t, \quad Y = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u^{\lambda}.\sin\lambda t$$

Für das Vergrösserungsverhältniss erhalten wir hier

$$n = aa\sin u^2, \quad N = 1, \quad \varphi v = i\lambda ke^{i\lambda v}$$

und hieraus

$$m = \frac{\lambda k\operatorname{tang}\frac{1}{2}u^{\lambda}}{a\sin u}$$

Man sieht, dass hier die Darstellung aller Punkte, für welche u constant ist, in Einen Kreis, und die Darstellung aller Punkte, für welche t constant ist, in Eine gerade Linie fällt, wie auch, dass die allen verschiedenen Werthen von u angehörigen Kreise concentrisch sind. Dies gibt eine sehr zweckmässige Kartenprojection, wenn nur ein Theil der Kugelfläche darzustellen ist, und man thut dann am besten, λ so zu wählen, dass das Vergrösserungsverhältniss für die

äussersten Werthe von u gleich gross wird, wodurch es gegen die Mitte zu seinen kleinsten Werth erhält. Sind diese äussersten Werthe von u diese u^0 und u', so wird man demnach setzen müssen:

$$\lambda = \frac{\log\sin u' - \log\sin u^0}{\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}u' - \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}u^0}$$

Die Blätter von Herrn Professor HARDING's Sternkarten Nr. 19—26 sind nach dieser Projection gezeichnet.

11.

Man kann die allgemeine Auflösung für das im vorhergehenden Artikel behandelte Beispiel noch in einer andern Form aufstellen, die wir ihrer Eleganz wegen hier noch beifügen zu müssen glauben.

In Folge des im 6. Art. Vorgetragenen wird, da

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u(\cos t + i\sin t)$$

eine Function von

$$t + i\log\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}u$$

ist, und

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u(\cos t + i\sin t) = \frac{\sin u\cos t + i\sin u\sin t}{1+\cos u} = \frac{x+iy}{a+z}$$

die allgemeine Auflösung auch durch

$$X + iY = f\frac{x+iy}{a+z}, \quad X - iY = f'\frac{x-iy}{a+z}$$

dargestellt werden können, d. i. X muss dem reellen und iY dem imaginären Theil von $f\frac{x+iy}{a+z}$ gleich gesetzt werden, indem f eine willkürliche Function bezeichnet. Anstatt $f\frac{x+iy}{a+z}$ kann man, wie man leicht sieht, auch eine willkürliche Function von $\frac{y+iz}{a+x}$, oder von $\frac{z+ix}{a+y}$ nehmen.

12.

Wir wollen viertens die Darstellung der Oberfläche des Revolutions-Ellipsoids in der Ebne betrachten. Es seien a und b die beiden halben Hauptaxen des Ellipsoids, so dass

$$x = a\cos t\sin u$$
$$y = a\sin t\sin u$$
$$z = b\cos u$$

gesetzt werden kann. Hier wird also

$$\omega = aa \sin u^2 \, dt^2 + (aa \cos u^2 + bb \sin u^2) \, du^2$$

und die Differentialformel $\omega = 0$ gibt, wenn wir Kürze halber $\sqrt{(1 - \frac{bb}{aa})} = \varepsilon$ setzen (insofern die Revolutionshalbaxe $b < a$),

$$0 = dt \mp i \, du . \sqrt{(\operatorname{cotang} u^2 + 1 - \varepsilon\varepsilon)}$$

Setzt man hier

$$\sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon)} . \operatorname{tang} u = \operatorname{tang} w$$

wo, bei der Anwendung auf das Erdsphäroid, $90^0 - w$ die geographische Breite und t die Länge vorstellen wird, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$0 = dt \mp i \, dw . \frac{1 - \varepsilon\varepsilon}{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos w^2) \sin w}$$

deren Integration

$$\text{Const.} = t \pm i \log . \{\operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} w . (\tfrac{1 - \varepsilon \cos w}{1 + \varepsilon \cos w})^{\frac{1}{2}\varepsilon}\}$$

gibt. Man hat daher, indem f eine willkürliche Function bedeutet, für X den reellen und für iY den imaginären Theil von

$$f(t + i \log \{\operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} w . (\tfrac{1 - \varepsilon \cos w}{1 + \varepsilon \cos w})^{\frac{1}{2}\varepsilon}\})$$

zu nehmen. — Wählt man für f eine lineäre Function, d. i. $fv = kv$, so wird

$$X = kt, \quad Y = k \log \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} w - \tfrac{1}{2} k \varepsilon \log \frac{1 + \varepsilon \cos w}{1 - \varepsilon \cos w}$$

welches eine der Mercatorschen analoge Projection gibt.

Nimmt man hingegen für f eine imaginäre Exponentialfunction $fv = k e^{i\lambda v}$, so wird

$$X = k . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w^\lambda . (\tfrac{1 + \varepsilon \cos w}{1 - \varepsilon \cos w})^{\frac{1}{2}\varepsilon\lambda} . \cos \lambda t, \quad Y = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w^\lambda . (\tfrac{1 + \varepsilon \cos w}{1 - \varepsilon \cos w})^{\frac{1}{2}\varepsilon\lambda} . \sin \lambda t$$

welches, wenn man $\lambda = 1$ setzt, eine der stereographischen Polarprojection analoge, und allgemein, eine zur Darstellung eines Theils der Erdoberfläche, insofern man auf die Abplattung Rücksicht nehmen soll, sehr zweckmässige Projection gibt.

Was über den andern Fall, wo $b > a$ ist, zu sagen ist, lässt sich zwar leicht aus dem vorhergehenden unmittelbar ableiten, wo, wenn man dieselben

Bezeichnungen beibehält, ε imaginär, aber $(\frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon\cos w})^{\frac{1}{2}\varepsilon}$ doch wieder reell wird. Der Vollständigkeit wegen wollen wir jedoch die Formeln für diesen Fall noch besonders beifügen, und gleich Anfangs $\sqrt{(\frac{bb}{aa}-1)}=\eta$ setzen. Man hat dann w durch die Gleichung

$$\sqrt{(1+\eta\eta)}.\operatorname{tang} u = \operatorname{tang} w$$

zu bestimmen, und die Differentialgleichung

$$0 = \mathrm{d}t \mp i\,\mathrm{d}w.\frac{1+\eta\eta}{(1+\eta\eta\cos w^2)\sin w}$$

wird das Integral

$$\text{Const.} = t \pm i(\log\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}w + \eta\operatorname{Arc\,tang.}\eta\cos w)$$

geben, so dass X für den reellen und iY für den imaginären Theil von

$$f(t+i(\log\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}w+\eta\operatorname{Arc\,tang.}\eta\cos w))$$

wird genommen werden müssen. Die Gegenstücke der beiden obigen speciellen Anwendungen ergeben sich hieraus von selbst. Nach der erstern wird

$$X = kt,\quad Y = k\log\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}w + \eta k\operatorname{Arc\,tang.}\eta\cos w$$

nach der andern

$$X = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}w^{\lambda}.e^{-\eta\lambda\operatorname{Arc\,tang.}\eta\cos w}.\cos\lambda t$$
$$Y = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}w^{\lambda}.e^{-\eta\lambda\operatorname{Arc\,tang.}\eta\cos w}.\sin\lambda t$$

gesetzt werden müssen.

13.

Als letztes Beispiel wollen wir die allgemeine Darstellung der Oberfläche des Umdrehungs-Ellipsoids auf der Kugelfläche betrachten. Für jenes wollen wir die Bezeichnungen des vorhergehenden Artikels beibehalten, den Halbmesser der Kugelfläche $=A$, und

$$X = A\cos T\sin U$$
$$Y = A\sin T\sin U$$
$$Z = A\cos U$$

setzen. Wenn man hier die allgemeine Auflösung des 5. Artikels zur Anwendung bringt, so findet man, dass, indem f eine willkürliche Function bedeutet, T dem reellen und $i \log \operatorname{cotang} \frac{1}{2} U$ dem imaginären Theile von

$$f\left(t + i \log \left\{ \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} w \, . \left(\frac{1 - \varepsilon \cos w}{1 + \varepsilon \cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \right\}\right)$$

gleich gesetzt werden muss *).

Die einfachste Auflösung wird sein, $fv = v$ zu setzen, wodurch

$$T = t, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} U = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w \, . \left(\frac{1 + \varepsilon \cos w}{1 - \varepsilon \cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}$$

wird. Dies bietet eine für die höhere Geodäsie überaus brauchbare Transformation dar, von welcher Benutzung wir jedoch hier nur einiges und nur kurz andeuten können. Wenn nemlich auf der Oberfläche des Ellipsoids und der Kugel diejenigen Punkte als einander correspondirend angesehen werden, die einerlei Länge haben, und deren Breiten resp. $90^0 - w$, $90^0 - U$, vermöge der angeführten Gleichung zusammenhangen, so entspricht einem System von, verhältnissmässig, kleinen Dreiecken (und das werden diejenigen immer sein, die zur wirklichen Messung dienen können), die auf der Oberfläche des Sphäroids durch kürzeste Linien gebildet werden, auf der Kugelfläche ein System von Dreiecken, deren Winkel den correspondirenden auf dem Sphäroid *genau* gleich sind, und deren Seiten von grössten Kreisbogen so wenig abweichen, dass sie in den meisten Fällen, wo nicht die alleräusserste Schärfe verlangt wird, als damit zusammenfallend betrachtet werden können, so wie auch da, wo die grösste Genauigkeit gefordert wird, die Abweichung vom grössten Kreise leicht mit aller nöthigen Schärfe durch einfache Formeln sich berechnen lässt. Man kann daher das ganze System, nachdem man zuerst eine Dreiecksseite auf die Kugelfläche gehörig übertragen hat, ganz so, als wenn es auf dieser selbst läge, vermittelst der Winkel berechnen, nöthigenfalls mit der eben angedeuteten Modification, für alle Punkte des Systems die Werthe von T und U bestimmen, und von letztern auf die correspondirenden Werthe von w (am einfachsten vermittelst einer äusserst leicht zu construirenden Hülfstafel) zurückgehen.

*) Wir übergehen hier theils die zweite Auflösung des 5. Artikels, die sich von der obigen nur durch Vertauschung von $-T$ gegen $+T$ unterscheiden und einer verkehrten Darstellung entsprechen würde, theils den Fall eines länglichen Ellipsoids, dessen Behandlung nach dem, was im vorigen Art. vorgekommen, sich aus der des abgeplatteten von selbst ergibt.

Insofern ein Dreiecksnetz sich doch immer nur über einen sehr mässigen Theil der Erdoberfläche erstreckt, lässt sich der erwähnte Zweck noch vollkommner erreichen, wenn man die allgemeine Auflösung noch etwas generalisirt, und nicht $f\upsilon = \upsilon$, sondern $f\upsilon = \upsilon + Const.$ annimmt. Offenbar würde hiedurch gar nichts gewonnen, wenn man dieser Constante einen reellen Werth beilegte, weil dadurch lediglich T und t um diese Constante verschieden, also nur die Anfangspunkte der Längen ungleich werden würden. Allein ganz anders verhält es sich, wenn man der Constante einen imaginären Werth beilegt. Setzt man dieselbe $= -i \log k$, so wird

$$T = t, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} U = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w \cdot \left(\frac{1 + \varepsilon \cos w}{1 - \varepsilon \cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}$$

Um hier über den zweckmässigsten Werth von k entscheiden zu können, müssen wir vor allen Dingen das Vergrösserungsverhältniss bestimmen.

Es wird hier, in den Zeichen des 5. und 7. Artikels

$$\begin{aligned} n &= aa \sin u^2 \\ N &= AA \sin U^2 \\ \varphi\upsilon &= 1 \end{aligned}$$

Also

$$m = \frac{A \sin U}{a \sin u} = \frac{A \sin U}{a \sin w} \cdot \sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos w^2)} = \frac{A}{a} \cdot \frac{k (1 - \varepsilon\varepsilon \cos w^2)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon}}{\cos \frac{1}{2} w^2 (1 - \varepsilon \cos w)^{\varepsilon} + kk \sin \frac{1}{2} w^2 (1 + \varepsilon \cos w)^{\varepsilon}}$$

welches Verhältniss also bloss von der Breite abhängt. Die möglich geringste Abweichung von vollkommner Aehnlichkeit erhält man, wenn man k so bestimmt, dass m für die äussersten Breiten gleich grosse Werthe erhält, wodurch von selbst m bei der mittlern Breite seinem grössten oder kleinsten Werthe sehr nahe sein wird. Bezeichnet man die äussersten Werthe von w durch w^0 und w', so erhält man auf diese Weise

$$k = \sqrt{\frac{\dfrac{\cos \frac{1}{2} w^{0\,2} (1 - \varepsilon \cos w^0)^{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos w^{0\,2})^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon}} - \dfrac{\cos \frac{1}{2} w'^2 (1 - \varepsilon \cos w')^{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos w'^2)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon}}}{\dfrac{\sin \frac{1}{2} w'^2 (1 + \varepsilon \cos w')^{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos w'^2)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon}} - \dfrac{\sin \frac{1}{2} w^{0\,2} (1 + \varepsilon \cos w^0)^{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos w^{0\,2})^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon}}}}$$

Um zu erfahren, bei welcher Breite m seinen grössten oder kleinsten Werth erhält, haben wir

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \operatorname{cotang} U.\mathrm{d}u - \operatorname{cotang} w.\mathrm{d}w + \frac{\varepsilon\varepsilon \cos w.\sin w.\mathrm{d}w}{1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\sin U} = \frac{\mathrm{d}w}{\sin w} - \frac{\varepsilon\varepsilon\sin w.\mathrm{d}w}{1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2} = \frac{(1-\varepsilon\varepsilon)\mathrm{d}w}{(1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2)\sin w}$$

und hieraus

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{(1-\varepsilon\varepsilon)\mathrm{d}w}{\sin w(1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2)}.(\cos U - \cos w)$$

Hieraus erhellt, dass m da seinen grössten oder kleinsten Werth erhält, wo $U = w$ wird; bezeichnet man den Werth von w an dieser Stelle durch W, so wird

$$k = \left(\frac{1-\varepsilon\cos W}{1+\varepsilon\cos W}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \quad \text{oder} \quad \cos W = \frac{1-k^{\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon(1+k^{\frac{2}{\varepsilon}})}$$

woraus man W bestimmen kann, wenn k nach der obigen Formel berechnet ist. Für die Ausübung wird inzwischen auf die ganz genaue Gleichheit der Werthe von m an den äussersten Breiten wenig ankommen, und man kann sich begnügen, für $90^0 - W$ ungefähr die mittlere Breite zu wählen, und daraus k abzuleiten. Den allgemeinen Zusammenhang zwischen U und w gibt dann die Formel

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}w\left\{\frac{(1-\varepsilon\cos W)(1+\varepsilon\cos w)}{(1+\varepsilon\cos W)(1-\varepsilon\cos w)}\right\}^{\frac{1}{2}\varepsilon}$$

Zur wirklichen numerischen Berechnung ist es jedoch vortheilhafter, Reihen anzuwenden, denen man verschiedene Formen geben kann, bei deren Entwicklung wir uns aber hier nicht aufhalten.

Da man übrigens leicht sieht, dass für $w < W$, $U > w$, also $\cos U - \cos w$ und mithin auch $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}w}$ negativ; und für $w > W$, $U < w$, mithin $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}w}$ positiv wird, so ist klar, dass für $w = U = W$ der Werth von m allemal ein Minimum wird, und zwar

$$= \frac{A}{a}\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon\cos W^2)}$$

Wählt man also den Halbmesser der Kugel $A = \frac{a}{\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon\cos W^2)}}$, so ist die Darstellung unendlich kleiner Theile des Ellipsoids bei der Breite $90^0 - W$ dem Urbilde nicht bloss ähnlich, sondern gleich, bei andern Breiten aber grösser.

Man kann den Logarithmen von m mit Vortheil in eine nach den Potenzen von $\cos U - \cos W$ fortlaufende Reihe entwickeln, deren erste für die Ausübung zureichende Glieder diese sind

$$\log \text{hyp.}\, m = \log \{\tfrac{A}{a}\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon\cos W^2)}\} + \frac{\varepsilon\varepsilon}{2(1-\varepsilon\varepsilon)}.(\cos U - \cos W)^2$$
$$- \frac{2\varepsilon^4 \cos W}{3(1-\varepsilon\varepsilon)^2}.(\cos U - \cos W)^3 \ldots.$$

Wenn also z. B. die Dänische Monarchie innerhalb der Grenzen der Breite 53^0 und 58^0 auf diese Weise auf die Kugelfläche übertragen und $W = 34^0 30'$ gesetzt wird, so wird bei der Abplattung $\frac{1}{303}$ die Darstellung an den Grenzen, linearisch gerechnet, nur um $\frac{1}{330000}$ vergrössert.

Wir müssen uns hier damit begnügen, nur eine kurze Andeutung von *einer* Benutzungsart des Uebertragens der Figuren in der höhern Geodäsie gegeben zu haben, und eine angemessenere Ausführung für einen andern Ort versparen.

14.

Es bleibt uns noch übrig, einen in unsrer allgemeinen Auflösung vorkommenden Umstand hier etwas ausführlicher zu betrachten. Wir haben im 5. Artikel gezeigt, dass allemal zwei Auflösungen statt finden, indem entweder $P+iQ$ einer Function von $p+iq$, und $P-iQ$ einer Function von $p-iq$ gleich werden muss; oder $P+iQ$ einer Function von $p-iq$, und $P-iQ$ einer Function von $p+iq$. Wir wollen nun noch zeigen, dass allemal bei der einen Auflösung die Theile in der Darstellung zugleich eine ähnliche Lage haben, wie im Dargestellten; bei der andern Auflösung hingegen verkehrt liegen; zugleich wollen wir das Criterium angeben, nach welchem dieses a priori unterschieden werden kann.

Zuvörderst bemerken wir, dass von vollkommner oder verkehrter Aehnlichkeit nur insofern die Rede sein kann, als an jeder der beiden Flächen zwei Seiten unterschieden werden, wovon die eine als die obere, die andere als die untere betrachtet wird. Da dieses an sich etwas willkürliches ist, so sind beide Auflösungen gar nicht wesentlich verschieden, und eine verkehrte Aehnlichkeit wird zur vollkommnen, sobald man bei der einen Fläche die vorher als obere betrachtete Seite zur untern macht. Bei unsrer Auflösung konnte daher diese Unterscheidung gar nicht vorkommen, da die Flächen bloss durch die Coordinaten ihrer Punkte bestimmt wurden. Will man auf diesen Unterschied eingehen, so muss zuvor die Natur der Flächen auf eine andere Art festgelegt werden, welche ihn mit in sich fasst. Zu diesem Zweck wollen wir annehmen, dass die Natur der ersten Fläche durch die Gleichung $\psi = 0$ bestimmt werde, wo ψ eine gegebne einförmige Function von x, y, z ist. In allen Punkten der Fläche wird also der

Werth von ψ verschwinden, und in allen Punkten des Raumes, welche der Fläche nicht angehören, wird er nicht verschwinden. Bei einem Durchgange durch die Fläche wird also, wenigstens allgemein zu reden, der Werth von ψ aus dem Positiven ins Negative, bei dem entgegengesetzten aus dem Negativen ins Positive übergehen, oder auf der einen Seite der Fläche wird der Werth von ψ positiv, auf der andern negativ sein: die erstere wollen wir als die obere, die andere als die untere betrachten. Ganz eben so soll es bei der zweiten Fläche gehalten werden, indem ihre Natur durch die Gleichung $\Psi = 0$ bestimmt wird, wo Ψ eine gegebne einförmige Function der Coordinaten X, Y, Z ist. Es gebe ferner die Differentiation

$$\begin{aligned} d\psi &= e\,dx + g\,dy + h\,dz \\ d\Psi &= E\,dX + G\,dY + H\,dZ \end{aligned}$$

wo e, g, h Functionen von x, y, z und E, G, H Functionen von X, Y, Z sein werden.

Da die Betrachtungen, durch welche wir zu dem vorgesetzten Ziele gelangen müssen, obwohl an sich nicht schwierig, doch etwas ungewöhnlicher Art sind, so wollen wir uns bemühen, ihnen die grösste Klarheit zu geben. Wir wollen zwischen den beiden einander entsprechenden Darstellungen auf den Flächen, deren Gleichungen $\psi = 0$ und $\Psi = 0$ sind, sechs Zwischen-Darstellungen in der Ebne annehmen, so dass acht verschiedene Darstellungen in Betracht kommen, nemlich

		indem als correspondirend betrachtet werden die Punkte, deren Coordinaten resp. =
1^s	das Urbild in der Fläche, deren Gleichung $\psi = 0$ . .	x, y, z
2^s	Darstellung in der Ebne	x, y, 0
3^s	„ „ „ „	t, u, 0
4^s	„ „ „ „	p, q, 0
5^s	„ „ „ „	P, Q, 0
6^s	„ „ „ „	T, U, 0
7^s	„ „ „ „	X, Y, 0
8^s	Abbildung in der Fläche, deren Gleichung $\Psi = 0$ . .	X, Y, Z

Wir wollen nun diese verschiednen Darstellungen unter einander lediglich in Beziehung auf die gegenseitige *Lage* der unendlich kleinen Linearelemente ver-

gleichen, indem wir das Grössenverhältniss ganz bei Seite setzen; als ähnlichliegend werden also zwei Darstellungen betrachtet, wenn von zwei aus Einem Punkte ausgehenden Linearelementen dem in der einen Darstellung rechts liegenden auch in der andern das rechts liegende entspricht; im entgegengesetzten Falle werden sie verkehrtliegende heissen. Bei der Ebne, von Nro. 2—7 wird immer die Seite, wo die positiven Werthe der dritten Coordinate liegen, als die obere betrachtet; bei der ersten und letzten Fläche hingegen ist die Unterscheidung der obern und untern Seite bloss von dem positiven oder negativen Werthe von ψ und Ψ abhängig, wie schon oben festgesetzt ist.

Hier ist nun zuvörderst klar, dass für jede Stelle der ersten Fläche, wo man bei ungeändertem x und y durch ein positives Increment von z auf deren obere Seite kommt, die Darstellung in 2 mit der in 1 ähnlichliegend sein wird; dies wird also offenbar überall zutreffen, wo h positiv ist; und das Gegentheil wird bei einem negativen h eintreten, wo die Darstellungen verkehrt liegend sein werden.

Auf dieselbe Weise werden die Darstellungen in 7 und 8 ähnlich liegend oder verkehrt liegend sein, jenachdem H positiv oder negativ ist.

Um die Darstellungen in 2 und 3 unter sich zu vergleichen, sei in der erstern $\mathrm{d}s$ die Länge einer unendlich kleinen Linie von dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, zu einem andern, dessen Coordinaten $x+\mathrm{d}x$, $y+\mathrm{d}y$ sind, und l dessen Neigung gegen die Abscissenlinie wachsend in dem Sinn, in welchem man von der Axe der x zu der Axe der y übergeht, also

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}s.\cos l, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}s.\sin l$$

In der Darstellung 3 sei $\mathrm{d}\sigma$ die Grösse der Linie, welche der $\mathrm{d}s$ entspricht, und ihre Neigung zur Abscissenlinie, wie vorhin verstanden, λ, so dass

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}\sigma.\cos\lambda, \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}\sigma.\sin\lambda$$

Man hat also, in den Bezeichnungen des 4. Artikels

$$\mathrm{d}s.\cos l = \mathrm{d}\sigma(a\cos\lambda + a'\sin\lambda)$$
$$\mathrm{d}s.\sin l = \mathrm{d}\sigma(b\cos\lambda + b'\sin\lambda)$$

folglich

$$\operatorname{tang} l = \frac{b\cos\lambda + b'\sin\lambda}{a\cos\lambda + a'\sin\lambda}$$

Betrachtet man nun x und y als constant, und l, λ als veränderlich, so gibt die Differentiation

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{ab'-ba'}{(a\cos\lambda+a'\sin\lambda)^2+(b\cos\lambda+b'\sin\lambda)^2} = (ab'-ba').\frac{\mathrm{d}\sigma^2}{\mathrm{d}s^2}$$

Man sieht also, dass jenachdem $ab'-ba'$ positiv *oder* negativ ist, l und λ immer zugleich wachsen, *oder* sich entgegengesetzt ändern, und also im erstern Fall die Darstellungen 2 und 3 ähnlich liegend, im andern verkehrt liegend sind.

Aus der Verbindung dieses Resultats mit dem vorhingefundenen ergibt sich, dass die Darstellungen in 1 und 3 ähnlich liegend oder verkehrt liegend sind, je nachdem $\frac{ab'-ba'}{h}$ positiv oder negativ ist.

Da auf der Fläche, deren Gleichung $\psi = 0$ ist,

$$e\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y+h\mathrm{d}z = 0$$

also auch

$$(ea+gb+hc)\mathrm{d}t+(ea'+gb'+hc')\mathrm{d}u = 0$$

wird, wie auch immer das Verhältniss von $\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}u$ gewählt wird, so muss offenbar identisch

$$ea+gb+hc = 0, \quad ea'+gb'+hc' = 0$$

werden, woraus folgt, dass e, g, h resp. den Grössen $bc'-cb'$, $ca'-ac'$, $ab'-ba'$ proportional sind, also

$$\frac{bc'-cb'}{e} = \frac{ca'-ac'}{g} = \frac{ab'-ba'}{h}$$

Man kann also, welchen dieser drei Ausdrücke man will, oder wenn man mit der ihrer Natur nach positiven Grösse $ee+gg+hh$ multiplicirt, die sich ergebende symmetrische Grösse

$$ebc'+gca'+hab'-ecb'-gac'-hba'$$

als Criterium der ähnlichen oder verkehrten Lage der Theile in den Darstellungen 1 und 3 anwenden.

Ganz eben so wird ähnliche oder verkehrte Lage der Theile in den Darstellungen 6 und 8 von dem positiven oder negativen Werthe der Grösse

$$\frac{BC'-CB'}{E} = \frac{CA'-AC'}{G} = \frac{AB'-BA'}{H}$$

oder wenn man lieber will, der symmetrischen

$$EBC'+GCA'+HAB'-ECB'-GAC'-HBA'$$

abhangen.

Die Vergleichung der Darstellungen in 3 und 4 beruhet auf ganz ähnlichen Gründen, wie die von 2 und 3, und die ähnliche oder verkehrte Lage der Theile hängt von dem positiven oder negativen Zeichen der Grösse

$$\left(\frac{dp}{dt}\right).\left(\frac{dq}{du}\right)-\left(\frac{dp}{du}\right).\left(\frac{dq}{dt}\right)$$

ab; und eben so bestimmt das positive oder negative Zeichen von

$$\left(\frac{dP}{dT}\right).\left(\frac{dQ}{dU}\right)-\left(\frac{dP}{dU}\right).\left(\frac{dQ}{dT}\right)$$

die ähnliche oder verkehrte Lage der Theile in den Darstellungen 5 und 6.

Was endlich die Vergleichung der Darstellungen 4 und 5 unter sich betrifft, so können wir uns auf die Analyse des 8. Artikels beziehen, aus welcher erhellet, dass jene in den kleinsten Theilen ähnlich, oder verkehrt liegend sind, je nachdem man die erste oder zweite Auflösung gewählt, d. i. entweder

$$P+iQ=f(p+iq) \quad \text{und} \quad P-iQ=f'(p-iq)$$

oder

$$P+iQ=f(p-iq) \quad \text{und} \quad P-iQ=f'(p+iq)$$

gesetzt hat.

Aus diesem allen ziehen wir nunmehro den Schluss, dass man, wenn die Darstellung auf der Fläche, deren Gleichung $\Psi=0$ ist, dem Urbilde auf der Fläche, deren Gleichung $\psi=0$ ist, in den kleinsten Theilen nicht bloss ähnlich, sondern auch ähnlich liegend sein soll, auf die Anzahl der negativen Grössen, welche unter diesen vier Grössen vorkommen,

$$\frac{ab'-ba'}{h}, \quad \left(\frac{dp}{dt}\right).\left(\frac{dq}{du}\right)-\left(\frac{dp}{du}\right).\left(\frac{dq}{dt}\right), \quad \left(\frac{dP}{dT}\right).\left(\frac{dQ}{dU}\right)-\left(\frac{dP}{dU}\right).\left(\frac{dQ}{dT}\right), \quad \frac{AB'-BA'}{H}$$

Rücksicht nehmen muss; ist gar keine oder eine gerade Anzahl darunter, so wird die erste; ist eine oder drei negative unter ihnen, so wird die zweite Auflösung gewählt werden müssen. Bei entgegengesetzter Wahl findet allemal eine verkehrte Aehnlichkeit Statt.

Uebrigens lässt sich noch zeigen, dass, wenn obige vier Grössen resp. mit r, s, S, R bezeichnet werden, allemal

$$\frac{r\sqrt{(ee+gg+hh)}}{s} = \pm n, \quad \frac{R\sqrt{(EE+GG+HH)}}{S} = \pm N$$

wird, n und N in der Bedeutung des 5. Art. genommen; wir übergehen jedoch hier den nicht schwer zu findenden Beweis dieses Theorems, da dieses für unsern Zweck nicht weiter nöthig ist.

[*Randbemerkungen in* GAUSS *Handexemplar:*]

[Art. 10 neben der letzten Gleichung zur Bestimmung von λ] oder $\lambda = \cos u^*$, wenn für $u = u^*$ der Minimalwerth [des Vergrösserungsverhältnisses] Statt finden soll.

[Art. 12 neben der Gleichung, durch welche hier im Abdruck die Grösse w eingeführt wird] Das Zeichen ϖ ist gegen meine Absicht im Druck gebraucht: es sollte w sein.

[Art. 13 neben den Gleichungen, die sich auf die durch die Function $fv = v - i\log k$ bestimmte Abbildung beziehen, sind die entsprechenden Gleichungen für die Function $fv = \alpha v - i\log k$ verzeichnet, welche später in der ersten Abhandlung der Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie aufgenommen wurden.]

DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE OBLATAE D. VIII. OCTOBR. MDCCCXXVII.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VI.
Gottingae MDCCCXXVIII.

DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA SUPERFICIES CURVAS.

1.

Disquisitiones, in quibus de directionibus variarum rectarum in spatio agitur, plerumque ad maius perspicuitatis et simplicitatis fastigium evehuntur, in auxilium vocando superficiem sphaericam radio $= 1$ circa centrum arbitrarium descriptam, cuius singula puncta repraesentare censebuntur directiones rectarum radiis ad illa terminatis parallelarum. Dum situs omnium punctorum in spatio per tres coordinatas determinatur, puta per distantias a tribus planis fixis inter se normalibus, ante omnia considerandae veniunt directiones axium his planis normalium: puncta superficiei sphaericae, quae has directiones repraesentant, per (1), (2), (3) denotabimus; mutua igitur horum distantia erit quadrans. Ceterum axium directiones versus eas partes acceptas supponemus, versus quas coordinatae respondentes crescunt.

2.

Haud inutile erit, quasdam propositiones, quae in huiusmodi quaestionibus usum frequentem offerunt, hic in conspectum producere.

I. Angulus inter duas rectas se secantes mensuratur per arcum inter puncta, quae in superficie sphaerica illarum directionibus respondent.

II. Situs cuiuslibet plani repraesentari potest per circulum maximum in superficie sphaerica, cuius planum illi est parallelum.

36*

III. Angulus inter duo plana aequalis est angulo sphaerico inter circulos maximos illa repraesentantes, et proin etiam per arcum inter horum circulorum maximorum polos interceptum mensuratur. Et perinde inclinatio rectae ad planum mensuratur per arcum, a puncto, quod respondet directioni rectae, ad circulum maximum, qui plani situm repraesentat, normaliter ductum.

IV. Denotantibus x, y, z; x', y', z' coordinatas duorum punctorum, r eorundem distantiam, atque L punctum, quod in superficie sphaerica repraesentat directionem rectae a puncto priore ad posterius ductae, erit

$$x' = x + r\cos(1)L, \quad y' = y + r\cos(2)L, \quad z' = z + r\cos(3)L$$

V. Hinc facile sequitur, haberi generaliter

$$\cos(1)L^2 + \cos(2)L^2 + \cos(3)L^2 = 1$$

nec non, denotante L' quodcunque aliud punctum superficiei sphaericae, esse

$$\cos(1)L.\cos(1)L' + \cos(2)L.\cos(2)L' + \cos(3)L.\cos(3)L' = \cos LL'$$

VI. Theorema. *Denotantibus L, L', L'', L''' quatuor puncta in superficie sphaerae, atque A angulum, quem arcus LL', $L''L'''$ in puncto concursus sui formant, erit*

$$\cos LL''.\cos L'L''' - \cos LL'''.\cos L'L'' = \sin LL'.\sin L''L'''.\cos A$$

Dem. Denotet litera A insuper punctum concursus ipsum, statuaturque

$$AL = t, \quad AL' = t', \quad AL'' = t'', \quad AL''' = t'''$$

Habemus itaque:

$$\begin{aligned}
\cos LL'' &= \cos t\cos t'' + \sin t\sin t''\cos A\\
\cos L'L''' &= \cos t'\cos t''' + \sin t'\sin t'''\cos A\\
\cos LL''' &= \cos t\cos t''' + \sin t\sin t'''\cos A\\
\cos L'L'' &= \cos t'\cos t'' + \sin t'\sin t''\cos A
\end{aligned}$$

et proin

$$\begin{aligned}
&\cos LL''.\cos L'L''' - \cos LL'''.\cos L'L''\\
&= \cos A(\cos t\cos t''\sin t'\sin t''' + \cos t'\cos t'''\sin t\sin t''\\
&\qquad - \cos t\cos t'''\sin t'\sin t'' - \cos t'\cos t''\sin t\sin t''')\\
&= \cos A(\cos t\sin t' - \sin t\cos t')(\cos t''\sin t''' - \sin t''\cos t''')\\
&= \cos A.\sin(t'-t).\sin(t'''-t'')\\
&= \cos A.\sin LL'.\sin L''L'''
\end{aligned}$$

Ceterum quum inde a puncto A bini rami utriusque circuli maximi proficiscantur, duo quidem ibi anguli formantur, quorum alter alterius complementum ad 180^0: sed analysis nostra monstrat, eos ramos adoptandos esse, quorum directiones cum sensu progressionis a puncto L ad L', et a puncto L'' ad L''' consentiunt: quibus intellectis simul patet, quum circuli maximi duobus punctis concurrant, arbitrarium esse, utrum eligatur. Loco anguli A etiam arcus inter polos circulorum maximorum, quorum partes sunt arcus LL', $L''L'''$, adhiberi potest: manifesto autem polos tales accipere oportet, qui respectu horum arcuum similiter iacent, puta vel uterque polus ad dextram iacens, dum a L versus L' atque ab L'' versus L''' procedimus, vel uterque ad laevam.

VII. Sint L, L', L'' tria puncta in superficie sphaerica, statuamusque brevitatis caussa

$$\begin{array}{lll} \cos(1)L = x, & \cos(2)L = y, & \cos(3)L = z \\ \cos(1)L' = x', & \cos(2)L' = y', & \cos(3)L' = z' \\ \cos(1)L'' = x'', & \cos(2)L'' = y'', & \cos(3)L'' = z'' \end{array}$$

nec non

$$xy'z''+x'y''z+x''yz'-xy''z'-x'yz''-x''y'z = \Delta$$

Designet λ polum circuli maximi, cuius pars est arcus LL', et quidem eum, qui respectu huius arcus similiter iacet, ac punctum (1) respectu arcus (2)(3). Tunc erit, ex theoremate praecedente, $yz'-y'z = \cos(1)\lambda . \sin(2)(3) . \sin LL'$, sive, propter $(2)(3) = 90^0$,

$$\begin{aligned} yz'-y'z &= \cos(1)\lambda . \sin LL', \text{ et perinde} \\ zx'-z'x &= \cos(2)\lambda . \sin LL' \\ xy'-x'y &= \cos(3)\lambda . \sin LL' \end{aligned}$$

Multiplicando has aequationes resp. per x'', y'', z'' et addendo, obtinemus adiumento theorematis secundi in V prolati

$$\Delta = \cos\lambda L'' . \sin LL'$$

Iam tres casus sunt distinguendi. *Primo*, quoties L'' iacet in eodem circulo maximo, cuius pars est arcus LL', erit $\lambda L'' = 90^0$, adeoque $\Delta = 0$. Quoties vero L'' iacet extra circulum illum maximum, aderit casus *secundus*, si est ab eadem parte, a qua est λ, *tertius*, si ab opposita: in his casibus puncta L, L', L''

formabunt triangulum sphaericum, et quidem iacebunt in casu secundo eodem ordine quo puncta (1), (2), (3), in casu tertio vero ordine opposito. Denotando angulos illius trianguli simpliciter per L, L', L'', atque perpendiculum in superficie sphaerica a puncto L'' ad latus LL' ductum per p, erit

$$\sin p = \sin L . \sin LL'' = \sin L' . \sin L'L'', \quad \text{atque} \quad \lambda L'' = 90^0 \mp p$$

valente signo superiori pro casu secundo, inferiori pro tertio. Hinc itaque colligimus

$$\pm \Delta = \sin L . \sin LL' . \sin LL'' = \sin L' . \sin LL' . \sin L'L'' = \sin L'' . \sin LL'' . \sin L'L''$$

Ceterum manifesto casus primus in secundo vel tertio comprehendi censeri potest, nulloque negotio perspicitur, $\pm \Delta$ exhibere sextuplum soliditatis pyramidis inter puncta L, L', L'' atque centrum sphaerae formatae. Denique hinc facillime colligitur, eandem expressionem $\pm \frac{1}{6} \Delta$ generaliter exprimere soliditatem cuiusvis pyramidis inter initium coordinatarum atque puncta quorum coordinatae sunt x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'', contentae.

3.

Superficies curva apud punctum A in ipsa situm curvatura continua gaudere dicitur, si directiones omnium rectarum ab A ad omnia puncta superficiei ab A infinite parum distantia ductarum infinite parum ab uno eodemque plano per A transiente deflectuntur: hoc planum superficiem curvam in puncto A *tangere* dicitur. Quodsi huic conditioni in aliquo puncto satisfieri nequit, continuitas curvaturae hic interrumpitur, uti e. g. evenit in cuspide coni. Disquisitiones praesentes ad tales superficies curvas, vel ad tales superficiei partes, restringentur, in quibus continuitas curvaturae nullibi interrumpitur. Hic tantummodo observamus, methodos, quae positioni plani tangentis determinandae inserviunt, pro punctis singularibus, in quibus continuitas curvaturae interrumpitur, vim suam perdere, et ad indeterminata perducere debere.

4.

Situs plani tangentis commodissime e situ rectae ipsi in puncto A normalis cognoscitur, quae etiam ipsi superficiei curvae normalis dicitur. Directionem huius normalis per punctum L in superficie sphaerae auxiliaris repraesentabimus, atque statuemus

$$\cos(1)L = X, \quad \cos(2)L = Y, \quad \cos(3)L = Z$$

coordinatas puncti A per x, y, z denotamus. Sint porro $x + dx, y + dy, z + dz$ coordinatae alius puncti in superficie curva A'; ds ipsius distantia infinite parva ab A; denique λ punctum superficiei sphaericae repraesentans directionem elementi AA'. Erit itaque

$$dx = ds.\cos(1)\lambda, \quad dy = ds.\cos(2)\lambda, \quad dz = ds.\cos(3)\lambda$$

et, quum esse debeat $\lambda L = 90^0$,

$$X\cos(1)\lambda + Y\cos(2)\lambda + Z\cos(3)\lambda = 0$$

E combinatione harum aequationum derivamus

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

Duae habentur methodi generales ad exhibendam indolem superficiei curvae. Methodus *prima* utitur aequatione inter coordinatas x, y, z, quam reductam esse supponemus ad formam $W = 0$, ubi W erit functio indeterminatarum x, y, z. Sit differentiale completum functionis W

$$dW = Pdx + Qdy + Rdz$$

eritque in superficie curva

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

et proin

$$P\cos(1)\lambda + Q\cos(2)\lambda + R\cos(3)\lambda = 0$$

Quum haec aequatio, perinde ut ea quam supra stabilivimus, valere debeat pro directionibus omnium elementorum ds in superficie curva, facile perspiciemus, X, Y, Z proportionales esse debere ipsis P, Q, R et proin, quum fiat

$$XX + YY + ZZ = 1$$

erit vel

$$X = \frac{P}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}}, \quad Y = \frac{Q}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}}, \quad Z = \frac{R}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}}$$

vel

$$X = \frac{-P}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}}, \quad Y = \frac{-Q}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}}, \quad Z = \frac{-R}{\sqrt{(PP + QQ + RR)}}$$

Methodus *secunda* sistit coordinatas in forma functionum duarum variabilium p, q. Supponamus per differentiationem harum functionum prodire

$$\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}p + a'\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}y = b\,\mathrm{d}p + b'\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}z = c\,\mathrm{d}p + c'\mathrm{d}q$$

quibus valoribus in formula supra data substitutis, obtinemus

$$(aX + bY + cZ)\mathrm{d}p + (a'X + b'Y + c'Z)\mathrm{d}q = 0$$

Quum haec aequatio locum habere debeat independenter a valoribus differentialium $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, manifesto esse debebit

$$aX + bY + cZ = 0, \quad a'X + b'Y + c'Z = 0$$

unde colligimus, X, Y, Z proportionales esse debere quantitatibus

$$bc' - cb', \quad ca' - ac', \quad ab' - ba'$$

Statuendo itaque brevitatis caussa

$$\sqrt{((bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2)} = \Delta$$

erit vel

$$X = \frac{bc' - cb'}{\Delta}, \quad Y = \frac{ca' - ac'}{\Delta}, \quad Z = \frac{ab' - ba'}{\Delta}$$

vel

$$X = \frac{cb' - bc'}{\Delta}, \quad Y = \frac{ac' - ca'}{\Delta}, \quad Z = \frac{ba' - ab'}{\Delta}$$

His duabus methodis generalibus accedit *tertia*, ubi una coordinatarum, e. g. z exhibetur in forma functionis reliquarum x, y: haec methodus manifesto nihil aliud est, nisi casus specialis vel methodi primae, vel secundae. Quodsi hic statuitur

$$\mathrm{d}z = t\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y$$

erit vel

$$X = \frac{-t}{\sqrt{(1 + tt + uu)}}, \quad Y = \frac{-u}{\sqrt{(1 + tt + uu)}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{(1 + tt + uu)}}$$

vel

$$X = \frac{t}{\sqrt{(1 + tt + uu)}}, \quad Y = \frac{u}{\sqrt{(1 + tt + uu)}}, \quad Z = \frac{-1}{\sqrt{(1 + tt + uu)}}$$

5.

Duae solutiones in art. praec. inventae manifesto ad puncta superficiei sphaericae opposita, sive ad directiones oppositas referuntur, quod cum rei natura quadrat, quum normalem ad utramvis plagam superficiei curvae ducere liceat. Quodsi duas plagas, superficiei contiguas, inter se distinguere, alteramque exteriorem alteram interiorem vocare placet, etiam utrique normali suam solutionem rite tribuere licebit adiumento theorematis in art. 2 (VII) evoluti, simulatque criterium stabilitum est ad plagam alteram ab altera distinguendam.

In methodo prima tale criterium petendum erit a signo valoris quantitatis W. Scilicet generaliter loquendo superficies curva eas spatii partes, in quibus W valorem positivum obtinet, ab iis dirimet, in quibus valor ipsius W fit negativus. E theoremate illo vero facile colligitur, si W valorem positivum obtineat versus plagam exteriorem, normalisque extrorsum ducta concipiatur, solutionem priorem adoptandam esse. Ceterum in quovis casu facile diiudicabitur, utrum per superficiem integram eadem regula respectu signi ipsius W valeat, an pro diversis partibus diversae: quamdiu coëfficientes P, Q, R valores finitos habent, nec simul omnes tres evanescunt, lex continuitatis vicissitudinem vetabit.

Si methodum secundam sequimur, in superficie curva duo systemata linearum curvarum concipere possumus, alterum, pro quo p est variabilis, q constans; alterum, pro quo q variabilis, p constans: situs mutuus harum linearum respectu plagae exterioris decidere debet, utram solutionem adoptare oporteat. Scilicet quoties tres lineae, puta ramus lineae prioris systematis a puncto A proficiscens crescente p, ramus posterioris systematis a puncto A egrediens crescente q, atque normalis versus plagam exteriorem ducta *similiter* iacent, ut, inde ab origine abscissarum, axes ipsarum x, y, z resp. (e. g. si tum e tribus lineis illis, tum e tribus his, prima sinistrorsum, secunda dextrorsum, tertia sursum directa concipi potest), solutio prima adoptari debet; quoties autem situs mutuus trium linearum oppositus est situi mutuo axium ipsarum x, y, z, solutio secunda valebit.

In methodo tertia dispiciendum est, utrum, dum z incrementum positivum accipit, manentibus x et y invariatis, transitus fiat versus plagam exteriorem an interiorem. In casu priore, pro normali extrorsum directa, solutio prima valet, in posteriore secunda.

6.

Sicuti, per translatam directionem normalis in superficiem curvam ad superficiem sphaerae, cuius puncto determinato prioris superficiei respondet punctum determinatum in posteriore, ita etiam quaevis linea, vel quaevis figura in illa repraesentabitur per lineam vel figuram correspondentem in hac. In comparatione duarum figurarum hoc modo sibi mutuo correspondentium, quarum altera quasi imago alterius erit, duo momenta sunt respicienda, alterum, quatenus sola quantitas consideratur, alterum, quatenus abstrahendo a relationibus quantitativis solum situm contemplamur.

Momentum primum basis erit quarundam notionum, quas in doctrinam de superficiebus curvis recipere utile videtur. Scilicet cuilibet parti superficiei curvae limitibus determinatis cinctae *curvaturam totalem* seu *integram* adscribemus, quae per aream figurae illi in superficie sphaerica respondentem exprimetur. Ab hac curvatura integra probe distinguenda est curvatura quasi specifica, quam nos *mensuram curvaturae* vocabimus: haec posterior ad *punctum* superficiei refertur, et denotabit quotientem qui oritur, dum curvatura integra elementi superficialis puncto adiacentis per aream ipsius elementi dividitur, et proin indicat rationem arearum infinite parvarum in superficie curva et in superficie sphaerica sibi mutuo respondentium. Utilitas harum innovationum per ea, quae in posterum a nobis explicabuntur, abunde, ut speramus, sancietur. Quod vero attinet ad terminologiam, imprimis prospiciendum esse duximus, ut omnis ambiguitas arceatur, quapropter haud congruum putavimus, analogiam terminologiae in doctrina de lineis curvis planis vulgo receptam (etsi non omnibus probatam) stricte sequi, secundum quam mensura curvaturae simpliciter audire debuisset curvatura, curvatura integra autem amplitudo. Sed quidni in verbis faciles esse liceret, dummodo res non sint inanes, neque dictio interpretationi erroneae obnoxia?

Situs figurae in superficie sphaerica vel similis esse potest situi figurae respondentis in superficie curva, vel oppositus (inversus); casus prior locum habet, ubi binae lineae in superficie curva ab eodem puncto directionibus inaequalibus sed non oppositis proficiscentes repraesentantur in superficie sphaerica per lineas similiter iacentes, puta ubi imago lineae ad dextram iacentis ipsa est ad dextram; casus posterior, ubi contrarium valet. Hos duos casus per *signum* mensurae curvaturae vel positivum vel negativum distinguemus. Sed manifesto haec distinctio eatenus tantum locum habere potest, quatenus in utraque superficie pla-

gam determinatam eligimus, in qua figura concipi debet. In sphaera auxiliari semper plagam exteriorem, a centro aversam, adhibebimus: in superficie curva etiam plaga exterior sive quae tamquam exterior consideratur, adoptari potest, vel potius plaga eadem, a qua normalis erecta concipitur; manifesto enim respectu similitudinis figurarum nihil mutatur, si in superficie curva tum figura ad plagam oppositam transfertur, tum normalis, dummodo ipsius imago semper in eadem plaga superficiei sphaericae depingatur.

Signum positivum vel negativum, quod pro situ figurae infinite parvae *mensurae* curvaturae adscribimus, etiam ad curvaturam integram figurae finitae in superficie curva extendimus. Attamen si argumentum omni generalitate amplecti suscipimus, quaedam dilucidationes requiruntur, quas hic breviter tantum attingemus. Quamdiu figura in superficie curva ita comparata est, ut singulis punctis intra ipsam puncta *diversa* in superficie sphaerica respondeant, definitio ulteriore explicatione non indiget. Quoties autem conditio ista locum non habet, necesse erit, quasdam partes figurae in superficie sphaerica bis vel pluries in computum ducere, unde, pro situ simili vel opposito, vel accumulatio vel destructio oriri poterit. Simplicissimum erit in tali casu, figuram in superficie curva in partes tales divisam concipere, quae singulae per se spectatae conditioni illi satisfaciant, singulis tribuere curvaturam suam integram, quantitate per aream figurae in superficie sphaerica respondentis, signo per situm determinatis, ac denique figurae toti adscribere curvaturam integram ortam per additionem curvaturarum integrarum, quae singulis partibus respondent. Generaliter itaque curvatura integra figurae est $= \int k \, d\sigma$, denotante $d\sigma$ elementum areae figurae, k mensuram curvaturae in quovis puncto. Quod vero attinet ad repraesentationem geometricam huius integralis, praecipua huius rei momenta ad sequentia redeunt. Peripheriae figurae in superficie curva (sub restrictione art. 3) semper respondebit in superficie sphaerica linea in se ipsam rediens. Quae si se ipsam nullibi intersecat, totam superficiem sphaericam in duas partes dirimet, quarum altera respondebit figurae in superficie curva, et cuius area, positive vel negative accipienda, prout respectu peripheriae suae similiter iacet ut figura in superficie curva respectu suae, vel inverse, exhibebit posterioris curvaturam integram. Quoties vero linea ista se ipsam semel vel pluries secat, exhibebit figuram complicatam, cui tamen area certa aeque legitime tribui potest, ac figuris absque nodis, haecque area, rite intellecta, semper valorem iustum curvaturae integrae exhibebit. Attamen uberio-

rem huius argumenti de figuris generalissime conceptis expositionem ad aliam occasionem nobis reservare debemus.

7.

Investigemus iam formulam ad exprimendam mensuram curvaturae pro quovis puncto superficiei curvae. Denotante $d\sigma$ aream elementi huius superficiei, $Zd\sigma$ erit area proiectionis huius elementi in planum coordinatarum x, y; et perinde, si $d\Sigma$ est area elementi respondentis in superficie sphaerica, erit $Zd\Sigma$ area proiectionis ad idem planum: signum positivum vel negativum ipsius Z vero indicabit situm proiectionis similem vel oppositum situi elementi proiecti: manifesto itaque illae proiectiones eandem rationem quoad quantitatem, simulque eandem relationem quoad situm, inter se tenent, ut elementa ipsa. Consideremus iam elementum triangulare in superficie curva, supponamusque coordinatas trium punctorum, quae formant ipsius proiectionem, esse

$$\begin{array}{ll} x, & y \\ x+dx, & y+dy \\ x+\delta x, & y+\delta y \end{array}$$

Duplex area huius trianguli exprimetur per formulam

$$dx.\delta y - dy.\delta x$$

et quidem in forma positiva vel negativa, prout situs lateris a puncto primo ad tertium respectu lateris a puncto primo ad secundum similis vel oppositus est situi axis coordinatarum y respectu axis coordinatarum x.

Perinde si coordinatae trium punctorum, quae formant proiectionem elementi respondentis in superficie sphaerica, a centro sphaerae inchoatae, sunt

$$\begin{array}{ll} X, & Y \\ X+dX, & Y+dY \\ X+\delta X, & Y+\delta Y \end{array}$$

duplex area huius proiectionis exprimetur per

$$dX.\delta Y - dY.\delta X$$

de cuius expressionis signo eadem valent quae supra. Quocirca mensura curva-

turae in hoc loco superficiei curvae erit

$$k = \frac{\mathrm{d}X.\delta Y - \mathrm{d}Y.\delta X}{\mathrm{d}x.\delta y - \mathrm{d}y.\delta x}$$

Quodsi iam supponimus, indolem superficiei curvae datam esse secundum modum tertium in art. 4 consideratum, habebuntur X et Y in forma functionum quantitatum x, y, unde erit

$$\mathrm{d}X = (\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x})\mathrm{d}x + (\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y})\mathrm{d}y$$
$$\delta X = (\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x})\delta x + (\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y})\delta y$$
$$\mathrm{d}Y = (\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x})\mathrm{d}x + (\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y})\mathrm{d}y$$
$$\delta Y = (\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x})\delta x + (\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y})\delta y$$

Substitutis his valoribus, expressio praecedens transit in hanc:

$$k = (\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x})(\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}) - (\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y})(\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x})$$

Statuendo ut supra

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = t, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = u$$

atque insuper

$$\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} = T, \quad \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y} = U, \quad \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2} = V$$

sive

$$\mathrm{d}t = T\mathrm{d}x + U\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}u = U\mathrm{d}x + V\mathrm{d}y$$

habemus ex formulis supra datis

$$X = -tZ, \quad Y = -uZ, \quad (1+tt+uu)ZZ = 1$$

atque hinc

$$\mathrm{d}X = -Z\mathrm{d}t - t\mathrm{d}Z$$
$$\mathrm{d}Y = -Z\mathrm{d}u - u\mathrm{d}Z$$
$$(1+tt+uu)\mathrm{d}Z + Z(t\mathrm{d}t + u\mathrm{d}u) = 0$$

sive

$$\mathrm{d}Z = -Z^3(t\mathrm{d}t + u\mathrm{d}u)$$
$$\mathrm{d}X = -Z^3(1+uu)\mathrm{d}t + Z^3 tu\mathrm{d}u$$
$$\mathrm{d}Y = +Z^3 tu\mathrm{d}t - Z^3(1+tt)\mathrm{d}u$$

adeoque

$$\frac{dX}{dx} = Z^3(-(1+uu)T+tuU)$$
$$\frac{dX}{dy} = Z^3(-(1+uu)U+tuV)$$
$$\frac{dY}{dx} = Z^3(tuT-(1+tt)U)$$
$$\frac{dY}{dy} = Z^3(tuU-(1+tt)V)$$

quibus valoribus in expressione praecedente substitutis, prodit

$$k = Z^6(TV-UU)(1+tt+uu) = Z^4(TV-UU) = \frac{TV-UU}{(1+tt+uu)^2}$$

8.

Per idoneam electionem initii et axium coordinatarum facile effici potest, ut pro puncto determinato A valores quantitatum t, u, U evanescant. Scilicet duae priores conditiones iam adimplentur, si planum tangens in hoc puncto pro plano coordinatarum x, y adoptatur. Quarum initium si insuper in puncto A ipso collocatur, manifesto expressio coordinatarum z adipiscitur formam talem

$$z = \tfrac{1}{2}T^0xx + U^0xy + \tfrac{1}{2}V^0yy + \Omega$$

ubi Ω erit ordinis altioris quam secundi. Mutando dein situm axium ipsarum x, y angulo M tali ut habeatur

$$\operatorname{tang} 2M = \frac{2U^0}{T^0 - V^0}$$

facile perspicitur, prodituram esse aequationem huius formae

$$z = \tfrac{1}{2}Txx + \tfrac{1}{2}Vyy + \Omega$$

quo pacto etiam tertiae conditioni satisfactum est. Quibus ita factis, patet

I. Si superficies curva secetur plano ipsi normali et per axem coordinatarum x transeunte, oriri curvam planam, cuius radius curvaturae in puncto A fiat $= \frac{1}{T}$, signo positivo vel negativo indicante concavitatem vel convexitatem versus plagam eam, versus quam coordinatae z sunt positivae.

II. Simili modo $\frac{1}{V}$ erit in puncto A radius curvaturae curvae planae, quae oritur per sectionem superficiei curvae cum plano per axes ipsarum y, z transeunte.

III. Statuendo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, fit

$$z = \tfrac{1}{2}(T\cos\varphi^2 + V\sin\varphi^2)rr + \Omega$$

unde colligitur, si sectio fiat per planum superficiei in A normale et cum axe ipsarum x angulum φ efficiens, oriri curvam planam, cuius radius curvaturae in puncto A sit

$$= \frac{1}{T\cos\varphi^2 + V\sin\varphi^2}$$

IV. Quoties itaque habetur $T = V$, radii curvaturae in *cunctis* planis normalibus aequales erunt. Si vero T et V sunt inaequales, manifestum est, quum $T\cos\varphi^2 + V\sin\varphi^2$ pro quovis valore anguli φ cadat intra T et V, radios curvaturae in sectionibus principalibus, in I et II consideratis, referri ad curvaturas extremas, puta alterum ad curvaturam maximam, alterum ad minimam, si T et V eodem signo affectae sint, contra alterum ad maximam convexitatem, alterum ad maximam concavitatem, si T et V signis oppositis gaudeant. Hae conclusiones omnia fere continent, quae ill. Euler de curvatura superficierum curvarum primus docuit.

V. Mensura curvaturae superficiei curvae in puncto A autem nanciscitur expressionem simplicissimam $k = TV$, unde habemus

Theorema. *Mensura curvaturae in quovis superficiei puncto aequalis est fractioni, cuius numerator unitas, denominator autem productum duorum radiorum curvaturae extremorum in sectionibus per plana normalia.*

Simul patet, mensuram curvaturae fieri positivam pro superficiebus concavo-concavis vel convexo-convexis (quod discrimen non est essentiale), negativam vero pro concavo-convexis. Si superficies constat e partibus utriusque generis, in earum confiniis mensura curvaturae evanescens esse debebit. De indole superficierum curvarum talium, in quibus mensura curvaturae ubique evanescit, infra pluribus agetur.

9.

Formula generalis pro mensura curvaturae in fine art. 7 proposita, omnium simplicissima est, quippe quae quinque tantum elementa implicat; ad magis complicatam, scilicet novem elementa involventem, deferimur, si adhibere volumus

modum primum indolem superficiei curvae exprimendi. Retinendo notationes art. 4 insuper statuemus:

$$\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x^2} = P', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}y^2} = Q', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}z^2} = R'$$
$$\frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}y.\mathrm{d}z} = P'', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}z} = Q'', \quad \frac{\mathrm{dd}W}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y} = R''$$

ita ut fiat

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P &= P'\mathrm{d}x + R''\mathrm{d}y + Q''\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}Q &= R''\mathrm{d}x + Q'\mathrm{d}y + P''\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}R &= Q''\mathrm{d}x + P''\mathrm{d}y + R'\mathrm{d}z \end{aligned}$$

Iam quum habeatur $t = -\frac{P}{R}$, invenimus per differentiationem

$$RR\mathrm{d}t = -R\mathrm{d}P + P\mathrm{d}R = (PQ'' - RP')\mathrm{d}x + (PP'' - RR'')\mathrm{d}y + (PR' - RQ'')\mathrm{d}z$$

sive, eliminata $\mathrm{d}z$ adiumento aequationis $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$.

$$R^3\mathrm{d}t = (-RRP' + 2PRQ'' - PPR')\mathrm{d}x + (PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR'')\mathrm{d}y$$

Prorsus simili modo obtinemus

$$R^3\mathrm{d}u = (PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR'')\mathrm{d}x + (-RRQ' + 2QRP'' - QQR')\mathrm{d}y$$

Hinc itaque colligimus

$$\begin{aligned} R^3 T &= -RRP' + 2PRQ'' - PPR' \\ R^3 U &= \quad PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR'' \\ R^3 V &= -RRQ' + 2QRP'' - QQR' \end{aligned}$$

Substituendo hos valores in formula art. 7, obtinemus pro mensura curvaturae k expressionem symmetricam sequentem:

$$\begin{aligned} &(PP + QQ + RR)^2 k \\ &\quad = PP(Q'R' - P''P'') + QQ(P'R' - Q''Q'') + RR(P'Q' - R''R'') \\ &\qquad + 2QR(Q''R'' - P'P'') + 2PR(P''R'' - Q'Q'') + 2PQ(P''Q'' - R'R'') \end{aligned}$$

10.

Formulam adhuc magis complicatam, puta e quindecim elementis conflatam, obtinemus, si methodum generalem secundam, indolem superficierum

curvarum exprimendi, sequimur. Magni tamen momenti est, hanc quoque elaborare. Retinendo signa art. 4, insuper statuemus

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p^2} = \alpha, \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p.\mathrm{d}q} = \alpha', \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}q^2} = \alpha''$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p^2} = \beta, \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p.\mathrm{d}q} = \beta', \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}q^2} = \beta''$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p^2} = \gamma, \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p.\mathrm{d}q} = \gamma', \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}q^2} = \gamma''$$

Praeterea brevitatis caussa faciemus

$$bc' - cb' = A$$
$$ca' - ac' = B$$
$$ab' - ba' = C$$

Primo observamus, haberi $A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z = 0$, sive $\mathrm{d}z = -\frac{A}{C}\mathrm{d}x - \frac{B}{C}\mathrm{d}y$; quatenus itaque z spectatur tamquam functio ipsarum x, y, fit

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = t = -\frac{A}{C}$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = u = -\frac{B}{C}$$

Porro deducimus, ex $\mathrm{d}x = a\mathrm{d}p + a'\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}y = b\mathrm{d}p + b'\mathrm{d}q$,

$$C\mathrm{d}p = b'\mathrm{d}x - a'\mathrm{d}y$$
$$C\mathrm{d}q = -b\mathrm{d}x + a\mathrm{d}y$$

Hinc obtinemus differentialia completa ipsarum t, u

$$C^3\mathrm{d}t = \left(A\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p} - C\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p}\right)(b'\mathrm{d}x - a'\mathrm{d}y) + \left(C\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}q} - A\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q}\right)(b\mathrm{d}x - a\mathrm{d}y)$$
$$C^3\mathrm{d}u = \left(B\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p} - C\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}p}\right)(b'\mathrm{d}x - a'\mathrm{d}y) + \left(C\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q} - B\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q}\right)(b\mathrm{d}x - a\mathrm{d}y)$$

Iam si in his formulis substituimus

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = c'\beta + b\gamma' - c\beta' - b'\gamma$$
$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}q} = c'\beta' + b\gamma'' - c\beta'' - b'\gamma'$$
$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}p} = a'\gamma + c\alpha' - a\gamma' - c'\alpha$$
$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q} = a'\gamma' + c\alpha'' - a\gamma'' - c'\alpha'$$
$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p} = b'\alpha + a\beta' - b\alpha' - a'\beta$$
$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q} = b'\alpha' + a\beta'' - b\alpha'' - a'\beta'$$

atque perpendimus, valores differentialium dt, du sic prodeuntium, aequales esse debere, independenter a differentialibus dx, dy, quantitatibus $Tdx + Udy$, $Udx + Vdy$ resp. inveniemus, post quasdam transformationes satis obvias:

$$\begin{aligned}
C^3 T = {} & \alpha A b'b' + \beta B b'b' + \gamma C b'b' \\
& - 2\alpha' A b b' - 2\beta' B b b' - 2\gamma' C b b' \\
& + \alpha'' A b b + \beta'' B b b + \gamma'' C b b \\
C^3 U = {} & - \alpha A a'b' - \beta B a'b' - \gamma C a'b' \\
& + \alpha' A (ab' + ba') + \beta' B (ab' + ba') + \gamma' C (ab' + ba') \\
& - \alpha'' A a b - \beta'' B a b - \gamma'' C a b \\
C^3 V = {} & \alpha A a'a' + \beta B a'a' + \gamma C a'a' \\
& - 2\alpha' A a a' - 2\beta' B a a' - 2\gamma' C a a' \\
& + \alpha'' A a a + \beta'' B a a + \gamma'' C a a
\end{aligned}$$

Si itaque brevitatis caussa statuimus

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = D \quad \ldots \ldots \quad (1)$$
$$A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D' \quad \ldots \ldots \quad (2)$$
$$A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D'' \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

fit

$$\begin{aligned}
C^3 T &= D b'b' - 2 D' b b' + D'' b b \\
C^3 U &= - D a'b' + D'(ab' + ba') - D'' a b \\
C^3 V &= D a'a' - 2 D' a a' + D'' a a
\end{aligned}$$

Hinc invenimus, evolutione facta,

$$C^6 (TV - UU) = (DD'' - D'D')(ab' - ba')^2 = (DD'' - D'D')CC$$

et proin formulam pro mensura curvaturae

$$k = \frac{DD'' - D'D'}{(AA + BB + CC)^2}$$

11.

Formulae modo inventae iam aliam superstruemus, quae inter fertilissima theoremata in doctrina de superficiebus curvis referenda est. Introducamus sequentes notationes:

$$\begin{aligned}
aa + bb + cc &= E\\
aa' + bb' + cc' &= F\\
a'a' + b'b' + c'c' &= G\\
a\alpha + b\beta + c\gamma &= m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)\\
a\alpha' + b\beta' + c\gamma' &= m' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)\\
a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' &= m'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)\\
a'\alpha + b'\beta + c'\gamma &= n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)\\
a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' &= n' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)\\
a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' &= n'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)\\
AA + BB + CC &= EG - FF = \Delta
\end{aligned}$$

Eliminemus ex aequationibus 1, 4, 7, quantitates β, γ, quod fit multiplicando illas per $bc' - cb'$, $b'C - c'B$, $cB - bC$, et addendo: ita oritur

$$\begin{aligned}
&(A(bc' - cb') + a(b'C - c'B) + a'(cB - bC))\alpha\\
&= D(bc' - cb') + m(b'C - c'B) + n(cB - bC)
\end{aligned}$$

quam aequationem facile transformamus in hanc:

$$AD = \alpha\Delta + a(nF - mG) + a'(mF - nE)$$

Simili modo eliminatio quantitatum α, γ vel α, β ex iisdem aequationibus suppeditat

$$\begin{aligned}
BD &= \beta\Delta + b(nF - mG) + b'(mF - nE)\\
CD &= \gamma\Delta + c(nF - mG) + c'(mF - nE)
\end{aligned}$$

Multiplicando has tres aequationes per α'', β'', γ'' et addendo obtinemus

$$DD'' = (\alpha\beta'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\Delta + m''(nF - mG) + n''(mF - nE) \quad \ldots . (10)$$

Si perinde tractamus aequationes 2, 5, 8, prodit

$$\begin{aligned}
AD' &= \alpha'\Delta + a(n'F - m'G) + a'(m'F - n'E)\\
BD' &= \beta'\Delta + b(n'F - m'G) + b'(m'F - n'E)\\
CD' &= \gamma'\Delta + c(n'F - m'G) + c'(m'F - n'E)
\end{aligned}$$

quibus aequationibus per α', β', γ' multiplicatis, additio suppeditat:

$$D'D' = (\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma')\Delta + m'(n'F - m'G) + n'(m'F - n'E)$$

Combinatio huius aequationis cum aequatione (10) producit

$$DD'' - D'D' = (\alpha\alpha'' + 6 6'' + \gamma\gamma'' - \alpha'\alpha' - 6'6' - \gamma'\gamma')\Delta$$
$$+ E(n'n' - nn'') + F(nm'' - 2m'n' + mn'') + G(m'm' - mm'')$$

Iam patet esse

$$\frac{dE}{dp} = 2m, \quad \frac{dE}{dq} = 2m', \quad \frac{dF}{dp} = m' + n, \quad \frac{dF}{dq} = m'' + n', \quad \frac{dG}{dp} = 2n', \quad \frac{dG}{dq} = 2n''$$

sive

$$m = \tfrac{1}{2}\frac{dE}{dp}, \qquad m' = \tfrac{1}{2}\frac{dE}{dq}, \qquad m'' = \frac{dF}{dq} - \tfrac{1}{2}\frac{dG}{dp}$$
$$n = \frac{dF}{dp} - \tfrac{1}{2}\frac{dE}{dq}, \qquad n' = \tfrac{1}{2}\frac{dG}{dp}, \qquad n'' = \tfrac{1}{2}\frac{dG}{dq}$$

Porro facile confirmatur, haberi

$$\alpha\alpha'' + 6 6'' + \gamma\gamma'' - \alpha'\alpha' - 6'6' - \gamma'\gamma' = \frac{dn}{dq} - \frac{dn'}{dp} = \frac{dm''}{dp} - \frac{dm'}{dq}$$
$$= -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{ddE}{dq^2} + \frac{ddF}{dp \,.\, dq} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{ddG}{dp^2}$$

Quodsi iam has expressiones diversas in formula pro mensura curvaturae in fine art. praec. eruta substituimus, pervenimus ad formulam sequentem, e solis quantitatibus F, F, G atque earum quotientibus differentialibus primi et secundi ordinis concinnatam:

$$4(EG - FF)^2 k = E\left(\frac{dE}{dq} \cdot \frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp} \cdot \frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right)$$
$$+ F\left(\frac{dE}{dp} \cdot \frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq} \cdot \frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq} \cdot \frac{dF}{dq} + 4\frac{dF}{dp} \cdot \frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp} \cdot \frac{dG}{dp}\right)$$
$$+ G\left(\frac{dE}{dp} \cdot \frac{dG}{dp} - 2 \cdot \frac{dE}{dp} \cdot \frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right)$$
$$- 2(EG - FF)\left(\frac{ddE}{dq^2} - 2\frac{ddF}{dp \,.\, dq} + \frac{ddG}{dp^2}\right)$$

12.

Quum indefinite habeatur

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E dp^2 + 2F dp \,.\, dq + G dq^2$$

patet, $\sqrt{(E dp^2 + 2F dp \,.\, dq + G dq^2)}$ esse expressionem generalem elementi linearis in superficie curva. Docet itaque analysis in art. praec. explicata, ad inveniendam mensuram curvaturae haud opus esse formulis finitis, quae coordina-

tas x, y, z tamquam functiones indeterminatarum p, q exhibeant, sed sufficere expressionem generalem pro magnitudine cuiusvis elementi linearis. Progrediamur ad aliquot applicationes huius gravissimi theorematis.

Supponamus, superficiem nostram curvam explicari posse in aliam superficiem, curvam seu planam, ita ut cuivis puncto prioris superficiei per coordinatas x, y, z determinato respondeat punctum determinatum superficiei posterioris, cuius coordinatae sint x', y', z'. Manifesto itaque x', y', z' quoque considerari possunt tamquam functiones indeterminatarum p, q, unde pro elemento $\sqrt{(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)}$ prodibit expressio talis

$$\sqrt{(E'dp^2 + 2F'dp.dq + G'dq^2)}$$

denotantibus etiam E', F', G' functiones ipsarum p, q. At per ipsam notionem *explicationis* superficiei in superficiem patet, elementa in utraque superficie correspondentia necessario aequalia esse, adeoque identice fieri

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'$$

Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium

Theorema. *Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*

Manifesto quoque *quaevis pars finita superficiei curvae post explicationem in aliam superficiem eandem curvaturam integram retinebit.*

Casum specialem, ad quem geometrae hactenus investigationes suas restrinxerunt, sistunt superficies in planum explicabiles. Theoria nostra sponte docet, talium superficierum mensuram curvaturae in quovis puncto fieri $= 0$, quocirca, si earum indoles secundum modum tertium exprimitur, ubique erit

$$\frac{ddz}{dx^2} \cdot \frac{ddz}{dy^2} - \left(\frac{ddz}{dx.dy}\right)^2 = 0$$

quod criterium, dudum quidem notum, plerumque nostro saltem iudicio haud eo rigore qui desiderari posset demonstratur.

13.

Quae in art. praec. exposuimus, cohaerent cum modo peculiari superficies considerandi, summopere digno, qui a geometris diligenter excolatur. Scilicet quatenus superficies consideratur non tamquam limes solidi, sed tamquam soli-

dum, cuius dimensio una pro evanescente habetur, flexile quidem, sed non extensibile, qualitates superficiei partim a forma pendent, in quam illa reducta concipitur, partim absolutae sunt, atque invariatae manent, in quamcunque formam illa flectatur. Ad has posteriores, quarum investigatio campum geometriae novum fertilemque aperit, referendae sunt mensura curvaturae atque curvatura integra eo sensu, quo hae expressiones a nobis accipiuntur; porro huc pertinet doctrina de lineis brevissimis, pluraque alia, de quibus in posterum agere nobis reservamus. In hoc considerationis modo superficies plana atque superficies in planum explicabilis, e. g. cylindrica, conica etc. tamquam essentialiter identicae spectantur, modusque genuinus indolem superficiei ita consideratae generaliter exprimendi semper innititur formulae $\sqrt{(E\mathrm{d}p^2+2F\mathrm{d}p.\mathrm{d}q+G\mathrm{d}q^2)}$, quae nexum elementi cum duabus indeterminatis p, q sistit. Sed antequam hoc argumentum ulterius prosequamur, principia theoriae linearum brevissimarum in superficie curva data praemittere oportet.

14.

Indoles lineae curvae in spatio generaliter ita datur, ut coordinatae x, y, z singulis illius punctis respondentes exhibeantur in forma functionum unius variabilis, quam per w denotabimus. Longitudo talis lineae a puncto initiali arbitrario usque ad punctum, cuius coordinatae sunt x, y, z, exprimitur per integrale

$$\int \mathrm{d}w.\sqrt{\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}w}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^2\right)}$$

Si supponimus, situm lineae curvae variationem infinite parvam pati, ita ut coordinatae singulorum punctorum accipiant variationes δx, δy, δz, variatio totius longitudinis invenitur

$$=\int\frac{\mathrm{d}x.\mathrm{d}\delta x+\mathrm{d}y.\mathrm{d}\delta y+\mathrm{d}z.\mathrm{d}\delta z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}$$

quam expressionem in hanc formam transmutamus:

$$\frac{\mathrm{d}x.\delta x+\mathrm{d}y.\delta y+\mathrm{d}z.\delta z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}$$
$$-\int\left(\delta x.\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}+\delta y.\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}+\delta z.\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}\right)$$

In casu eo, ubi linea est brevissima inter puncta sua extrema, constat, ea, quae hic sub signo integrali sunt, evanescere debere. Quatenus linea esse debet in su-

perficie data, cuius indoles exprimitur per aequationem $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$, etiam variationes $\delta x, \delta y, \delta z$ satisfacere debent aequationi $P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0$, unde per principia nota facile colligitur, differentialia

$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}, \quad \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}, \quad \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}$$

resp. quantitatibus P, Q, R proportionalia esse debere. Iam sit $\mathrm{d}r$ elementum lineae curvae, λ punctum in superficie sphaerica repraesentans directionem huius elementi, L punctum in superficie sphaerica repraesentans directionem normalis in superficiem curvam; denique sint ξ, η, ζ coordinatae puncti λ, atque X, Y, Z coordinatae puncti L respectu centri sphaerae. Ita erit

$$\mathrm{d}x = \xi\mathrm{d}r, \quad \mathrm{d}y = \eta\mathrm{d}r, \quad \mathrm{d}z = \zeta\mathrm{d}r$$

unde colligimus, differentialia illa fieri $\mathrm{d}\xi, \mathrm{d}\eta, \mathrm{d}\zeta$. Et quum quantitates P, Q, R proportionales sint ipsis X, Y, Z, character lineae brevissimae consistit in aequationibus

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{X} = \frac{\mathrm{d}\eta}{Y} = \frac{\mathrm{d}\zeta}{Z}$$

Ceterum facile perspicitur, $\sqrt{(\mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\zeta^2)}$ aequari arculo in superficie sphaerica, qui mensurat angulum inter directiones tangentium in initio et fine elementi $\mathrm{d}r$, adeoque esse $= \frac{\mathrm{d}r}{\rho}$, si ρ denotet radium curvaturae in hoc loco curvae brevissimae; ita fiet

$$\rho\mathrm{d}\xi = X\mathrm{d}r, \quad \rho\mathrm{d}\eta = Y\mathrm{d}r, \quad \rho\mathrm{d}\zeta = Z\mathrm{d}r$$

15.

Supponamus, in superficie curva a puncto dato A proficisci innumeras curvas brevissimas, quas inter se distinguemus per angulum, quem constituit singularum elementum primum cum elemento primo unius ex his lineis pro prima assumtae: sit φ ille angulus, vel generalius functio illius anguli, nec non r longitudo talis lineae brevissimae a puncto A usque ad punctum, cuius coordinatae sunt x, y, z. Quum itaque valoribus determinatis variabilium r, φ respondeant puncta determinata superficiei, coordinatae x, y, z considerari possunt tamquam functiones ipsarum r, φ. Notationes $\lambda, L, \xi, \eta, \zeta, X, Y, Z$ in eadem significa-

tione retinebimus, in qua in art. praec. acceptae fuerunt, modo indefinite ad punctum indefinitum cuiuslibet linearum brevissimarum referantur.

Lineae brevissimae omnes, quae sunt aequalis longitudinis r, terminabuntur ad aliam lineam, cuius longitudinem ab initio arbitrario numeratam denotamus per v. Considerari poterit itaque v tamquam functio indeterminatarum r, φ, et si per λ' designamus punctum in superficie sphaerica respondens directioni elementi $\mathrm{d}v$, nec non per ξ', η', ζ' coordinatas huius puncti respectu centri sphaerae, habebimus:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = \xi'.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} = \eta'.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} = \zeta'.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}$$

Hinc et ex

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} = \xi, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} = \eta, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \zeta$$

sequitur

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta').\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = \cos\lambda\lambda'.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi}$$

Membrum primum huius aequationis, quod etiam erit functio ipsarum r, φ, per S denotamus; cuius differentiatio secundum r suppeditat:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} &= \frac{\mathrm{dd}x}{\mathrm{d}r^2}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}r^2}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}r^2}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} + \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)^2\right)}{\mathrm{d}\varphi}\\ &= \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}r}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} + \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}(\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta)}{\mathrm{d}\varphi}\end{aligned}$$

Sed $\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta = 1$, adeoque ipsius differentiale $= 0$; et per art. praec. habemus, si etiam hic ρ denotat radium curvaturae in linea r,

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}r} = \frac{X}{\rho}, \quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}r} = \frac{Y}{\rho}, \quad \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r} = \frac{Z}{\rho}$$

Ita obtinemus

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{\rho}.(X\xi' + Y\eta' + Z\zeta').\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{\rho}.\cos L\lambda'.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = 0$$

quoniam manifesto λ' iacet in circulo maximo, cuius polus L. Hinc itaque concludimus, S independentem esse ab r et proin functionem solius φ. At pro $r = 0$ manifesto fit $v = 0$, et proin etiam $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varphi} = 0$, nec non $S = 0$, independenter a φ. Necessario itaque generaliter esse debebit $S = 0$, adeoque $\cos\lambda\lambda' = 0$, i. e. $\lambda\lambda' = 90^0$. Hinc colligimus

Theorema. *Ductis in superficie curva ab eodem puncto initiali innumeris lineis brevissimis aequalis longitudinis, linea earum extremitates iungens ad illas singulas erit normalis.*

Operae pretium esse duximus, hoc theorema e proprietate fundamentali linearum brevissimarum deducere: ceterum eius veritas etiam absque calculo per sequens ratiocinium intelligi potest. Sint AB, AB' duae lineae brevissimae eiusdem longitudinis, angulum infinite parvum ad A includentes, supponamusque, alterutrum angulorum elementi BB' cum lineis BA, $B'A$ differre quantitate finita ab angulo recto, unde per legem continuitatis alter maior alter minor erit angulo recto. Supponamus, angulum ad B esse $= 90^0 - \omega$, capiamusque in linea BA punctum C, ita ut sit $BC = BB'.\operatorname{cosec}\omega$: hinc quum triangulum infinite parvum $BB'C$ tamquam planum tractare liceat, erit $CB' = BC.\cos\omega$, et proin

$$AC + CB' = AC + BC.\cos\omega = AB - BC.(1-\cos\omega) = AB' - BC(1-\cos\omega)$$

i.e. transitus a puncto A ad B' per punctum C brevior linea brevissima. Q.E.A.

16.

Theorematì art. praec. associamus aliud, quod ita enunciamus. *Si in superficie curva concipitur linea qualiscunque, a cuius punctis singulis proficiscantur sub angulis rectis et versus eandem plagam innumerae lineae brevissimae aequalis longitudinis, curva, quae earum extremitates alteras iungit, illas singulas sub angulis rectis secabit.* Ad demonstrationem nihil in analysi praecedente mutandum est, nisi quod φ designare debet longitudinem curvae *datae* inde a puncto arbitrario numeratam, aut si mavis functionem huius longitudinis; ita omnia ratiocinia etiamnum valebunt, ea modificatione, quod veritas aequationis $S = 0$ pro $r = 0$ nunc iam in ipsa hypothesi implicatur. Ceterum hoc alterum theorema generalius est praecedente, quod adeo in illo comprehendi censeri potest, dum pro linea data adoptamus circulum infinite parvum circa centrum A descriptum. Denique monemus, hic quoque considerationes geometricas analyseos vice fungi posse, quibus tamen, quum satis obviae sint, hic non immoramur.

17.

Revertimur ad formulam $\sqrt{(E\,dp^2 + 2F\,dp.dq + G\,dq^2)}$, quae indefinite

magnitudinem elementi linearis in superficie curva exprimit, atque ante omnia significationem geometricam coëfficientium E, F, G examinamus. Iam in art. 5 monuimus, in superficie curva concipi posse duo systemata linearum, alterum, in quibus singulis sola p sit variabilis, q constans; alterum, in quibus sola q variabilis, p constans. Quodlibet punctum superficiei considerari potest tamquam intersectio lineae primi systematis cum linea secundi: tuncque elementum lineae primae huic puncto adiacens et variationi $\mathrm{d}p$ respondens erit $= \sqrt{E}.\mathrm{d}p$, nec non elementum lineae secundae respondens variationi $\mathrm{d}q$ erit $= \sqrt{G}.\mathrm{d}q$; denique denotando per ω angulum inter haec elementa, facile perspicitur, fieri $\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$. Area autem elementi parallelogrammatici in superficie curva inter duas lineas primi systematis, quibus respondent q, $q+\mathrm{d}q$, atque duas lineas systematis secundi, quibus respondent p, $p+\mathrm{d}p$, erit $\sqrt{(EG-FF)}\mathrm{d}p.\mathrm{d}q$.

Linea quaecunque in superficie curva ad neutrum illorum systematum pertinens, oritur, dum p et q concipiuntur esse functiones unius variabilis novae, vel altera illarum functio alterius. Sit s longitudo talis curvae ab initio arbitrario numerata et versus directionem utramvis pro positiva habita. Denotemus per θ angulum, quem efficit elementum $\mathrm{d}s = \sqrt{(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)}$ cum linea primi systematis per initium elementi ducta, et quidem ne ulla ambiguitas remaneat, hunc angulum semper ab eo ramo illius lineae, in quo valores ipsius p crescunt, inchoari, et versus eam plagam positive accipi supponemus, versus quam valores ipsius q crescunt. His ita intellectis facile perspicitur haberi

$$\cos\theta.\mathrm{d}s = \sqrt{E}.\mathrm{d}p + \sqrt{G}.\cos\omega.\mathrm{d}q = \frac{E\mathrm{d}p + F\mathrm{d}q}{\sqrt{E}}$$

$$\sin\theta.\mathrm{d}s = \sqrt{G}.\sin\omega.\mathrm{d}q = \frac{\sqrt{(EG-FF)}.\mathrm{d}q}{\sqrt{E}}$$

18.

Investigabimus nunc, quaenam sit conditio, ut haec linea sit brevissima. Quum ipsius longitudo s expressa sit per integrale

$$s = \int\sqrt{(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)}$$

conditio minimi requirit, ut variatio huius integralis a mutatione infinite parva tractus lineae oriunda fiat $= 0$. Calculus ad propositum nostrum in hoc casu commodius absolvitur, si p tamquam functionem ipsius q consideramus. Quo

pacto, si variatio per characteristicam δ denotatur, habemus

$$\delta s = \int \frac{(\frac{dE}{dp}.dp^2 + \frac{2dF}{dp}.dp.dq + \frac{dG}{dp}dq^2)\delta p + (2Edp + 2Fdq)d\delta p}{2ds}$$

$$= \frac{Edp + Fdq}{ds}.\delta p + \int \delta p.\{\frac{\frac{dE}{dp}.dp^2 + \frac{2dF}{dp}.dp.dq + \frac{dG}{dp}.dq^2}{2ds} - d.\frac{Edp+Fdq}{ds}\}$$

constatque, quae hic sunt sub signo integrali, independenter a δp evanescere debere. Fit itaque

$$\frac{dE}{dp}.dp^2 + \frac{2dF}{dp}.dp.dq + \frac{dG}{dp}.dq^2 = 2ds.d.\frac{Edp+Fdq}{ds}$$

$$= 2ds.d.\sqrt{E}.\cos\theta = \frac{ds.dE.\cos\theta}{\sqrt{E}} - 2ds.d\theta.\sqrt{E}.\sin\theta$$

$$= \frac{(Edp+Fdq)dE}{E} - \sqrt{(EG-FF)}.dq.d\theta$$

$$= (\frac{Edp+Fdq}{E}).(\frac{dE}{dp}.dp + \frac{dE}{dq}.dq) - 2\sqrt{(EG-FF)}.dq.d\theta$$

Hinc itaque nanciscimur aequationem conditionalem pro linea brevissima sequentem:

$$\sqrt{(EG-FF)}.d\theta = \tfrac{1}{2}\frac{F}{E}.\frac{dE}{dp}.dp + \tfrac{1}{2}.\frac{F}{E}.\frac{dE}{dq}.dq + \tfrac{1}{2}.\frac{dE}{dq}.dp - \frac{dF}{dp}.dp - \tfrac{1}{2}.\frac{dG}{dp}.dq$$

quam etiam ita scribere licet

$$\sqrt{(EG-FF)}.d\theta = \tfrac{1}{2}\frac{F}{E}.dE + \tfrac{1}{2}.\frac{dE}{dq}.dp - \frac{dF}{dp}.dp - \tfrac{1}{2}.\frac{dG}{dp}.dq$$

Ceterum adiumento aequationis

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{E}{\sqrt{(EG-FF)}}.\frac{dp}{dq} + \frac{F}{\sqrt{(EG-FF)}}$$

ex illa aequatione angulus θ eliminari, atque sic aequatio differentio-differentialis inter p et q evolvi potest, quae tamen magis complicata et ad applicationes minus utilis evaderet, quam praecedens.

19.

Formulae generales, quas pro mensura curvaturae et pro variatione directionis lineae brevissimae in artt. 11, 18 eruimus, multo simpliciores fiunt, si quantitates p, q ita sunt electae, ut lineae primi systematis lineas secundi systematis ubique orthogonaliter secent, i. e. ut generaliter habeatur $\omega = 90^0$, sive $F = 0$. Tunc scilicet fit, pro mensura curvaturae,

$$4EEGGk = E.\frac{dE}{dq}.\frac{dG}{dq} + E(\frac{dG}{dp})^2 + G.\frac{dE}{dp}.\frac{dG}{dp} + G(\frac{dE}{dq})^2 - 2EG(\frac{ddE}{dq^2} + \frac{ddG}{dp^2})$$

et pro variatione anguli θ

$$\sqrt{EG}.d\theta = \tfrac{1}{2}.\frac{dE}{dq}.dp - \tfrac{1}{2}.\frac{dG}{dp}.dq$$

Inter varios casus, in quibus haec conditio orthogonalitatis valet, primarium locum tenet is, ubi lineae omnes alterutrius systematis, e. g. primi, sunt lineae brevissimae. Hic itaque pro valore constante ipsius q, angulus θ fit $= 0$, unde aequatio pro variatione anguli θ modo tradita docet, fieri debere $\frac{dE}{dq} = 0$, sive coëfficientem E a q independentem, i. e. E esse debet vel constans vel functio solius p. Simplicissimum erit, pro p adoptare longitudinem ipsam cuiusque lineae primi systematis, et quidem, quoties omnes lineae primi systematis in uno puncto concurrunt, ab hoc puncto numeratam, vel, si communis intersectio non adest, a qualibet linea secundi systematis. Quibus ita intellectis patet, p et q iam eadem denotare, quae in artt. 15, 16 per r et φ expresseramus, atque fieri $E = 1$. Ita duae formulae praecedentes iam transeunt in has:

$$4GGk = (\frac{dG}{dp})^2 - 2G\frac{ddG}{dp^2}$$

$$\sqrt{G}.d\theta = -\tfrac{1}{2}.\frac{dG}{dp}.dq$$

vel statuendo $\sqrt{G} = m$,

$$k = -\frac{1}{m}.\frac{ddm}{dp^2}, \qquad d\theta = -\frac{dm}{dp}.dq$$

Generaliter loquendo m erit functio ipsarum p, q atque $m\,dq$ expressio elementi cuiusvis lineae secundi systematis. In casu speciali autem, ubi omnes lineae p ab eodem puncto proficiscuntur, manifesto pro $p = 0$ esse debet $m = 0$; porro si in hoc casu pro q adoptamus angulum ipsum, quem elementum primum cuiusvis lineae primi systematis facit cum elemento alicuius ex ipsis ad arbitrium electae, quum pro valore infinite parvo ipsius p, elementum lineae secundi systematis (quae considerari potest tamquam circulus radio p descriptus), sit $= p\,dq$, erit pro valore infinite parvo ipsius p, $m = p$, adeoque, pro $p = 0$ simul $m = 0$ et $\frac{dm}{dp} = 1$.

20.

Immoremur adhuc eidem suppositioni, puta p designare indefinite longitudinem lineae brevissimae a puncto determinato A ad punctum quodlibet super-

ficiei ductum, atque q angulum, quem primum elementum huius lineae efficit cum elemento primo alicuius lineae brevissimae ex A proficiscentis datae. Sit B punctum determinatum in hac linea pro qua $q = 0$, atque C aliud punctum determinatum superficiei, pro quo valorem ipsius q simpliciter per A designabimus. Supponamus, puncta B, C per lineam brevissimam iuncta, cuius partes, inde a puncto B numeratas, indefinite ut in art. 18 per s denotabimus, nec non perinde ut illic, per θ angulum, quem quodvis elementum $\mathrm{d}s$ facit cum elemento $\mathrm{d}p$: denique sint θ^0, θ' valores anguli θ in punctis B, C. Habemus itaque in superficie curva triangulum lineis brevissimis inclusum, eiusque anguli ad B et C, per has ipsas literas simpliciter designandi aequales erunt ille complemento anguli θ^0 ad 180^0, hic ipsi angulo θ'. Sed quum analysin nostram inspicienti facile pateat, omnes angulos non per gradus sed per numeros expressos concipi, ita ut angulus $57^0 17' 45''$, cui respondet arcus radio aequalis, pro unitate habeatur, statuere oportet, denotando per 2π peripheriam circuli

$$\theta^0 = \pi - B, \qquad \theta' = C$$

Inquiramus nunc in curvaturam integram huius trianguli, quae fit $= \int k\,\mathrm{d}\sigma$, denotante $\mathrm{d}\sigma$ elementum superficiale trianguli; quare quum hoc elementum exprimatur per $m\,\mathrm{d}p.\mathrm{d}q$, eruere oportet integrale $\iint km\,\mathrm{d}p.\mathrm{d}q$ supra totam trianguli superficiem. Incipiamus ab integratione secundum p, quae propter $k = -\frac{1}{m}.\frac{\mathrm{dd}m}{\mathrm{d}p^2}$, suppeditat $\mathrm{d}q.(\mathrm{Const.} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p})$ pro curvatura integra areae iacentis inter lineas primi systematis, quibus respondent valores indeterminatae secundae q, $q + \mathrm{d}q$: quum haec curvatura pro $p = 0$ evanescere debeat, quantitas constans per integrationem introducta aequalis esse debet valori ipsius $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}$ pro $p = 0$, i. e. unitati. Habemus itaque $\mathrm{d}q(1 - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p})$, ubi pro $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}$ accipere oportet valorem respondentem fini illius areae in linea CB. In hac linea vero fit per art. praec. $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q = -\mathrm{d}\theta$, unde expressio nostra mutatur in $\mathrm{d}q + \mathrm{d}\theta$. Accedente iam integratione altera a $q = 0$ usque ad $q = A$ extendenda, obtinemus curvaturam integram trianguli $= A + \theta' - \theta^0 = A + B + C - \pi$.

Curvatura integra aequalis est areae eius partis superficiei sphaericae, quae respondet triangulo, signo positivo vel negativo affectae, prout superficies curva, in qua triangulum iacet, est concavo-concava vel concavo-convexa: pro unitate areae accipiendum est quadratum, cuius latus est unitas (radius sphaerae), quo pacto superficies tota sphaerae fit $= 4\pi$. Est itaque pars superficiei sphaericae

triangulo respondens ad sphaerae superficiem integram ut $\pm(A+B+C-\pi)$ ad 4π. Hoc theorema, quod ni fallimur ad elegantissima in theoria superficierum curvarum referendum esse videtur, etiam sequenti modo enuntiari potest:

Excessus summae angulorum trianguli a lineis brevissimis in superficie curva concavo-concava formati ultra 180^0, *vel defectus summae angulorum trianguli a lineis brevissimis in superficie curva concavo-convexa formati a* 180^0 *mensuratur per aream partis superficiei sphaericae, quae illi triangulo per directiones normalium respondet, si superficies integra* 720 *gradibus aequiparatur.*

Generalius in quovis polygono n laterum, quae singula formantur per lineas brevissimas, excessus summae angulorum supra $2n-4$ rectos, vel defectus a $2n-4$ rectis (pro indole curvaturae superficiei), aequatur areae polygoni respondentis in superficie sphaerica, dum tota superficies sphaerae 720 gradibus aequiparatur, uti per discerptionem polygoni in triangula e theoremate praecedenti sponte demanat.

21.

Restituamus characteribus p, q, E, F, G, ω significationes generales, quibus supra accepti fuerant, supponamusque, indolem superficiei curvae praeterea alio simili modo per duas alias variabiles p', q' determinari, ubi elementum lineare indefinitum exprimatur per

$$\sqrt{(E'\mathrm{d}p'^2+2F'\mathrm{d}p'.\mathrm{d}q'+G'\mathrm{d}q'^2)}$$

Ita cuivis puncto superficiei per valores determinatos variabilium p, q definito respondebunt valores determinati variabilium p', q', quocirca hae erunt functiones ipsarum p, q, e quarum differentiatione prodire supponemus

$$\mathrm{d}p' = \alpha\mathrm{d}p+\beta\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}q' = \gamma\mathrm{d}p+\delta\mathrm{d}q$$

Iam proponimus nobis investigare significationem geometricam horum coëfficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Quatuor itaque nunc systemata linearum in superficie curva concipi possunt, pro quibus resp. q, p, q', p' sint constantes. Si per punctum determinatum, cui respondent variabilium valores p, q, p', q', quatuor lineas ad singula illa systemata pertinentes ductas supponimus, harum elementa, variationibus positivis

dp, dq, dp', dq', respondentes erunt

$$\sqrt{E}.dp, \quad \sqrt{G}.dq, \quad \sqrt{E'}.dq', \quad \sqrt{G'}.dq'$$

Angulos, quos horum elementorum directiones faciunt cum directione fixa arbitraria, denotabimus per M, N, M', N', numerando eo sensu, quo iacet secunda respectu primae, ita ut $\sin(N-M)$ fiat quantitas positiva: eodem sensu iacere supponemus (quod licet) quartam respectu tertiae, ita ut etiam $\sin(N'-M')$ sit quantitas positiva. His ita intellectis, si consideramus punctum aliud, a priore infinite parum distans, cui respondeant valores variabilium

$$p+dp, \quad q+dq, \quad p'+dp', \quad q'+dq'$$

levi attentione adhibita cognoscemus, fieri generaliter, i. e. independenter a valoribus variationum dp, dq, dp', dq',

$$\sqrt{E}.dp.\sin M+\sqrt{G}.dq.\sin N = \sqrt{E'}.dp'.\sin M'+\sqrt{G'}.dq'.\sin N'$$

quum utraque expressio nihil aliud sit, nisi distantia puncti novi a linea, a qua anguli directionum incipiunt. Sed habemus, per notationem iam supra introductam $N-M=\omega$, et per analogiam statuemus $N'-M'=\omega'$, nec non insuper $N-M'=\psi$. Ita aequatio modo inventa exhiberi potest in forma sequenti

$$\begin{aligned}\sqrt{E}.dp.\sin(M'-\omega+\psi)+\sqrt{G}.dq.\sin(M'+\psi)\\ =\sqrt{E'}.dp'.\sin M'+\sqrt{G'}.dq'.\sin(M'+\omega')\end{aligned}$$

vel ita

$$\begin{aligned}\sqrt{E}.dp.\sin(N'-\omega-\omega'+\psi)+\sqrt{G}.dq.\sin(N'-\omega'+\psi)\\ =\sqrt{E'}.dp'.\sin(N'-\omega')+\sqrt{G'}.dq'.\sin N'\end{aligned}$$

Et quum aequatio manifesto independens esse debeat a directione initiali, hanc ad lubitum accipere licet. Statuendo itaque in forma secunda $N'=0$, vel in prima $M'=0$, obtinemus aequationes sequentes:

$$\begin{aligned}\sqrt{E'}.\sin\omega'.dp' &= \sqrt{E}.\sin(\omega+\omega'-\psi).dp+\sqrt{G}.\sin(\omega'-\psi).dq\\ \sqrt{G'}.\sin\omega'.dq' &= \sqrt{E}.\sin(\psi-\omega).dp+\sqrt{G}.\sin\psi.dq\end{aligned}$$

quae aequationes quum identicae esse debeant cum his

$$\begin{aligned}dp' &= \alpha dp+\beta dq\\ dq' &= \gamma dp+\delta dq\end{aligned}$$

suppeditabunt determinationem coëfficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Erit scilicet

$$\alpha = \sqrt{\frac{E}{E'}} \cdot \frac{\sin(\omega + \omega' - \psi)}{\sin \omega'}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{G}{E'}} \cdot \frac{\sin(\omega' - \psi)}{\sin \omega'}$$
$$\gamma = \sqrt{\frac{E}{G'}} \cdot \frac{\sin(\psi - \omega)}{\sin \omega'}, \qquad \delta = \sqrt{\frac{G}{G'}} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \omega'}$$

Adiungi debent aequationes

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \cos \omega' = \frac{F'}{\sqrt{E'G'}}, \quad \sin \omega = \sqrt{\frac{EG - FF}{EG}}, \quad \sin \omega' = \sqrt{\frac{E'G' - F'F'}{E'G'}}$$

unde quatuor aequationes ita quoque exhiberi possunt

$$\alpha \sqrt{(E'G' - F'F')} = \sqrt{EG'} . \sin(\omega + \omega' - \psi)$$
$$\beta \sqrt{(E'G' - F'F')} = \sqrt{GG'} . \sin(\omega' - \psi)$$
$$\gamma \sqrt{(E'G' - F'F')} = \sqrt{EE'} . \sin(\psi - \omega)$$
$$\delta \sqrt{(E'G' - F'F')} = \sqrt{GE'} . \sin \psi$$

Quum per substitutiones $dp' = \alpha dp + \beta dq$, $dq' = \gamma dp + \delta dq$ trinomium $E'dp'^2 + 2F'dp'.dq' + G'dq'^2$ transire debeat in $Edp^2 + 2Fdp.dq + Gdq^2$, facile obtinemus

$$EG - FF = (E'G' - F'F')(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

et quum vice versa trinomium posterius rursus transire debeat in prius per substitutionem

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)dp = \delta dp' - \beta dq', \quad (\alpha\delta - \beta\gamma)dq = -\gamma dp' + \alpha dq'$$

invenimus

$$E\delta\delta - 2F\gamma\delta + G\gamma\gamma = \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'} . E'$$
$$E\beta\delta - F(\alpha\delta + \beta\gamma) + G\alpha\gamma = -\frac{EG - FF}{E'G' - F'F'} . F'$$
$$E\beta\beta - 2F\alpha\beta + G\alpha\alpha = \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'} . G'$$

22.

A disquisitione generali art. praec. descendimus ad applicationem latissime patentem, ubi, dum p et q etiam significatione generalissima accipiuntur, pro p', q', adoptamus quantitates in art. 15 per r, φ denotatas, quibus characteribus

etiam hic utemur, scilicet ut pro quovis puncto superficiei r sit distantia minima a puncto determinato, atque φ angulus in hoc puncto inter elementum primum ipsius r atque directionem fixam. Ita habemus $E' = 1$, $F' = 0$, $\omega' = 90°$: statuemus insuper $\sqrt{G'} = m$, ita ut elementum lineare quodcunque fiat $= \sqrt{(\mathrm{d}r^2 + mm\,\mathrm{d}\varphi^2)}$. Hinc quatuor aequationes in art. praec. pro α, 6, γ, δ, erutae, suppeditant:

$$\sqrt{E}.\cos(\omega - \psi) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sqrt{G}.\cos\psi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\sqrt{E}.\sin(\psi - \omega) = m.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$\sqrt{G}.\sin\psi = m.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Ultima et penultima vero has

$$EG - FF = E\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\right)^2 - 2F.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} + G\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\left(E.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} - F.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right).\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} = \left(F.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} - G.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right).\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Ex his aequationibus petenda est determinatio quantitatum r, φ, ψ et (si opus videatur) m, per p et q: scilicet integratio aequationis (5) dabit r, qua inventa integratio aequationis (6) dabit φ, atque alterutra aequationum (1), (2) ipsam ψ: denique m habebitur per alterutram aequationum (3), (4).

Integratio generalis aequationum (5), (6) necessario duas functiones arbitrarias introducere debet, quae quid sibi velint facile intelligemus, si perpendimus, illas aequationes ad casum eum quem hic consideramus non limitari, sed perinde valere, si r et φ accipiantur in significatione generaliore art. 16, ita ut sit r longitudo lineae brevissimae ad lineam arbitrariam determinatam normaliter ductae, atque φ functio arbitraria longitudinis eius partis lineae, quae inter lineam brevissimam indefinitam et punctum arbitrarium determinatum intercipitur. Solutio itaque generalis haec omnia indefinite amplecti debet, functionesque arbitrariae tunc demum in definitas abibunt, quando linea illa arbitraria atque functio partium, quam φ exhibere debet, praescriptae sunt. In casu nostro circulus infinite parvus adoptari potest, centrum in eo puncto habens, a quo distantiae r numerantur, et φ denotabit partes huius circuli ipsas per radium divisas,

unde facile colligitur, aequationes (5), (6) pro casu nostro complete sufficere, dummodo ea, quae indefinita relinquunt, ei conditioni accommodentur, ut r et φ pro puncto illo initiali atque punctis ab eo infinite parum distantibus quadrent.

Ceterum quod attinet ad integrationem ipsam aequationum (5), (6), constat, eam reduci posse ad integrationem aequationum differentialium vulgarium, quae tamen plerumque tam intricatae evadunt, ut parum lucri inde redundet. Contra evolutio in series, quae ad usus practicos, quoties de partibus superficiei modicis agitur, abunde sufficiunt, nullis difficultatibus obnoxia est, atque sic formulae allatae fontem uberem aperiunt, ad multa problemata gravissima solvenda. Hoc vero loco exemplum unicum ad methodi indolem monstrandam evolvemus.

23.

Considerabimus casum eum, ubi omnes lineae, pro quibus p constans est, sunt lineae brevissimae orthogonaliter secantes lineam, pro qua $\varphi = 0$, et quam tamquam lineam abscissarum contemplari possumus. Sit A punctum, pro quo $r = 0$, D punctum indefinitum in linea abscissarum, $AD = p$, B punctum indefinitum in linea brevissima ipsi AD in D normali, atque $BD = q$, ita ut p considerari possit tamquam abscissa, q tamquam ordinata puncti B; abscissas positivas assumimus in eo ramo lineae abscissarum, cui respondet $\varphi = 0$, dum r semper tamquam quantitatem positivam spectamus; ordinatas positivas statuimus in plaga ea, ubi φ numeratur inter 0 et 180^0.

Per theorema art. 16 habebimus $\omega = 90^0$, $F = 0$, nec non $G = 1$; statuemus insuper $\sqrt{E} = n$. Erit itaque n functio ipsarum p, q, et quidem talis, quae pro $q = 0$ fieri debet $= 1$. Applicatio formulae in art. 18 allatae ad casum nostrum docet, in *quavis* linea brevissima esse debere $d\theta = -\frac{dn}{dq}.dp$, denotante θ angulum inter elementum huius lineae atque elementum lineae, pro qua q constans: iam quum linea abscissarum ipsa sit brevissima, atque pro ea ubique $\theta = 0$, patet pro $q = 0$ ubique fieri debere $\frac{dn}{dq} = 0$. Hinc igitur colligimus, si n in seriem secundum potestates ipsius q progredientem evolvatur, hanc habere debere formam sequentem

$$n = 1 + fqq + gq^3 + hq^4 + \text{ etc.}$$

ubi f, g, h etc. erunt functiones ipsius p, et quidem statuemus

$$f = f^0 + f'p + f''pp + \text{ etc.}$$
$$g = g^0 + g'p + g''pp + \text{ etc.}$$
$$h = h^0 + h'p + h''pp + \text{ etc.}$$

etc. sive

$$\begin{aligned} n = 1 &+ f^0qq + f'pqq + f''ppqq + \text{ etc.} \\ &+ g^0q^3 + g'pq^3 + \text{ etc.} \\ &+ h^0q^4 + \text{ etc. etc.} \end{aligned}$$

24.

Aequationes art. 22 in casu nostro suppeditant

$$n\sin\psi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}, \quad \cos\psi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}, \quad -n\cos\psi = m.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}, \quad \sin\psi = m.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$
$$nn = nn\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2, \quad nn.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} = 0$$

Adiumento harum aequationum, quarum quinta et sexta iam in reliquis continentur, series evolvi poterunt pro r, φ, ψ, m, vel pro quibuslibet functionibus harum quantitatum, e quibus eas, quae imprimis attentione sunt dignae, hic sistemus.

Quum pro valoribus infinite parvis ipsarum p, q fieri debeat $rr = pp + qq$, series pro rr incipiet a terminis $pp + qq$: terminos altiorum ordinum obtinemus per methodum coëfficientium indeterminatorum*) adiumento aequationis

$$\left(\frac{1}{n}.\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}p}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}q}\right)^2 = 4rr$$

scilicet

[1] $$\begin{aligned} rr = pp &+ \tfrac{2}{3}f^0ppqq + \tfrac{1}{2}f'p^3qq + (\tfrac{2}{5}f'' - \tfrac{4}{45}f^0f^0)p^4qq \quad \text{etc.} \\ +qq &+ \tfrac{1}{2}g^0ppq^3 + \tfrac{2}{5}g'p^3q^3 \\ &+ (\tfrac{2}{5}h^0 - \tfrac{7}{45}f^0f^0)ppq^4 \end{aligned}$$

Dein habemus, ducente formula $r\sin\psi = \frac{1}{2n}.\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}p}$.

[2] $$\begin{aligned} r\sin\psi = p &- \tfrac{1}{3}f^0pqq - \tfrac{1}{4}f'ppqq - (\tfrac{1}{5}f'' + \tfrac{8}{45}f^0f^0)p^3qq \quad \text{etc.} \\ &- \tfrac{1}{2}g^0pq^3 - \tfrac{2}{5}g'ppq^3 \\ &- (\tfrac{3}{5}h^0 - \tfrac{8}{45}f^0f^0)pq^4 \end{aligned}$$

*) Calculum, qui per nonnulla artificia paullulum contrahi potest, hic adscribere superfluum duximus.

nec non per formulam $r\cos\psi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}q}$

$$[3] \qquad r\cos\psi = q + \tfrac{2}{3}f^0ppq + \tfrac{1}{2}f'p^3q + (\tfrac{2}{5}f'' - \tfrac{4}{15}f^0f^0)p^4q \text{ etc.}$$
$$+ \tfrac{1}{2}g^0ppqq + \tfrac{3}{4}g'p^3qq$$
$$+ (\tfrac{1}{5}h^0 - \tfrac{11}{45}f^0f^0)ppq^3$$

Hinc simul innotescit angulus ψ. Perinde ad computum anguli φ concinnius evolvuntur series pro $r\cos\varphi$ atque $r\sin\varphi$, quibus inserviunt aequationes differentiales partiales

$$\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}p} = n\cos\varphi.\sin\psi - r\sin\varphi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}$$
$$\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}q} = \cos\varphi.\cos\psi - r\sin\varphi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$
$$\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}p} = n\sin\varphi.\sin\psi + r\cos\varphi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}$$
$$\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}q} = \sin\varphi.\cos\psi + r\cos\varphi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$
$$n\cos\psi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} + \sin\psi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} = 0$$

quarum combinatio suppeditat

$$\frac{r\sin\psi}{n}.\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}p} + r\cos\psi.\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}q} = r\cos\varphi$$
$$\frac{r\sin\psi}{n}.\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}p} + r\cos\psi.\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}q} = r\sin\varphi$$

Hinc facile evolvuntur series pro $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, quarum termini primi manifesto esse debent p et q, puta

$$[4] \qquad r\cos\varphi = p + \tfrac{2}{3}f^0pqq + \tfrac{5}{12}f'ppqq + (\tfrac{3}{10}f'' - \tfrac{8}{15}f^0f^0)p^3qq \text{ etc.}$$
$$+ \tfrac{1}{2}g^0pq^3 + \tfrac{7}{20}g'ppq^3$$
$$+ (\tfrac{2}{5}h^0 - \tfrac{7}{45}f^0f^0)pq^4$$

$$[5] \qquad r\sin\varphi = q - \tfrac{1}{3}f^0ppq - \tfrac{1}{4}f'p^3q - (\tfrac{1}{10}f'' - \tfrac{7}{90}f^0f^0)p^4q \text{ etc.}$$
$$- \tfrac{1}{6}g^0ppqq - \tfrac{3}{20}g'p^3qq$$
$$- (\tfrac{1}{5}h^0 + \tfrac{13}{90}f^0f^0)ppq^3$$

E combinatione aequationum [2], [3], [4], [5] derivari posset series pro $rr\cos(\psi+\varphi)$, atque hinc, dividendo per seriem [1], series pro $\cos(\psi+\varphi)$, a qua ad seriem pro ipso angulo $\psi+\varphi$ descendere liceret. Elegantius tamen eadem obtinetur se-

quenti modo. Differentiando aequationem primam et secundam ex iis, quae initio huius art. allatae sunt, obtinemus

$$\sin\psi \cdot \frac{dn}{dq} + n\cos\psi \cdot \frac{d\psi}{dq} + \sin\psi \cdot \frac{d\psi}{dp} = 0$$

qua combinata cum hac

$$n\cos\psi \cdot \frac{d\varphi}{dq} + \sin\psi \cdot \frac{d\varphi}{dp} = 0$$

prodit

$$\frac{r\sin\psi}{n} \cdot \frac{dn}{dq} + \frac{r\sin\psi}{n} \cdot \frac{d(\psi+\varphi)}{dp} + r\cos\psi \cdot \frac{d(\psi+\varphi)}{dq} = 0$$

Ex hac aequatione adiumento methodi coëfficientium indeterminatorum facile eliciemus seriem pro $\psi+\varphi$, si perpendimus, ipsius terminum primum esse debere $\frac{1}{2}\pi$, radio pro unitate accepto, atque denotante 2π peripheriam circuli,

[6] $$\begin{aligned}\psi+\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - f^0 pq - \tfrac{2}{3}f' ppq &- (\tfrac{1}{2}f'' - \tfrac{1}{6}f^0 f^0)p^3 q \quad \text{etc.} \\ - g^0 pqq &- \tfrac{2}{3}g' ppqq \\ &- (h^0 - \tfrac{1}{3}f^0 f^0)pq^3\end{aligned}$$

Operae pretium videtur, etiam aream trianguli ABD in seriem evolvere. Huic evolutioni inservit aequatio conditionalis sequens, quae e considerationibus geometricis satis obviis facile derivatur, et in qua S aream quaesitam denotat:

$$\frac{r\sin\psi}{n} \cdot \frac{dS}{dp} + r\cos\psi \cdot \frac{dS}{dq} = \frac{r\sin\psi}{n} \cdot \int n\, dq$$

integratione a $q = 0$ incepta. Hinc scilicet obtinemus per methodum coëfficientium indeterminatorum

[7] $$\begin{aligned}S = \tfrac{1}{2}pq - \tfrac{1}{12}f^0 p^3 q - \tfrac{1}{20}f' p^4 q &- (\tfrac{1}{30}f'' - \tfrac{1}{60}f^0 f^0)p^5 q \quad \text{etc.} \\ - \tfrac{1}{12}f^0 pq^3 - \tfrac{3}{40}g^0 p^3 qq &- \tfrac{1}{20}g' p^4 qq \\ - \tfrac{7}{120}f' ppq^3 &- (\tfrac{1}{15}h^0 + \tfrac{2}{45}f'' + \tfrac{1}{60}f^0 f^0)p^3 q^3 \\ - \tfrac{1}{10}g^0 pq^4 &- \tfrac{3}{40}g' ppq^4 \\ &- (\tfrac{1}{10}h^0 - \tfrac{1}{30}f^0 f^0)pq^5\end{aligned}$$

25.

A formulis art. praec., quae referuntur ad triangulum a lineis brevissimis formatum rectangulum, progredimur ad generalia. Sit C aliud punctum in ea-

dem linea brevissima DB, pro quo, manente p, characteres q', r', φ', ψ', S' eadem designent, quae q, r, φ, ψ, S pro puncto B. Ita oritur triangulum inter puncta A, B, C, cuius angulos per A, B, C, latera opposita per a, b, c, aream per σ denotamus; mensuram curvaturae in punctis A, B, C resp. per α, β, γ exprimemus. Supponendo itaque (quod licet), quantitates p, q, $q-q'$ esse positivas, habemus

$$A = \varphi - \varphi', \quad B = \psi, \quad C = \pi - \psi', \quad a = q - q', \quad b = r', \quad c = r, \quad \sigma = S - S'$$

Ante omnia aream σ per seriem exprimemus. Mutando in [7] singulas quantitates ad B relatas in eas, quae ad C referuntur, prodit formula pro S', unde, usque ad quantitates sexti ordinis obtinemus

$$\begin{aligned}\sigma = \tfrac{1}{2}p(q-q')\{1 &- \tfrac{1}{12}f^0(pp+qq+qq'+q'q')\\ &- \tfrac{1}{60}f'p(6pp+7qq+7qq'+7q'q')\\ &- \tfrac{1}{20}g^0(q+q')(3pp+4qq+4qq'+4q'q')\}\end{aligned}$$

Haec formula, adiumento seriei [2] puta

$$c\sin B = p(1 - \tfrac{1}{3}f^0qq - \tfrac{1}{4}f'pqq - \tfrac{1}{2}g^0q^3 - \text{ etc.})$$

transit in sequentem

$$\begin{aligned}\sigma = \tfrac{1}{2}ac\sin B\{1 &- \tfrac{1}{12}f^0(pp-qq+qq'+q'q')\\ &- \tfrac{1}{60}f'p(6pp-8qq+7qq'+7q'q')\\ &- \tfrac{1}{20}g^0(3ppq+3ppq'-6q^3+4qqq'+4qq'q'+4q'^3)\}\end{aligned}$$

Mensura curvaturae pro quovis superficiei puncto fit (per art. 19, ubi m, p, q erant quae hic sunt n, q, p)

$$= -\frac{1}{n}\cdot\frac{ddn}{dq^2} = -\frac{2f+6gq+12hqq+\text{ etc.}}{1+fqq+\text{ etc.}} = -2f-6gq-(12h-2ff)qq - \text{ etc.}$$

Hinc fit, quatenus p, q ad punctum B referuntur,

$$\beta = -2f^0 - 2f'p - 6g^0q - 2f''pp - 6g'pq - (12h^0 - 2f^0f^0)qq - \text{ etc.}$$

nec non

$$\begin{aligned}\gamma &= -2f^0 - 2f'p - 6g^0q' - 2f''pp - 6g'pq' - (12h^0 - 2f^0f^0)q'q' - \text{ etc.}\\ \alpha &= -2f^0\end{aligned}$$

Introducendo has mensuras curvaturae in serie pro σ, obtinemus expressionem sequentem, usque ad quantitates sexti ordinis (excl.) exactam:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}ac\sin B\{1+\tfrac{1}{120}\alpha(4pp-2qq+3qq'+3q'q') \\ +\tfrac{1}{120}\mathfrak{b}(3pp-6qq+6qq'+3q'q') \\ +\tfrac{1}{120}\gamma(3pp-2qq+\;qq'+4q'q')\}$$

Praecisio eadem manebit, si pro p, q, q' substituimus $c\sin B$, $c\cos B$, $c\cos B-a$, quo pacto prodit

[8] $$\sigma = \tfrac{1}{2}ac\sin B\{1+\tfrac{1}{120}\alpha(3aa+4cc-\;9ac\cos B) \\ +\tfrac{1}{120}\mathfrak{b}(3aa+3cc-12ac\cos B) \\ +\tfrac{1}{120}\gamma(4aa+3cc-\;9ac\cos B)\}$$

Quum ex hac aequatione omnia, quae ad lineam AD normaliter ad BC ductam referuntur, evanuerint, etiam puncta A, B, C cum correlatis inter se permutare licebit, quapropter erit eadem praecisione

[9] $$\sigma = \tfrac{1}{2}bc\sin A\{1+\tfrac{1}{120}\alpha(3bb+3cc-12bc\cos A) \\ +\tfrac{1}{120}\mathfrak{b}(3bb+4cc-\;9bc\cos A) \\ +\tfrac{1}{120}\gamma(4bb+3cc-\;9bc\cos A)\}$$

[10] $$\sigma = \tfrac{1}{2}ab\sin C\{1+\tfrac{1}{120}\alpha(3aa+4bb-\;9ab\cos C) \\ +\tfrac{1}{120}\mathfrak{b}(4aa+3bb-\;9ab\cos C) \\ +\tfrac{1}{120}\gamma(3aa+3bb-12ab\cos C)\}$$

26.

Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis a, b, c; anguli illius trianguli, quos per A^*, B^*, C^* designabimus, different ab angulis trianguli in superficie curva, puta ab A, B, C, quantitatibus secundi ordinis, operaeque pretium erit, has differentias accurate evolvere. Calculorum autem prolixiorum quam difficiliorum, primaria momenta apposuisse sufficiet.

Mutando in formulis [1], [4], [5], quantitates, quae referuntur ad B, in eas, quae referuntur ad C, nanciscemur formulas pro $r'r'$, $r'\cos\varphi'$, $r'\sin\varphi'$. Tunc evolutio expressionis $rr+r'r'-(q-q')^2-2r\cos\varphi.r'\cos\varphi'-2r\sin\varphi.r'\sin\varphi'$, quae fit $= bb+cc-aa-2bc\cos A = 2bc(\cos A^*-\cos A)$, combinata cum evolutione

expressionis $r\sin\varphi . r'\cos\varphi' - r\cos\varphi . r'\sin\varphi'$, quae fit $= bc\sin A$, suppeditat formulam sequentem

$$\cos A^* - \cos A = -(q-q')p\sin A\{\tfrac{1}{2}f^0 + \tfrac{1}{3}f'p + \tfrac{1}{4}g^0(q+q') + (\tfrac{1}{10}f'' - \tfrac{1}{12}f^0f^0)pp + \tfrac{3}{20}g'p(q+q') + (\tfrac{1}{5}h^0 - \tfrac{7}{120}f^0f^0)(qq+qq'+q'q') + \text{etc.}\}$$

Hinc fit porro, usque ad quantitates quinti ordinis

$$A^* - A = -(q-q')p\{\tfrac{1}{2}f^0 + \tfrac{1}{3}f'p + \tfrac{1}{4}g^0(q+q') + \tfrac{1}{10}f''pp + \tfrac{3}{20}g'p(q+q') + \tfrac{1}{5}h^0(qq+qq'+q'q') - \tfrac{1}{120}f^0f^0(7pp+7qq+12qq'+7q'q')\}$$

Combinando hanc formulam cum hac

$$2\sigma = ap(1 - \tfrac{1}{6}f^0(pp+qq+qq'+q'q' - \text{etc.}))$$

atque cum valoribus quantitatum α, β, γ in art. praec. allatis, obtinemus usque ad quantitates quinti ordinis

$$[11] \quad A^* = A - \sigma\{\tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{12}\beta + \tfrac{1}{12}\gamma + \tfrac{2}{15}f''pp + \tfrac{1}{5}g'p(q+q') + \tfrac{1}{5}h^0(3qq - 2qq' + 3q'q') + \tfrac{1}{90}f^0f^0(4pp - 11qq + 14qq' - 11q'q')\}$$

Per operationes prorsus similes evolvimus

$$[12] \quad B^* = B - \sigma\{\tfrac{1}{12}\alpha + \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{12}\gamma + \tfrac{1}{10}f''pp + \tfrac{1}{10}g'p(2q+q') + \tfrac{1}{5}h^0(4qq - 4qq' + 3q'q') - \tfrac{1}{90}f^0f^0(2pp + 8qq - 8qq' + 11q'q')\}$$

$$[13] \quad C^* = C - \sigma\{\tfrac{1}{12}\alpha + \tfrac{1}{12}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma + \tfrac{1}{10}f''pp + \tfrac{1}{10}g'p(q+2q') + \tfrac{1}{5}h^0(3qq - 4qq' + 4q'q') - \tfrac{1}{90}f^0f^0(2pp + 11qq - 8qq' + 8q'q')\}$$

Hinc simul deducimus, quum summa $A^* + B^* + C^*$ duobus rectis aequalis sit, excessum summae $A+B+C$ supra duos angulos rectos, puta

$$[14] \quad A + B + C = \pi + \sigma\{\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{3}f''pp + \tfrac{1}{2}g'p(q+q') + (2h^0 - \tfrac{1}{3}f^0f^0)(qq - qq' + q'q')\}$$

Haec ultima aequatio etiam formulae [6] superstrui potuisset.

27.

Si superficies curva est sphaera, cuius radius $= R$, erit

$$\alpha = \beta = \gamma = -2f^0 = \frac{1}{RR};\ f'' = 0,\ g' = 0,\ 6h^0 - f^0 f^0 = 0 \text{ sive } k^0 = \frac{1}{24R^4}.$$

Hinc formula [14] fit

$$A + B + C = \pi + \frac{\sigma}{RR}$$

quae praecisione absoluta gaudet; formulae 11—18 autem suppeditant

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(2pp - qq + 4qq' - q'q')$$
$$B^* = B - \frac{\sigma}{3RR} + \frac{\sigma}{180R^4}(pp - 2qq + 2qq' + q'q')$$
$$C^* = C - \frac{\sigma}{3RR} + \frac{\sigma}{180R^4}(pp + qq + 2qq' - 2q'q')$$

sive aeque exacte

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(bb + cc - 2aa)$$
$$B^* = B - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(aa + cc - 2bb)$$
$$C^* = C - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(aa + bb - 2cc)$$

Neglectis quantitatibus quarti ordinis, prodit hinc theorema notum a clar. LEGENDRE primo propositum.

28.

Formulae nostrae generales, reiectis terminis quarti ordinis, persimplices evadunt, scilicet

$$A^* = A - \tfrac{1}{12}\sigma(2\alpha + \beta + \gamma)$$
$$B^* = B - \tfrac{1}{12}\sigma(\alpha + 2\beta + \gamma)$$
$$C^* = C - \tfrac{1}{12}\sigma(\alpha + \beta + 2\gamma)$$

Angulis itaque A, B, C in superficie non sphaerica reductiones inaequales applicandae sunt, ut mutatorum sinus lateribus oppositis fiant proportionales. Inaequalitas generaliter loquendo erit tertii ordinis, at si superficies parum a sphaera discrepat, illa ad ordinem altiorem referenda erit: in triangulis vel maximis in superficie telluris, quorum quidem angulos dimetiri licet, differentia semper pro

insensibili haberi potest. Ita e.g. in triangulo maximo inter ea, quae annis praecedentibus dimensi sumus, puta inter puncta Hohehagen, Brocken, Inselsberg, ubi excessus summae angulorum fuit $= 14''85348$, calculus sequentes reductiones angulis applicandas prodidit:

Hohehagen	$-4''95113$
Brocken	$-4,95104$
Inselsberg	$-4,95131$

29.

Coronidis caussa adhuc comparationem areae trianguli in superficie curva cum area trianguli rectilinei, cuius latera sunt a, b, c, adiiciemus. Aream posteriorem denotabimus per σ^*, quae fit $= \frac{1}{2}bc\sin A^* = \frac{1}{2}ac\sin B^* = \frac{1}{2}ab\sin C^*$

Habemus, usque ad quantitates ordinis quarti

$$\sin A^* = \sin A - \tfrac{1}{12}\sigma\cos A\,.(2\alpha + \mathfrak{b} + \gamma)$$

sive aeque exacte

$$\sin A = \sin A^*.(1 + \tfrac{1}{24}bc\cos A.(2\alpha + \mathfrak{b} + \gamma))$$

Substituto hoc valore in formula [9], erit usque ad quantitates sexti ordinis

$$\sigma = \tfrac{1}{2}bc\sin A^*.\{1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3bb + 3cc - 2bc\cos A) + \tfrac{1}{120}\mathfrak{b}(3bb + 4cc - 4bc\cos A) \\ + \tfrac{1}{120}\gamma(4bb + 3cc - 4bc\cos A)\}$$

sive aeque exacte

$$\sigma = \sigma^*\{1 + \tfrac{1}{120}\alpha(aa + 2bb + 2cc) + \tfrac{1}{120}\mathfrak{b}(2aa + bb + 2cc) \\ + \tfrac{1}{120}\gamma(2aa + 2bb + cc)\}$$

Pro superficie sphaerica haec formula sequentem induit formam

$$\sigma = \sigma^*(1 + \tfrac{1}{24}\alpha(aa + bb + cc))$$

cuius loco etiam sequentem salva eadem praecisione adoptari posse facile confirmatur

$$\sigma = \sigma^*\sqrt{\frac{\sin A\,.\,\sin B\,.\,\sin C}{\sin A^*.\sin B^*.\sin C^*}}$$

Si eadem formula triangulis in superficie curva non sphaerica applicatur, error generaliter loquendo erit quinti ordinis, sed insensibilis in omnibus triangulis, qualia in superficie telluris dimetiri licet.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

GEGENSTÄNDE DER HÖHERN GEODAESIE

ERSTE ABHANDLUNG

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS

DER KÖNIGL. SOCIETÄT ÜBERREICHT MDCCCXLIII OCT. XXIII.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Band II.
Göttingen 1844.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

GEGENSTÄNDE DER HÖHERN GEODAESIE.

Bei den, zum Theil von mir selbst, zum Theil unter meiner Leitung, ausgeführten über das ganze Königreich Hannover sich erstreckenden trigonometrischen Vermessungen sind, sowohl in Beziehung auf die Art, wie die Messungen angestellt wurden, als noch mehr in Beziehung auf ihre nachherige mathematische Behandlung und ihre Verarbeitung zu Resultaten, Wege eingeschlagen, die von den sonst gewöhnlichen abweichen. Mein früher gehegter Vorsatz, nach völliger Beendigung der Messungen diese nebst allen von mir angewandten Verfahrungsarten in einem besondern Werke darzulegen, hat, aus Ursachen, deren Auseinandersetzung nicht hieher gehört, bisher nicht zur Ausführung kommen können, und ich wähle daher das Auskunftsmittel, das im theoretischen Theile mir eigenthümliche in einer Reihe von Abhandlungen bekannt zu machen, um so lieber, weil ich auf diese Weise die Freiheit behalte, mit Ausführlichkeit manche Untersuchungen zu entwickeln, welche ein selbstständiges Interesse darbieten und mit den übrigen in enger Verwandtschaft stehen, auch wenn von denselben bei meinen Messungen keine unmittelbare Anwendung gemacht ist. Dies gilt namentlich von dem grössten Theile des Inhalts der gegenwärtigen ersten Abhandlung.

1.

Von der Aufgabe:

> die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird

habe ich im Jahre 1822 eine allgemeine Auflösung gegeben, welche Herr Conferenzrath SCHUMACHER im 3 Heft der Astronomischen Abhandlungen hat abdrucken lassen. Bei der Anwendung dieser Aufgabe auf die höhere Geodäsie, für welche sie eine vorzüglich ergiebige Hülfsquelle wird, macht sich das Bedürfniss fühlbar, Abbildungen, welche unter der angegebenen Bedingung stehen, durch eine besondere Benennung auszuzeichnen, und ich werde daher dieselben *conforme* Abbildungen oder Übertragungen nennen, indem ich diesem sonst vagen Beiworte eine mathematisch scharf bestimmte Bedeutung beilege.

In der angeführten Schrift ist die allgemeine Auflösung, welche eine willkürliche Function einschliesst, auch auf mehrere *bestimmte* Flächen angewandt; das letzte dort behandelte Beispiel betrifft die conforme Übertragung der Oberfläche des Umdrehungsellipsoids auf die Kugelfläche, und es ist [Art. 13] zugleich eine solche Bestimmung der arbiträren Function angegeben, die zu einer sehr brauchbaren Anwendung auf die höhere Geodäsie benutzt werden kann. Diese Benutzung war a. a. O. nur kurz angedeutet, und eine ausführlichere Entwickelung vorbehalten. Ich werde jedoch anstatt *dieser* speciellen Auflösung eine etwas abgeänderte und für die geodätischen Anwendungen noch viel mehr geeignete Methode zur conformen Übertragung der ellipsoidischen Fläche auf die Kugelfläche in der gegenwärtigen Abhandlung entwickeln, und damit zugleich alles zu einer solchen Benutzung erforderliche verbinden.

2.

Die allgemeine Auflösung der Aufgabe, angewandt auf die ellipsoidische und sphärische Fläche, gibt folgende alle conformen Übertragungen der einen auf die andere umfassende Formel (1):

$$T + i \log \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} U = f\left(t + i \log \left\{\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} w \cdot \left(\frac{1 - e\cos w}{1 + e\cos w}\right)^{\frac{1}{2}e}\right\}\right)$$

Es bezeichnen hier

e die Excentricität der Ellipse, durch deren Umdrehung um ihre kleine Achse die ellipsoidische Fläche erzeugt wird;

t und $90^0 - w$ die Länge und Breite eines unbestimmten Punkts auf dieser Fläche, mithin w den Winkel einer in diesem Punkte gegen die Fläche gezogenen Normale mit der kleinen Achse;

T und $90^0 - U$ die Länge und Breite des entsprechenden Punkts auf der Kugelfläche;

i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$;

f die Charakteristik für eine willkürlich zu wählende Function.

Die Logarithmen sind immer die hyperbolischen.

Durch m wird das Vergrösserungsverhältniss bezeichnet werden, so verstanden, dass jedes Linearelement auf der ellipsoidischen Fläche sich zu dem entsprechenden Linearelement auf der Kugelfläche verhält wie 1 zu m: dieses Verhältniss ist an jeder Stelle der einen und der andern Fläche ein bestimmtes, für verschiedene Stellen veränderlich.

Die einfachste Auflösung erhält man, indem man die willkürliche Function schlechthin ihrem Argumente gleich, oder

$$f\upsilon = \upsilon$$

setzt, und diese Übergangsart ist in der That auch die geeignetste, wenn die *ganze* Oberfläche des Ellipsoids auf die Kugelfläche übertragen werden soll. Für die Anwendung auf geodätische Rechnungen, wo immer nur ein vergleichungsweise sehr kleiner Theil der Erdfläche in Betracht kommt, ist es aber, wie schon a. a. O. bemerkt ist, viel vortheilhafter, der Function noch einen constanten und zwar imaginären Theil beizufügen, oder

$$f\upsilon = \upsilon - i \log k$$

zu setzen. Es lassen sich dann der Halbmesser der Kugel und die Constante k so bestimmen, dass die das Vergrösserungsverhältniss ausdrückende Grösse m, von deren geringer Ungleichheit innerhalb der Grenzen der dargestellten Fläche die Bequemlichkeit der Anwendung auf geodätische Rechnungen vornehmlich abhängt, für den mittlern Parallelkreis $= 1$, und bis zu einigen Graden Entfernung nach Norden und Süden kaum merklich von 1 verschieden wird; die Abweichung von dem Werthe 1 ist nemlich von der zweiten Ordnung in Beziehung

auf den Abstand vom mittlern Parallelkreise, und enthält ausserdem noch die Abplattung oder das Quadrat von e als Factor.

Allein dieser Vortheil lässt sich noch sehr vergrössern, wenn man anstatt jener Bestimmung der willkürlichen Function eine etwas abgeänderte, für die Rechnung fast eben so bequeme wählt, indem man nemlich unter Zuziehung einer zweiten Constante α,

$$f\upsilon = \alpha\upsilon - i\log k$$

setzt. Man hat dann in seiner Gewalt, durch zweckmässige Bestimmung der beiden Constanten zu bewirken, dass die Abweichung des Vergrösserungsverhältnisses m von dem Werthe 1, in Beziehung auf den Abstand vom mittlern Parallelkreise eine Grösse der dritten Ordnung wird, ungerechnet den auch hier bleibenden Factor ee.

3.

Die Formel 1 gibt, bei dieser Bestimmung der Function f,

$$T = \alpha t \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}w^{\alpha}\left(\frac{1+e\cos w}{1-e\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

und für m findet man leicht, aus den in der mehrerwähnten Schrift entwickelten Grundsätzen, den Ausdruck

$$m = \frac{\alpha A\sin U\sqrt{(1-ee\cos w^2)}}{a\sin w} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

wenn durch a die halbe grosse Achse des Ellipsoids und durch A der Halbmesser der Kugel bezeichnet wird.

Die Differentiation der logarithmisch ausgedrückten Gleichung 3 ergibt

$$\frac{\mathrm{d}U}{\sin U} = \frac{\alpha\,\mathrm{d}w}{\sin w} - \frac{\alpha ee\sin w\,\mathrm{d}w}{1-ee\cos w^2}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w} = \frac{\alpha(1-ee)\sin U}{(1-ee\cos w^2)\sin w} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Ebenso ergibt die Differentiation der Gleichung 4

$$\mathrm{d}\log m = \operatorname{cotg}U\,\mathrm{d}U - \operatorname{cotg}w\,\mathrm{d}w + \frac{ee\cos w\,.\sin w\,\mathrm{d}w}{1-ee\cos w^2}$$

$$= \operatorname{cotg}U\,\mathrm{d}U - \frac{(1-ee)\cos w\,\mathrm{d}w}{(1-ee\cos w^2)\sin w}$$

folglich, wenn man mit Hülfe von 5 entweder $\mathrm{d}U$ oder $\mathrm{d}w$ eliminirt,

$$\frac{\mathrm{d}\log m}{\mathrm{d}w} = \frac{(1-ee)(\alpha\cos U - \cos w)}{(1-ee\cos w^2)\sin w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\frac{\mathrm{d}\log m}{\mathrm{d}U} = \operatorname{cotg} U - \frac{\cos w}{\alpha \sin U} = \frac{\alpha\cos U - \cos w}{\alpha\sin U} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Durch eine nochmalige Differentiation der Gleichung 7 erhält man

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\log m}{\mathrm{d}U^2} = -\frac{1}{\sin U^2} + \frac{\cos U\cos w}{\alpha\sin U^2} + \frac{\sin w}{\alpha\sin U}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}U}$$
$$= -\frac{1}{\sin U^2} + \frac{\cos U\cos w}{\alpha\sin U^2} + \frac{(1-ee\cos w^2)\sin w^2}{\alpha\alpha(1-ee)\sin U^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Soll nun für eine bestimmte Breite (Normalbreite) der Werth von m der Einheit gleich werden, für andere Breiten hingegen nur um Grössen der dritten Ordnung von 1 abweichen, die Breitenunterschiede als Grössen erster Ordnung betrachtet, so muss, wenn die Normalbreite auf dem Ellipsoid mit P, die entsprechende auf der Kugel mit Q bezeichnet wird, für $w = 90^0 - P$, $U = 90^0 - Q$ in Gemässheit der Gleichungen 4, 7, 8 sein:

$$A = \frac{a\cos P}{a\cos Q\sqrt{(1-ee\sin P^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\alpha\sin Q = \sin P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$0 = 1 - \frac{\sin P\sin Q}{\alpha} - \frac{(1-ee\sin P^2)\cos P^2}{\alpha\alpha(1-ee)}$$

oder, wenn man in letzterer Gleichung für $\sin Q$ seinen Werth aus 10 substituirt,

$$\alpha\alpha = 1 + \frac{ee\cos P^4}{1-ee} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Durch diese Gleichung ist demnach α gegeben, sobald für P ein bestimmter Werth gewählt ist; Q kann sodann durch Gleichung 10, und A durch Gleichung 9 bestimmt werden; endlich ergibt sich k durch die Substitution von $w = 90^0 - P$, $U = 90^0 - Q$ in der allgemeinen Gleichung 3, nemlich

$$k = \frac{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}P)^\alpha}{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}Q)}\cdot\left(\frac{1-e\sin P}{1+e\sin P}\right)^{\frac{1}{2}\alpha e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

4.

Die Berechnung der Constanten A, α, k und der Normalbreite auf der Kugel Q aus P und e wird man, da alle diese Grössen wie Grundlagen für die

Anwendung auf eine gewisse Zone zu betrachten sind, gern mit besonderer Sorgfalt und Schärfe auszuführen wünschen, und es verdienen daher einige dazu dienliche Umformungen hier einen Platz: eine Umformung wird ohnehin *nothwendig*, wenn man von einer bestimmten Normalbreite nicht auf dem Ellipsoid sondern auf der Kugel, also von einem gegebenen Werthe von Q ausgehen, und daraus die übrigen Grössen berechnen will.

Führt man drei Hülfswinkel φ, ζ, η ein, so dass

$$\sin\varphi = e \qquad (13)$$

$$\operatorname{tang}\zeta = \operatorname{tang}\varphi \cos P^2 \qquad (14)$$

$$\operatorname{tang}\eta = \sin\zeta \operatorname{tang} P \qquad (15)$$

so wird

$$\alpha = \frac{1}{\cos\zeta} \qquad (16)$$

$$\sin Q = \cos\zeta \sin P \qquad (17)$$

$$\cos\eta \cos Q = \cos P \qquad (18)$$

$$\sin\eta = \operatorname{tang}\zeta \operatorname{tang} Q \qquad (19)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(P-Q) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\zeta \,.\, \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\eta \qquad (20)$$

$$\sin(2\zeta-\varphi) = e\cos 2Q \qquad (21)$$

Die Gleichung 18 folgt leicht aus der Verbindung von 15 und 17; sodann 19 aus der Verbindung von 15, 17, 18; ferner 20 aus 17, 18, 19, endlich 21 aus 14 und 17.

Am schärfsten wird man rechnen, wenn man, in dem Falle wo P gegeben ist, sich der Formeln 14, 15, 20 bedient, um der Reihe nach ζ, η, Q zu bestimmen; für den Fall hingegen, wo Q gegeben ist, vermittelst der Gleichungen 21, 19, 20 die Werthe von ζ, η, P ableitet: zur Controlle mag man dann noch eine oder einige der übrigen Gleichungen benutzen. Führt man noch einen vierten Hülfswinkel θ ein, nach der Formel

$$\sin\theta = e\sin P \qquad (22)$$

so wird

$$\cos\varphi = \cos\zeta \cos\eta \cos\theta \qquad (23)$$

und die Formeln 9 und 12 erhalten folgende Gestalt:

$$A = \frac{a\cos P}{\alpha\cos\theta\cos Q} = \frac{a\cos\eta}{\alpha\cos\theta} = \frac{a\cos\varphi}{\cos\theta^2} = \frac{a\cos\varphi}{1-ee\sin P^2}$$

$$k = \frac{\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}P)^\alpha}{\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}Q)\operatorname{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}\theta)^{\alpha e}}$$

5.

Ich begleite die Vorschriften dieser ganzen Abhandlung mit einer auf das schärfste durchgeführten numerischen Anwendung, welche andern, die zur Verarbeitung ihrer Messungen die hier vorgetragene Methode benutzen wollen, entweder als Rechnungsmuster zur Construction der erforderlichen Hülfstafeln, oder auch schon unmittelbar als Hülfsapparat für einen grossen Theil der gemässigten Zone dienen kann. In den meisten Fällen wird man übrigens sich mit einer *viel* geringern Schärfe begnügen können.

Als Normalbreite wähle ich $52°40'$, welche ungefähr dem mittlern Parallelkreise des Königreichs Hannover entspricht; da es jedoch in einigen Beziehungen vortheilhafter ist, wenn für die Normalbreite auf der Kugel, als wenn für die auf dem Ellipsoid eine runde Zahl gewählt wird, so setze ich

$$Q = 52° \; 40' \; 0''$$

Die Rechnung führe ich nach den neuesten von Bessel aus den Gradmessungen abgeleiteten Erddimensionen (Astronomische Nachrichten 19. Band S. 116), wonach, die Toise zur Einheit angenommen,

$$\log a = 6{,}5148235337$$
$$\log\cos\varphi = 9{,}9985458202$$

Es folgt hieraus, mit Hülfe der zehnzifrigen Logarithmen,

$$\varphi = 4°\; 41'\; 9''\; 98262$$
$$\log e = 8{,}9122052079$$
$$\zeta = 1°\; 43'\; 26''\; 80402$$
$$\eta = 2\;\; 15\;\; 42\;\; 34083$$
$$P = 52\;\; 42\;\; 2{,}53251$$
$$\log \alpha = 0{,}0001966553$$
$$\theta = 3°\; 43'\; 34''\; 24669$$
$$\log \frac{1}{k} = 0{,}0016708804$$
$$\log A = 6{,}5152074703$$

Nimmt man das französische gesetzliche Meter als Einheit an, so wird

$$\log A = 6{,}8050274003$$

Wählte man hingegen den zehnmillionsten Theil des Erdquadranten selbst, nach obigen Dimensionen, zur Einheit, so würde sein

$$\log A = 6{,}8049902365$$

6.

Die Berechnung der Breite auf der Kugel aus der Breite auf dem Ellipsoid kann füglich nach der Formel 3 geführt werden, wenn sie nur für wenige Fälle gefordert wird; für ausgedehntere Anwendungen hingegen wird der Gebrauch einer Reihe vortheilhaft sein, zu deren Entwicklung hier die nöthigen Formeln gegeben werden sollen.

Ich bezeichne eine unbestimmte Breite auf dem Ellipsoid, oder einen unbestimmten Werth von $90^0 - w$, durch $P + p$, und die entsprechende Breite auf der Kugel, oder den Werth von $90^0 - U$ durch $Q + q$. Nach dem Taylorschen Lehrsatze wird

$$q = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w} \cdot p - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{dd}U}{\mathrm{d}w^2} \cdot pp + \tfrac{1}{6} \cdot \frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}w^3} \cdot p^3 - \tfrac{1}{24} \cdot \frac{\mathrm{d}^4U}{\mathrm{d}w^4} \cdot p^4 + \text{ u. s. w.}$$

wo für die Differentialquotienten diejenigen bestimmten Werthe zu substituiren sind, welche zu $p = 0$, oder zu $w = 90^0 - P$, $U = 90^0 - Q$ gehören. Die successive Entwicklung der unbestimmten Differentialquotienten ergibt

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w} = \frac{\alpha(1-ee)\sin U}{(1-ee\cos w^2)\sin w}$$

$$\frac{\mathrm{dd}U}{\mathrm{d}w^2} = \frac{\alpha(1-ee)\sin U}{(1-ee\cos w^2)^2\sin w^2}\{\alpha(1-ee)\cos U - \cos w + ee(\cos w^3 - 2\cos w\sin w^2)\}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}w^3} = \frac{\alpha(1-ee)\sin U}{(1-ee\cos w^2)^3\sin w^3}\{&\alpha\alpha(1-ee)^2(\cos U^2 - \sin U^2)\\ &-3\alpha(1-ee)\cos U(\cos w - ee(\cos w^3 - 2\cos w\sin w^2))\\ &+2\cos w^2 + \sin w^2 - ee(4\cos w^4 - 2\sin w^4)\\ &+e^4(2\cos w^6 - \cos w^4\sin w^2 + 6\cos w^2\sin w^4)\}\end{aligned}$$

Die beiden folgenden, welche ich gleichfalls entwickelt habe, setze ich um den Raum zu schonen in ihrer unbestimmten Form nicht hieher.

Die Substitution von $w = 90^0 - P$, $U = 90^0 - Q$ ergibt dann, wenn zugleich
anstatt $\alpha\sin Q$ der Werth $\sin P$ (nach Gleichung 10), und
anstatt $\alpha\cos Q$ der Werth $\frac{\cos P}{\cos\zeta\cos\eta} = \frac{\cos\theta\cos P}{\cos\varphi}$ (nach Gleichung 18, 16, 23)
substituirt, und zur Abkürzung $\cos P = c$, $\sin P = s$ geschrieben wird,

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w} = \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}$$
$$\frac{\mathrm{dd}U}{\mathrm{d}w^2} = -\frac{3ee\cos\varphi}{\cos\theta^3}.cs$$
$$\frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}w^3} = \frac{ee\cos\varphi}{\cos\theta^5}(3cc-3ss+ee(12ccss+3s^4))$$
$$\frac{\mathrm{d}^4U}{\mathrm{d}w^4} = \frac{ee\cos\varphi}{\cos\theta^7}.cs(16-ee(49cc-13ss)-e^4(56ccss+29s^4))$$
$$\frac{\mathrm{d}^5U}{\mathrm{d}w^5} = \frac{ee\cos\varphi}{\cos\theta^9}(-16cc+12ss+ee(49c^4-378ccss+9s^4)$$
$$+e^4(628c^4ss+174ccs^4-54s^6)+e^6(268c^4s^4+220ccs^6+33s^8))$$

Bei dieser Entwicklung von q in eine Reihe nach p ist stillschweigend vorausgesetzt, dass beide Grössen in Theilen des dem Halbmesser gleichen Bogens ausgedrückt sind: soll dagegen q Secunden und p Grade bedeuten, so muss dem ersten Gliede der Reihe der Factor 3600, dem zweiten der Factor $\frac{3600\pi}{180} = 20\pi$, dem dritten der Factor $3600\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = \frac{1}{9}\pi\pi$ u.s.f. beigefügt werden. Unter dieser Voraussetzung gibt die Anwendung der Formeln auf unser Beispiel folgende Zahlenwerthe, welche ich in eine solche Form setze, dass weitgestreckte Decimalbrüche vermieden werden:

$$\begin{aligned} q = & \; 359556''69447 \;.\frac{p}{100} \\ & +3041{,}386524.\left(\frac{p}{100}\right)^2 \\ & -\;946{,}260563.\left(\frac{p}{100}\right)^3 \\ & -4135{,}396057.\left(\frac{p}{100}\right)^4 \\ & +\;227{,}04342\;.\left(\frac{p}{100}\right)^5 \end{aligned}$$

welche Reihe, da p in der Anwendung nur wenige Einheiten betragen soll, immer sehr schnell convergirt. Um für die Richtigkeit dieser Zahlen eine Bestätigung zu erhalten, habe ich die Rechnung für $p = -6$ und für $p = +6$, d. i. für

$$P+p = 46^0 \; 42' \; 2''53251 \text{ und für}$$
$$P+p = 58 \quad 42 \quad 2{,}53251$$

sowohl nach der Reihe, als nach der endlichen Formel 3 ausgeführt. Die Reihe gibt

$$Q+q = 46^0\ 40'\ 37''69794$$
$$Q+q = 58\ \ 39\ \ 44{,}09285$$

die endliche Formel hingegen

$$Q+q = 46^0\ 40'\ 37''69794$$
$$Q+q = 58\ \ 39\ \ 44{,}09283$$

also so genau übereinstimmend, wie zehnzifrige Logarithmen nur verstatten.

7.

Auf ähnliche Weise lässt sich der Logarithm von m in eine Reihe entwickeln, deren erste Glieder folgende sind:

$$\begin{aligned}\log m = &-\frac{\sin 2\varphi^2}{6\cos\theta^4}\cdot csp^3 - \frac{\sin 2\varphi^2}{24\cos\theta^6}(cc+11\,eess)p^4\\ &+\frac{\sin 2\varphi^2}{120\cos\theta^8}\cdot\frac{s}{c}(2cc-3ss-ee(40c^4-20ccss-6s^4)\\ &\qquad\qquad -e^4ss(104c^4+22ccss+3s^4))p^5\end{aligned}$$

Auch das folgende Glied habe ich (auf einem andern Wege) entwickelt, jedoch nur nach dem Hauptbestandtheile des Coëfficienten, welcher von der Ordnung ee ist, und dafür gefunden:

$$+\frac{\sin 2\varphi^2}{720\cos\theta^{10}}\cdot\frac{1}{cc}(2c^4-18ccss-15s^4)p^6$$

Der durch diese Reihe ausgedrückte Logarithm ist der hyperbolische, und p wird, wie oben, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden: verlangt man den briggischen Logarithmen, indem man p Grade bedeuten lässt, so muss noch der Modulus als Factor hinzukommen und $\frac{\pi p}{180}$ für p geschrieben werden. In dieser Gestalt wird für unser Beispiel

$$\begin{aligned}\log m = &-0{,}0049612433\left(\tfrac{p}{100}\right)^3\\ &-0{,}0017329876\left(\tfrac{p}{100}\right)^4\\ &-0{,}002393772\ \left(\tfrac{p}{100}\right)^5\\ &-0{,}0124746\quad\left(\tfrac{p}{100}\right)^6\end{aligned}$$

Die Anwendung dieser Reihe auf die oben betrachteten einzelnen Fälle gibt

$$\text{für}\quad p = -6,\quad \log m = +0{,}000001050448$$
$$\text{für}\quad p = +6,\quad \log m = -0{,}000001096531$$

Die endliche Formel 4, welche man auch so schreiben kann

$$m = \frac{\alpha A \cos(Q+q)\sqrt{(1-ee\sin(P+p)^2)}}{a\cos(P+p)}$$
$$= \frac{\cos\eta\cos(Q+q)\sqrt{(1-ee\sin(P+p)^2)}}{\cos\theta\cos(P+p)},$$

gibt, mit zehnzifrigen Logarithmen berechnet, bis auf die zehnte Zifer genau dasselbe.

8.

Für die umgekehrte Aufgabe, wo q gegeben und p gesucht wird, ist die Entwicklung in eine Reihe noch wesentlicher, da die endliche Formel 3 in diesem Falle nur auf indirectem Wege zum Ziele führen könnte. Der Taylorsche Lehrsatz gibt

$$p = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}U}\cdot q - \frac{\mathrm{dd}w}{2\,\mathrm{d}U^2}\cdot qq + \frac{\mathrm{d}^3 w}{6\,\mathrm{d}U^3}\cdot q^3 - \text{u. s. f.}$$

wo für die Differentialquotienten diejenigen bestimmten Werthe zu setzen sind, welche zu $q = 0$ oder $U = 90^0 - Q$, $w = 90^0 - P$ gehören. Für die unbestimmten Werthe der drei ersten Differentialquotienten ergeben sich folgende Ausdrücke

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}U} = \frac{(1-ee\cos w^2)\sin w}{\alpha(1-ee)\sin U}$$

$$\frac{\mathrm{dd}w}{\mathrm{d}U^2} = \frac{(1-ee\cos w^2)\sin w}{\alpha\alpha(1-ee)^2\sin U^3}(\alpha(1-ee)\cos U - \cos w + ee\cos w(\cos w^2 - 2\sin w^2))$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3 w}{\mathrm{d}U^3} = \frac{(1-ee\cos w^2)\sin w}{\alpha^3(1-ee)^3\sin U^5}\{&\alpha\alpha(1-ee)^2(\cos U^2 + 2\sin U^2)\\ &-3\alpha(1-ee)\cos U\cos w(1-ee(\cos w^2 - 2\sin w^2))\\ &+\cos w^2 - \sin w^2 - ee(2\cos w^4 - 12\cos w^2\sin w^2 + 2\sin w^4)\\ &+e^4(\cos w^6 - 11\cos w^4\sin w^2 + 6\cos w^2\sin w^4)\}\end{aligned}$$

Die beiden folgenden gleichfalls vollständig entwickelten Coëfficienten setze ich um den Raum zu schonen, nicht hieher, da sie doch nur Zwischengrössen sind, um zu den Endresultaten zu gelangen. Diese finden sich nach der Sub-

stitution von $90^0 - P$, $90^0 - Q$ anstatt w, U, und nach Anwendung der im 6. Art. angegebenen Umformung von $\alpha \cos U$ und $\alpha \sin U$, indem zugleich zur Abkürzung c, s anstatt $\cos P$, $\sin P$ geschrieben wird, wie folgt:

$$
\begin{aligned}
p = & \frac{\cos\theta}{\cos\varphi} \cdot q \\
& - \frac{3ee}{2\cos\varphi^2} \cdot csqq \\
& + \frac{ee}{2\cos\varphi^3 \cos\theta} \{-cc + ss + ee(5ccss - s^4)\} q^3 \\
& + \frac{ee}{24\cos\varphi^4 \cos\theta^2} cs \{16 + ee(41cc - 77ss) - e^4(101ccss - 61s^4)\} q^4 \\
& + \frac{ee}{120\cos\varphi^5 \cos\theta^3} \{16cc - 12ss + ee(41c^4 - 522ccss + 81s^4) \\
& \qquad - e^4(538c^4ss - 1536ccs^4 + 126s^6) + e^6(857c^4s^4 - 1030ccs^6 + 57s^8)\} q^5 \\
& + \text{u.s.f.}
\end{aligned}
$$

Die numerischen Werthe für unser Beispiel finden sich daraus in ähnlicher Form wie oben, d. i. wenn p in Secunden, q in Graden ausgedrückt wird,

$$
\begin{aligned}
p = & \; 360443''852122\left(\frac{q}{100}\right) \\
& - 3052,649780\left(\frac{q}{100}\right)^2 \\
& + 1002,642506\left(\frac{q}{100}\right)^3 \\
& + 4119,589282\left(\frac{q}{100}\right)^4 \\
& - 431,181623\left(\frac{q}{100}\right)^5 \text{ u.s.f.}
\end{aligned}
$$

9.

Auf ähnliche Weise ist der hyperbolische Logarithm von m in folgende nach Potenzen von q fortschreitende Reihe entwickelt, wobei der Coëfficient von q^6 nur nach seinem Haupttheile auf anderm Wege abgeleitet ist:

$$
\begin{aligned}
\log m = & - \frac{2ee}{3\cos\varphi \cos\theta} \cdot csq^3 \\
& - \frac{ee}{6\cos\varphi^2 \cos\theta^2} \cdot cc(1 - 7eess) q^4 \\
& + \frac{ee}{30\cos\varphi^3 \cos\theta^3} \cdot \frac{s}{c} \{2cc - 3ss + ee(20c^4 - 10ccss + 6s^4) \\
& \qquad - e^4(59c^4ss - 8ccs^4 + 3s^6)\} q^5 \\
& + \frac{ee}{180\cos\varphi^4 \cos\theta^4} \cdot \frac{1}{cc}(2c^4 - 18ccss - 15s^4) q^6
\end{aligned}
$$

Die Zahlenwerthe in unserm Beispiele (für den briggischen Logarithmen, und q in Graden ausgedrückt) sind

$$\log m = -0{,}0049796163\,94\left(\tfrac{q}{100}\right)^3$$
$$-0{,}0016150307\,6\left(\tfrac{q}{100}\right)^4$$
$$-0{,}0023973954\left(\tfrac{q}{100}\right)^5$$
$$-0{,}0125671\left(\tfrac{q}{100}\right)^6$$

10.

Bei einer weitumfassenden Vermessung, wo die Übertragung vom Sphäroid auf die Kugel oder umgekehrt für sehr viele Punkte vorkommt, wird man, anstatt jedesmal auf die Formeln zurückzukommen, lieber ein für allemal eine ausgedehnte Tafel berechnen. Der Gebrauch einer solchen Tafel wird aber bequemer sein, wenn man ihr die Breite auf der Kugel $Q+q$ zum Argument gibt, als wenn man die Breite auf dem Sphäroid dazu wählen wollte, indem der Übergang von ersterer auf die andere viel häufiger erfordert wird, als der umgekehrte. Für jeden Rechnungserfahrnen wird übrigens die Bemerkung überflüssig sein, dass man behuf Construction einer solchen Tafel nur eine mässige Anzahl von Gliedern direct berechnet, aus denen die übrigen mit eben so grosser Schärfe und sehr geringer Mühe durch ein angemessenes Interpolationsverfahren bestimmt werden. Es werden also dafür die im 8. und 9. Artikel mitgetheilten Reihen zur Anwendung kommen, und gerade deswegen ist es vortheilhaft, dass nicht P, sondern Q eine runde Zahl sei.

Ich füge am Schluss dieser Abhandlung eine solche Tafel bei, welcher der Normalwerth $Q = 52^0 40'$ (wie dem bisher betrachteten Beispiele) zum Grunde liegt, und die durch zwölf Grade, von $46^0 40'$ bis $58^0 40'$, für alle Werthe des Arguments $Q+q$ von Minute zu Minute fortschreitet. Sie gibt den zugehörigen Werth von $P+p$ auf fünf Decimalen der Secunde genau; ferner den briggischen Logarithmen von m auf zehn Stellen, nemlich in Einheiten der zehnten Decimale; endlich auch noch, in Secunden ausgedrückt, den Werth von $-\frac{dm}{2m\,dq}$; der Gebrauch dieser letzten Columne wird weiter unten erklärt werden. Ich habe die Tafel deshalb mit so vielen Decimalen gegeben, damit sie auch für die allerschärfste Berechnung einer trigonometrischen Vermessung, nemlich für eine

Durchführung derselben mit zehnzifrigen Logarithmen. vollkommen zureiche. Jeder, der diese Tafel zur Berechnung von Messungen innerhalb dieser Zone benutzen will, wird, wenn eine geringere Schärfe ihm genügt (und diess ist allerdings der gewöhnlichste Fall) nach Gefallen einige der letzten Decimalen weglassen. In welcher Form man übrigens auch die *Resultate* einer Messung darstellen mag, so sollte diess, consequenter Weise, immer in einer Schärfe geschehen, die der Schärfe der Messungen selbst entsprechend ist, so dass man aus den Zahlen der Resultate immer rückwärts die beobachteten Grössen eben so scharf wieder finden kann, wie sie gemessen waren. Wählt man also dazu ausschliesslich die Längen und Breiten, so würde trigonometrischen Messungen selbst von nur mässiger Schärfe, durchaus nicht ihr Recht widerfahren, wenn man die Resultate nur in solcher Schärfe ansetzen wollte, wie Längen und Breiten sich auf astronomischem Wege bestimmen lassen: man würde dadurch nur einen falschen Maassstab für die Güte der Arbeit erhalten, und sich oft gerade der durchgreifendsten Prüfungen dieser Güte entäussern.

11.

Die Benutzung der hier betrachteten conformen Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche zur Berechnung trigonometricher Messungen kann auf mehr als Eine Art geschehen: in der gegenwärtigen Abhandlung wird nur von der unmittelbaren Benutzung die Rede sein; andere abgeleitete Arten, sie zu jenem Zwecke zu benutzen, sollen einer zweiten Abhandlung vorbehalten bleiben.

Die unmittelbare Benutzung ist im Wesentlichen schon in der oben angeführten Schrift kurz angedeutet. Ein auf der Oberfläche des Ellipsoids durch kürzeste oder sogenannte geodaetische Linien gebildetes System von Dreiecken wird auf der Oberfläche der Kugel durch ein Dreieckssystem dargestellt, worin die Winkel den entsprechenden auf dem Sphaeroid genau gleich sind, die Seiten hingegen, wenn sie nicht Meridianbögen sind, zwar nicht in aller Strenge Bögen Grösster Kreise werden, aber doch von solchen so wenig abweichen, dass sie in den meisten Fällen als damit ganz zusammenfallend betrachtet werden dürfen, oder dass wenigstens die Abweichung, da, wo die grösste Genauigkeit gefordert wird, mit aller nöthigen Schärfe leicht berechnet werden kann, immer vorausgesetzt, dass

erstens die Dreiecke sich nicht gar zu weit von dem Normal-Parallelkreise entfernen, und

zweitens, dass sie vergleichungsweise, nemlich nach dem Verhältnisse der Seiten zu einem ganzen Erdquadranten, klein sind, wie bei wirklich messbaren Dreiecken immer der Fall ist.

Dieses genaue Anschmiegen der auf die Kugelfläche übertragenen Dreiecksseiten an Grösste Kreisbögen findet nun bei der in Obigem betrachteten conformen Darstellung in noch viel höherm Grade Statt, als bei der a. a. O. vorgeschlagenen. Wo diese [nach Art. 13] bei einem Abstande von $2\frac{1}{2}$ Grad von dem Normal-Parallelkreise eine linearische Vergrösserung von $\frac{1}{530000}$ ergab, würde die neue Methode nur eine Aenderung von $\frac{1}{5500000}$ geben.

Man kann daher das ganze System, nachdem man zuvörderst eine Dreiecksseite auf die Kugelfläche gehörig übertrageu hat, ganz so, als wenn es auf dieser selbst läge, vermittelst der Winkel berechnen, nöthigenfalls mit der eben angedeuteten Modification, sodann für alle Punkte die Werthe der Breiten und Längen bestimmen, und von diesen vermittelst der oben gegebenen Formeln, oder vielmehr was die Breiten betrifft, vermittelst einer solchen Hülfstafel, wie hier beigefügt ist, auf die Breiten und Längen auf der Ellipsoidfläche übergehen.

12.

Es bleibt demnach hier noch übrig, die Bestimmung der Abweichung einer auf die Kugelfläche übertragenen geodaetischen Linie von dem zwischen denselben Endpunkten enthaltenen Grössten Kreisbogen zu entwickeln, wonach sich zugleich in jedem Falle beurtheilen lässt, ob die Berücksichtigung dieser Abweichung nöthig werde. Man kann diese Aufgabe auf mehr als eine Art behandeln: für den gegenwärtigen Zweck, wo die Reduction immer nur eine sehr kleine Grösse betragen kann, scheint folgende Methode die angemessenste zu sein.

Es sei L die in Rede stehende geodaetische Linie auf dem Ellipsoid in unbestimmter Ausdehnung betrachtet, M ihre conforme Darstellung auf der Kugelfläche, F und G die Endpunkte eines bestimmten Stückes von M, endlich N ein durch diese beiden Punkte geführter Grösster Kreis. Jeder Punkt in N werde bestimmt durch seinen Abstand x von einem zunächst willkürlich auf N gewählten Anfangspunkte; jeder Punkt von M durch seinen senkrechten Abstand y von N und durch das dem Fusspunkte dieses Perpendikels zukommende

x. Diese Coordinaten sind als in Theilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden, und müssen demnach noch multiplicirt werden mit A, wenn man sie nach ihrer Lineargrösse, oder mit 206265", wenn man sie in Bogentheilen ausgedrückt verlangt.

Ein Element von M wird durch

$$\sqrt{(\cos y^2 \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}$$

oder durch $\frac{\cos y}{\cos\psi}.\mathrm{d}x$ ausgedrückt, wenn man

$$\frac{\mathrm{d}y}{\cos y\,\mathrm{d}x} = \operatorname{tang}\psi$$

setzt, wo mithin ψ die Neigung des Elements gegen die Parallele mit N bedeutet. Um die Vorstellung zu fixiren, mag man sich die x von der Rechten nach der Linken, die y von unten nach oben wachsend denken, wodurch also der Sinn positiver ψ von selbst bestimmt ist.

Das wie oben mit m bezeichnete Vergrösserungsverhältniss beim Uebertragen der ellipsoidischen Fläche auf die Kugelfläche kann hier wie eine Function von x und y betrachtet werden: die Grösse des Elements von L, dem jenes Element von M entspricht, wird

$$= \frac{A\cos y}{m\cos\psi}.\mathrm{d}x$$

sein, und wenn zur Abkürzung

$$\log\operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}y) = u$$
$$\frac{\cos y}{m} = n$$

gesetzt wird, wo mithin n gleichfalls Function von x und y, oder was auf Eines hinausläuft, von x und u sein wird, so hat man

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

und das Element von L

$$= \frac{An}{\cos\psi}.\mathrm{d}x$$

Die Natur der Linie M wird also durch die Bedingung bestimmt, dass zwischen irgendwelchen bestimmten Grenzen das Integral $\int\frac{n}{\cos\psi}\mathrm{d}x$ oder

$$\int n\sqrt{(1+\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x^2})}\mathrm{d}x$$

ein Minimum werden soll, wofür nach den Regeln der Variationsrechnung sich die Gleichung ergibt

$$\frac{dn}{du}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{du^2}{dx^2}\right)}dx = d\frac{\frac{n\,du}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{du^2}{dx^2}\right)}}$$

oder

$$\frac{dn}{du}\cdot\frac{dx}{\cos\psi} = d.n\sin\psi$$

Unter $\frac{dn}{du}$ ist der partielle Differentialquotient verstanden. Diese Formel ist strenge und allgemeingültig. Für unsern Zweck aber, wo bloss das zwischen F und G liegende Stück der Curve M in Betracht kommt, in deren sämmtlichen Punkten u und ψ nur sehr kleine Werthe haben können, dürfen wir 1 anstatt $\cos\psi$ und $\operatorname{tang}\psi$ anstatt $\sin\psi$ schreiben, mithin

$$\frac{dn}{du}.dx = d.n\operatorname{tang}\psi$$

oder

$$n\operatorname{tang}\psi = \int\frac{dn}{du}dx + \text{Const.}$$

setzen, zugleich aber auch in dieser Formel anstatt der Werthe, welche n und $\frac{dn}{du}$ in der Linie M haben, diejenigen anwenden, welche in den correspondirenden Punkten der Linie N (für $u = 0$ oder $y = 0$) Statt finden, und folglich mit den Werthen von $\frac{1}{m}$ und $-\frac{dm}{mm\,du} = -\frac{dm}{mm\,dy}$ übereinstimmen.

Zur bequemern Ausführung der weitern Entwicklungen sollen jetzt die Abscissen von dem Punkte F an gezählt, oder in diesem Punkte $x = 0$, in G hingegen $x = h$ gesetzt werden; ich setze ferner $\frac{dm}{m\,dy} = l$, welches im Allgemeinen zwar Function von x und y ist, hier aber bloss nach seinem in der Linie N oder für $y = 0$ geltenden Werthe, also als Function von x allein betrachtet wird; endlich seien ψ^0, m^0, l^0, die bestimmten Werthe von ψ, m, l in dem Punkte F, und ψ', m', l' die in dem Punkte G. Die obige Formel wird hienach

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{m\operatorname{tang}\psi^0}{m^0} - m\int\frac{l}{m}dx$$

wo die Integration von $x = 0$ anfängt. Nehmen wir nun an, dass l und m in folgende nach Potenzen von x fortschreitende Reihen

$$l = l^0 + \lambda x + \lambda' xx + \text{ u. s. w.}$$
$$m = m^0(1 + \mu x + \mu' xx + \text{ u. s. w.})$$

entwickelt sind, so ergibt die Rechnung

$$\operatorname{tang}\psi = (1 + \mu x + \mu' xx + \text{ u. s. w.}) \operatorname{tang}\psi^0$$
$$- l^0 x - \tfrac{1}{2}(\lambda + l^0\mu)xx - (\tfrac{1}{3}\lambda' + \tfrac{1}{6}\lambda\mu - \tfrac{1}{6}l^0\mu\mu + \tfrac{1}{2}l^0\mu')x^3 - \text{ u. s. w.}$$

und hieraus, weil $u = \int \operatorname{tang}\psi . \mathrm{d}x$

$$u = (x + \tfrac{1}{2}\mu xx + \tfrac{1}{3}\mu' x^3 + \text{ u. s. w.}) \operatorname{tang}\psi^0$$
$$- \tfrac{1}{2}l^0 xx - \tfrac{1}{6}(\lambda + l^0\mu)x^3 - (\tfrac{1}{12}\lambda' + \tfrac{1}{24}\lambda\mu - \tfrac{1}{24}l^0\mu\mu + \tfrac{1}{8}l^0\mu')x^4 - \text{ u. s. w.}$$

wo keine Constante hinzuzufügen ist, weil für $x = 0$ auch $u = 0$ wird. Da nun auch für $x = h$, $u = 0$ wird, so folgt aus dieser Gleichung

$$\operatorname{tang}\psi^0 = \tfrac{1}{2}l^0 h + (\tfrac{1}{6}\lambda - \tfrac{1}{12}l^0\mu)hh + (\tfrac{1}{12}\lambda' - \tfrac{1}{24}\lambda\mu)h^3 + \text{ u. s. w.}$$

Wird in der Gleichung für ψ auch anstatt x der Werth h, und statt $\operatorname{tang}\psi^0$ der eben gefundene substituirt, so ergibt sich

$$\operatorname{tang}\psi' = - \tfrac{1}{2}l^0 h - (\tfrac{1}{3}\lambda + \tfrac{1}{12}l^0\mu)hh - (\tfrac{1}{4}\lambda' + \tfrac{1}{24}\lambda\mu - \tfrac{1}{12}l^0\mu\mu + \tfrac{1}{8}l^0\mu')h^3 \text{ u. s. w.}$$

Da

$$l' = l^0 + \lambda h + \lambda' hh + \text{ u. s. w}$$
$$m' = m^0(1 + \mu h + \mu' hh + \text{ u. s. w.})$$

so wird

$$(\tfrac{1}{3}l^0 + \tfrac{1}{6}l')h\sqrt[6]{\tfrac{m^0}{m'}} = \tfrac{1}{2}l^0 h + (\tfrac{1}{6}\lambda - \tfrac{1}{12}l^0\mu)hh$$
$$+ (\tfrac{1}{6}\lambda' - \tfrac{1}{36}\lambda\mu + \tfrac{7}{144}l^0\mu\mu - \tfrac{1}{12}l^0\mu')h^3 \text{ u. s. w.}$$
$$-(\tfrac{1}{6}l^0 + \tfrac{1}{3}l')h\sqrt[6]{\tfrac{m'}{m^0}} = - \tfrac{1}{2}l^0 h - (\tfrac{1}{3}\lambda + \tfrac{1}{12}l^0\mu)hh$$
$$- (\tfrac{1}{3}\lambda' + \tfrac{1}{18}\lambda\mu - \tfrac{5}{144}l^0\mu\mu + \tfrac{1}{12}l^0\mu')h^3 \text{ u. s. w.}$$

also in den beiden ersten Gliedern oder bis auf die Ordnung hh mit obigen Werthen von $\operatorname{tang}\psi^0$, $\operatorname{tang}\psi'$ übereinstimmend: diese bequemen Ausdrücke können daher als hinreichend scharfe Werthe dieser Tangenten, oder unter Hinzufügung des Factors 206265″ als die Werthe der Winkel ψ^0, ψ' selbst angenommen werden.

Die Länge der Linie L selbst, zwischen den Punkten auf dem Ellipsoid, denen auf der Kugel die Punkte F, G entsprechen, ist das Integral

$$A\int\frac{\cos y}{m\cos\psi}\,\mathrm{d}x$$

von $x=0$ bis $x=h$ ausgedehnt; es wird aber immer erlaubt sein, darin sowohl $\cos y$ als $\cos\psi=1$ zu setzen, und für m denjenigen Werth, welcher in der Linie M oder für $y=0$ gilt, wodurch also das Integral

$$=A\int\frac{\mathrm{d}x}{m^0(1+\mu x+\mu' xx+\text{ u.s.w.})}$$
$$=\frac{A}{m^0}(h-\tfrac{1}{2}\mu hh+(\tfrac{1}{3}\mu\mu-\tfrac{1}{3}\mu')h^3-\text{ u.s.w.})$$

wird. Es ist immer zureichend, den bis auf die Ordnung hh damit übereinstimmenden Werth

$$\frac{Ah}{\sqrt{m^0 m'}}$$

dafür anzunehmen.

13.

Die Bestimmung der Grössen l^0, l' geschieht auf folgende Weise. Es sei χ der Winkel, welchen an irgend einer Stelle des Grössten Kreisbogens N dieser in dem Sinne wachsender x mit dem Meridian in dem Sinne von Norden nach Süden genommen macht, den Winkel von diesem zu jenem in dem Sinne von der Linken nach der Rechten gezählt; es sei ferner S die Breite an jener Stelle, T die Länge von einem beliebigen Meridian an ostwärts gerechnet. Man hat dann daselbst

$$\mathrm{d}S=-\cos\chi.\mathrm{d}x+\sin\chi.\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}T=-\frac{\sin\chi}{\cos S}\mathrm{d}x-\frac{\cos\chi}{\cos S}\mathrm{d}y$$

und folglich den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}y}=\sin\chi.\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}S}-\frac{\cos\chi}{\cos S}.\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}T}$$

Da nun bei unserer conformen Uebertragung m von der Länge unabhängig oder $\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}T}=0$ ist, so wird

$$l=\sin\chi.\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}S}$$

Bezeichnet man die Werthe von χ in den Punkten F und G mit V^0 und $180^0+V'$ (so dass nach gewöhnlichem Sprachgebrauche V^0 das Azimuth des Grössten Kreisbogens FG in F, und V' das Azimuth des Grössten Kreisbogens

GF in G bedeutet); imgleichen die (immer negativen) Werthe von $\frac{206265'' dm}{2 m dS}$ in denselben Punkten mit $-k^0$, $-k'$, so wird

$$206265'' l^0 = -2k^0 \sin V^0$$
$$206265'' l' = +2k' \sin V'$$

Die im vorhergehenden Artikel gegebenen Ausdrücke für ψ^0, ψ', in Secunden verwandelt, werden daher, wenn man die von der Einheit hier nur unmerklich abweichenden Factoren $\sqrt[4]{\frac{m^0}{m'}}$, $\sqrt[4]{\frac{m'}{m^0}}$ weglässt,

$$\psi^0 = -\tfrac{1}{3}h(2k^0 \sin V^0 - k' \sin V')$$
$$\psi' = -\tfrac{1}{3}h(2k' \sin V' - k^0 \sin V^0)$$

Die dieser Abhandlung beigefügte Tafel gibt in der letzten Columne unter der Ueberschrift k die Werthe von k^0, k' für die entsprechenden Werthe von S, die in der ersten Columne unter der Ueberschrift $Q+q$ aufzusuchen sind; da k immer positiv ist, und $\sin V^0$, $\sin V'$ immer entgegengesetzte Zeichen haben, so wird ψ^0 negativ, ψ' positiv, wenn G westlich von F liegt und umgekehrt: bei der Berechnung erinnere man sich, dass in diesen Formeln h als in Theilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden wird, also der in irgend einem Längenmaasse gegebene Abstand der Punkte F, G zuvor mit dem in gleichem Maasse ausgedrücktem Werthe von A zu dividiren ist.

Da in unserer conformen Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche ein Meridian auf jener wiederum durch einen Meridian auf dieser dargestellt wird, so ist klar, dass jedes Element von L dieselbe Neigung gegen den Meridian hat wie das entsprechende Element von M, und dass folglich die Azimuthe der geodaetischen Linie in ihren beiden Endpunkten resp. $V^0+\psi^0$ und $V'+\psi'$ sein werden: sind aber umgekehrt diese gegeben, so werden sie auf die Kugelfläche reducirt durch Anbringung von $-\psi^0$, $-\psi'$, und für die Berechnung dieser stets fast ganz verschwindenden Reductionen ist es offenbar ganz gleichgültig, wenn man in den obigen Formeln anstatt V^0, V' die Azimuthe auf dem Ellipsoid anwendet.

14.

Um nach den gegebenen Vorschriften die Reductionen der Richtungen, behuf der Übertragung vom Ellipsoid auf die Kugel oder umgekehrt, berechnen zu

können, ist zwar eine genäherte Kenntniss der Grösse der Linien, der orientirten Azimuthe, und der Breiten der Endpunkte erforderlich, was nur durch eine vorläufige Berechnung der Dreiecke zu erhalten ist: allein dieser Umstand ist durchaus unerheblich, da eine vorläufige schon die Ausführung der Messungen Schritt für Schritt begleitende Berechnung ohnehin in vielen Beziehungen räthlich, und zur Centrirung der excentrisch gemessenen Winkel, so wie zur Bestimmung des sphärischen oder sphäroidischen Excesses der Winkelsumme jedes Dreiecks sogar nothwendig ist: ja für den ersten Zweck wird, bei der Geringfügigkeit jener Reductionen, schon eine ganz rohe Annäherung immer zureichen, während das scharfe Centriren zuweilen, bei etwas beträchtlicher Excentricität der Standpunkte eine viel weiter getriebene Annäherung erfordern kann. Ich habe die Vorschriften deshalb entwickelt, damit man, *wenn* man jene Reductionen berücksichtigen will, alles zu ihrer schärfsten Berechnung nöthige bereit finde, oder wenn man sie *nicht* berücksichtigen will, leicht und bestimmt übersehen könne, wie wenig man dadurch aufopfert. Bei dem ganzen Hannoverschen Dreieckssystem sind die Reductionen durchgehends so äusserst gering, dass ihre Berücksichtigung als gänzlich überflüssig erscheint, und in der ganzen Ausdehnung der Zone von zwölf Breitengraden, für welche ich den Hülfsapparat beifüge, bleiben sie noch unterhalb derjenigen Bogensecundentheile, auf welche man sich bei den meisten Messungen in der Rechnung zu beschränken pflegt. Um diess recht evident hervortreten zu lassen, füge ich hier noch die numerische Rechnung für ein Paar Beispiele bei.

In dem Hannoverschen Dreieckssystem kommen die grössten Reductionen vor bei den Richtungen der Seiten des Dreiecks Brocken-Hohehagen-Inselsberg, welches Dreieck zugleich das grösste und das von dem Normal-Parallelkreise am entferntesten liegende ist; bei allen übrigen Dreiecksseiten überschreiten die Reductionen nirgends zwei Tausendtheile der Secunde, und die meisten erreichen nicht einmal den Werth 0"001.

Es ist für diese Punkte

	Breite auf dem Ellipsoid	Breite auf der Kugel	k
Brocken	51° 48′ 2″	51° 46′ 3″	0″164
Hohehagen	51 28 31	51 26 35	0,303
Inselsberg	50 51 9	50 49 16	0,687

Die Logarithmen der Seiten des Dreiecks in Toisen sind

Hohehagen-Inselsberg	4,6393865
Inselsberg-Brocken	4,7353929
Brocken-Hohehagen	4,5502669

Die Azimuthe sind

	Standpunkt Brocken		
Inselsberg	5°	42′	22″
Hohehagen	58	49	8
	Standpunkt Hohehagen		
Brocken	238	9	2
Inselsberg	324	23	1
	Standpunkt Inselsberg		
Hohehagen	144	55	51
Brocken	185	35	21

Man braucht hiebei zwischen Werthen auf dem Sphaeroid und denen auf der Kugel nicht zu unterscheiden, da für die Logarithmen der Abstände erst in der achten oder neunten Decimale, für die Azimuthe erst in den Tausendtheilen der Secunde Ungleichheit eintritt, und für unsern Zweck Logarithmen mit vier Decimalen und Azimuthe in Minuten schon überflüssig genau sind. Die Rechnung nach obigen Formeln gibt hiermit folgende Reductionen, wie sie mit ihren Zeichen zu den Azimuthen auf dem Sphaeroid addirt werden müssen, um die Azimuthe auf der Kugel zu erhalten:

Brocken-Inselsberg	+ 0″00055
Brocken-Hohehagen	+ 0, 00196
Hohehagen-Brocken	— 0, 00238
Hohehagen-Inselsberg	— 0, 00332
Inselsberg-Hohehagen	+ 0, 00428
Inselsberg-Brocken	— 0, 00083

Die Winkel des Dreiecks auf dem Sphaeroid (zwischen den geodätischen Linien) empfangen also zur Reduction auf die Winkel des Kugeldreiecks (zwischen Grössten Kreisbögen) die Aenderungen

Brocken	+0"00141
Hohehagen	—0,00094
Inselsberg	—0,00511

Ein zweites Beispiel entlehne ich aus der trigonometrischen Vermessung der Schweiz *), wo das grösste Hauptdreieck zwischen den Punkten Chasseral, Suchet, Berra eben an die Grenze der Ausdehnung unserer Hülfstafel fällt. Wir haben für diese Punkte

	Breite. auf dem Ellipsoid			Breite. auf der Kugel			k
Chasseral	47°	8'	1"	47°	6'	33"	6"137
Suchet	46	46	23	46	44	57	6,948
Berra	46	40	36	46	39	11	7,173

Die Logarithmen der Dreiecksseiten in Metern sind

Suchet-Berra	4,7474503
Berra-Chasseral	4,7133766
Chassseral-Suchet	4,7808768

Die Azimuthe

	Standpunkt Chasseral		
Suchet	48°	36'	41"
Berra	349	21	54
	Standpunkt Suchet		
Chasseral	228	10	40
Berra	280	47	19
	Standpunkt Berra		
Suchet	101	18	40
Chasseral	169	27	22

Hieraus ergeben sich die Reductionen der Sphaeroid-Azimuthe auf die Kugel-Azimuthe

*) Ergebnisse der trigonometrischen Vermessungen in der Schweiz, herausgegeben von J. Eschmann. Zürich 1840. S. 79. 99. 159. 190. 196.

Chasseral-Suchet	+0″04536
Chasseral-Berra	—0,00966
Suchet-Chasseral	+0,06221
Suchet-Berra	+0,01014
Berra-Suchet	—0,04717
Berra-Chasseral	—0,06039

also auch hier ohne Einfluss auf die Rechnung, die in dem angeführten Werke auf Zehntel der Secunde geführt ist.

15.

Die in den Artt. 12 und 13 behandelte Aufgabe ist zwar durch die gegebenen Vorschriften mit einer für die Anwendung überflüssig ausreichenden Genauigkeit aufgelöset; indessen ist es doch der Mühe werth, und zur gleichmässigen Vollendung einer in der Folge mitzutheilenden Untersuchung sogar nothwendig, für einen speciellen Fall die Genauigkeit noch um eine Ordnung weiter zu treiben: dieser specielle Fall steht unter der Bedingung, dass die Linie N in einem zwischen F und G liegenden Punkte H den Normalparallelkreis treffe. Es ist in diesem Falle vortheilhafter, den Anfangspunkt der x, nicht wie oben in F, sondern in H zu setzen, wodurch bewirkt wird, dass bei der Entwicklung von l und m in nach Potenzen von x fortschreitende Reihen in der erstern das erste und zweite Glied, in der andern das zweite und dritte ausfallen, oder dass sie folgende Form haben:

$$l = \lambda xx + \lambda' x^3 + \text{ u. s. w.}$$
$$m = 1 + \mu x^3 + \mu' x^4 + \text{ u. s. w.}$$

Für unsern Zweck wird von den Coëfficienten in diesen Reihen nur der eine λ erforderlich sein, wofür sich aus der im 9 Art. für $\log m$ gegebenen Formel verbunden mit den Entwicklungen des 13 Art. leicht folgender Ausdruck ableiten lässt:

$$\lambda = -\frac{2ee \cos P \sin P \sin\chi \cos\chi^2}{\cos\varphi \cos\theta}$$

in welcher e, P, φ, θ ihre oben erklärten Bedeutungen behalten, und für χ das in dem Punkte H Statt findende Azimuth des Bogens N zu setzen ist.

Werden obige Reihen bei der Integration der Gleichungen

$$\mathrm{d}.\frac{\operatorname{tang}\psi}{m} = -\frac{l\,\mathrm{d}x}{m}$$

$$\mathrm{d}u = \operatorname{tang}\psi\,.\,\mathrm{d}x$$

angewandt, so ergibt sich

$$\operatorname{tang}\psi = \mathfrak{A}(1+\mu x^3+\mu' x^4+\text{ u. s. w.}) - \tfrac{1}{3}\lambda x^3 - \tfrac{1}{4}\lambda' x^4 - \text{u. s. w.}$$

$$u = \mathfrak{B}+\mathfrak{A}(x+\tfrac{1}{4}\mu x^4+\tfrac{1}{5}\mu' x^5+\text{ u. s. w.}) - \tfrac{1}{12}\lambda x^4 - \tfrac{1}{20}\lambda' x^5 - \text{ u. s. w.}$$

Die durch die Integration eingeführten Constanten, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, lassen sich durch die Bedingung bestimmen, dass $u = 0$ werden muss für die beiden Werthe von x, welche den Punkten F, G entsprechen. Es seien diese Werthe $x = -\tfrac{1}{2}(h-\delta)$ und $x = +\tfrac{1}{2}(h+\delta)$, wo δ den Werth von $2x$ in dem mitten zwischen F und G liegenden Punkte ausdrückt, und allgemein zu reden eine Grösse von derselben Ordnung wie h ist, oder von einer höhern, wenn H dieser Mitte sehr nahe liegt. Man leitet hieraus leicht folgenden auf die Ordnung h^3 (einschl.) genauen Ausdruck für $\mathfrak{A}$ ab

$$\mathfrak{A} = \frac{\lambda((h+\delta)^4-(h-\delta)^4)}{192\,h} = \tfrac{1}{24}\lambda\delta(hh+\delta\delta)$$

Substituirt man diesen in der Reihe für $\operatorname{tang}\psi$, und legt dann der Veränderlichen x die bestimmten Werthe $-\tfrac{1}{2}(h-\delta)$, $+\tfrac{1}{2}(h+\delta)$ bei, so ergibt sich, gleichfalls auf die dritte Ordnung genau,

$$\operatorname{tang}\psi^0 = \tfrac{1}{24}\lambda h(hh-2h\delta+3\delta\delta)$$

$$\operatorname{tang}\psi' = -\tfrac{1}{24}\lambda h(hh-2h\delta+3\delta\delta)$$

In dem speciellen Fall der in der Folge zu entwickelnden Untersuchung kommt übrigens zu der oben bezeichneten Bedingung noch der Umstand hinzu, dass der Normalparallelkreis mitten inne liegt zwischen den beiden Parallelkreisen, auf welchen sich die Punkte F, G befinden, und in Folge dieses Umstandes werden schon die abgekürzten Ausdrücke

$$\operatorname{tang}\psi^0 = \tfrac{1}{24}\lambda h^3$$

$$\operatorname{tang}\psi' = -\tfrac{1}{24}\lambda h^3$$

auf die dritte Ordnung genau sein, wie sich leicht auf folgende Art zeigen lässt. Bezeichnet man die Breite von F mit $Q+q$, die von G mit $Q-q$, so geben die sphaerischen Dreiecke F, H, Pol und G, H, Pol die Gleichungen

$$\sin(Q+q) = \sin Q \cos\tfrac{1}{2}(h-\delta) + \cos Q \sin\tfrac{1}{2}(h-\delta)\cos\chi$$
$$\sin(Q-q) = \sin Q \cos\tfrac{1}{2}(h+\delta) - \cos Q \sin\tfrac{1}{2}(h+\delta)\cos\chi$$

und ihre Summe mit $2\cos Q$ dividirt

$$\operatorname{tang} Q.(\cos q - \cos\tfrac{1}{2}h.\cos\tfrac{1}{2}\delta) = -\cos\tfrac{1}{2}h \sin\tfrac{1}{2}\delta \cos\chi$$

Da nun offenbar $\cos q - \cos\frac{1}{2}h.\cos\frac{1}{2}\delta$ eine Grösse zweiter Ordnung ist, so wird auch $\sin\frac{1}{2}\delta\cos\chi$, und $\delta\cos\chi$ von dieser Ordnung sein, mithin, da λ den Factor $\cos\chi^2$ implicirt, $\lambda hh\delta$ von der vierten, und $\lambda h\delta\delta$ von der fünften Ordnung; hiedurch ist also die Weglassung dieser Glieder gerechtfertigt.

Das Endresultat dieser Entwickelung ist demnach, unter der angegebenen Voraussetzung, in folgenden Formeln enthalten, wo anstatt der Tangenten von ψ^0, ψ' die Bögen selbst geschrieben sind:

$$\psi^0 = -\frac{ee\cos P\sin P\sin\chi\cos\chi^2 h^3}{12\cos\varphi\cos\theta}$$
$$\psi' = +\frac{ee\cos P\sin P\sin\chi\cos\chi^2 h^3}{12\cos\varphi\cos\theta}$$

16.

Die Berechnung des Dreieckssystems auf der Kugel zerfällt in drei Hauptstücke:

1) die Ausgleichung der Winkel nach allen den Bedingungsgleichungen, welche die Beschaffenheit des Systems darbietet.
2) die Berechnung der sämmtlichen Dreiecksseiten.
3) die Bestimmung der Längen und Breiten der Dreieckspunkte, in Verbindung mit der Orientirung der von jedem derselben ausgehenden Dreiecksseiten.

Die Verwandlung der Längen und Breiten auf der Kugel in die wahren Längen und Breiten auf dem Sphaeroid geschieht dann für die Längen durch die Division mit dem constanten Divisor α, für die Breiten vermittelst der hier beigefügten Hülfstafel, oder einer andern auf ähnliche Weise besonders construirten, wenn man einen andern Normal-Parallelkreis zu wählen Ursache hat.

Mit Übergehung der beiden ersten auf bekannten Gründen beruhenden Geschäfte füge ich hier noch einiges in Beziehung auf das dritte bei, welches sich auf die Auflösung der Aufgabe reducirt*): aus der in Bogentheilen ausgedrückten

*) Da diese Aufgabe hier wie eine für sich bestehende betrachtet wird, so können ohne Nachtheil einige Buchstaben hier in anderer Bedeutung als oben gebraucht werden.

Grösse einer Dreiecksseite r, ihrem Azimuthe T an dem Anfangspunkte, und der Breite dieses Anfangspunkts S, abzuleiten das Azimuth der Seite an dem andern Endpunkte $T' \pm 180^0$, die Breite desselben S' und den Längenunterschied beider Punkte λ. Da dies nichts weiter ist als die Auflösung eines sphärischen Dreiecks, so verdient diese Aufgabe nur deshalb hier einen Platz, weil die gewöhnlich gebrauchten Formeln hier einiger Umformung bedürfen, wenn man in den Resultaten (nach der Bemerkung im 10 Art.) dieselbe Genauigkeit erreichen will, in welcher r gegeben ist, ohne mehrzifrige Logarithmen zu Hülfe zu nehmen. Um unter den verschiedenen Auflösungsarten nach jedesmaligem Bedürfniss wählen zu können, setze ich zuvörderst diejenigen hieher, die auf den bekannten elementaren Formeln der sphärischen Trigonometrie beruhen.

Erste Methode

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} s &= \cos T \operatorname{tang} r \\
\operatorname{tang} \lambda &= \frac{\operatorname{tang} T \sin s}{\cos(S-s)} \\
\operatorname{tang} S' &= \cos\lambda \operatorname{tang}(S-s) \\
\sin T' &= \frac{\sin T \cos S}{\cos S'}
\end{aligned}$$

Zweite Methode

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} R &= \frac{\operatorname{tang} S}{\cos T} \\
\operatorname{tang} T' &= \frac{\operatorname{tang} T \cos R}{\cos(R-r)} \\
\operatorname{tang} S' &= \cos T' \operatorname{tang}(R-r) \\
\sin\lambda &= \frac{\sin r \sin T}{\cos S'} = \frac{\sin r \sin T'}{\cos S}
\end{aligned}$$

Dritte Methode

$$\begin{aligned}
\sin(45^0+\tfrac{1}{2}S')\sin\tfrac{1}{2}(T'+\lambda) &= \sin(45^0+\tfrac{1}{2}(S+r))\sin\tfrac{1}{2}T \\
\sin(45^0+\tfrac{1}{2}S')\cos\tfrac{1}{2}(T'+\lambda) &= \sin(45^0+\tfrac{1}{2}(S-r))\cos\tfrac{1}{2}T \\
\cos(45^0+\tfrac{1}{2}S')\sin\tfrac{1}{2}(T'-\lambda) &= \cos(45^0+\tfrac{1}{2}(S+r))\sin\tfrac{1}{2}T \\
\cos(45^0+\tfrac{1}{2}S')\cos\tfrac{1}{2}(T'-\lambda) &= \cos(45^0+\tfrac{1}{2}(S-r))\cos\tfrac{1}{2}T
\end{aligned}$$

In Beziehung auf die Kürze der Rechnung hat die dritte Methode einigen Vorzug vor den beiden andern, während diese im Allgemeinen die Resultate ein wenig schärfer geben können, namentlich λ immer mit völlig genügender Schärfe: T' wird aber, wenn es einem rechten Winkel nahe kommt, durch die erste Methode vergleichungsweise nur ungenau bestimmt. Verlangt man aber alle drei Resultate mit gleichmässiger und, aus dem Gesichtspunkte des 10 Art. betrach-

tet, zureichender Schärfe, so ist zu einer directen strengen Auflösung folgende Umformung am vortheilhaftesten, wobei die beiden ersten Formeln dieselben bleiben wie in der ersten Methode.

Vierte Methode

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} s &= \cos T \operatorname{tang} r \\
\operatorname{tang} \lambda &= \frac{\operatorname{tang} T \sin s}{\cos(S-s)} \\
\operatorname{tang} t &= \sin T \sin r \operatorname{tang}(S-s) \\
\sin \tau &= \sin T \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} r \sin s \\
\sin \sigma &= \operatorname{tang} t \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \lambda \cos(S-s) \\
S' &= S-s-\sigma \\
T' &= T-t-\tau
\end{aligned}$$

Diese vierte Methode lässt für die Schärfe nichts zu wünschen übrig; aber die unmittelbar in dieser Form geführte Rechnung erfordert ein etwas beschwerliches Interpoliren bei Bestimmung der kleinen Bögen durch die Logarithmen der Tangenten oder Sinus; man kann jedoch diesem Übelstande leicht ausweichen, indem man die trigonometrischen Functionen in Reihen entwickelt, wodurch man in den Stand gesetzt wird, ohne Nachtheil für die Schärfe, die Rechnungen vermittelst der Logarithmen der Zahlen zu führen. Es wird zureichend sein, von dieser Verwandlung nur die Hauptmomente hieher zu setzen.

Es sei

$$\begin{aligned}
r \cos T &= s^0 \\
r \sin T &= v
\end{aligned}$$

Es wird dann, wenn zur Abkürzung die Grösse des Bogens von einer Secunde in Theilen des Halbmessers oder der Bruch $\frac{\pi}{648000}$ durch ρ bezeichnet und r wie eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird, bis auf Grössen fünfter Ordnung (ausschliesslich) genau

$$s = s^0(1+\tfrac{1}{3}\rho\rho rr-\tfrac{1}{3}\rho\rho s^0 s^0) = s^0(1+\tfrac{1}{3}\rho\rho vv)$$

Setzt man dann ferner

$$\begin{aligned}
v \operatorname{tang}(S-s) &= t^0 \\
\frac{v}{\cos(S-s)} &= \lambda^0
\end{aligned}$$

so wird

$$t = t^0(1 - \tfrac{1}{6}\rho\rho rr - \tfrac{1}{3}\rho\rho t^0 t^0)$$
$$\lambda = \lambda^0(1 - \tfrac{1}{6}\rho\rho s^0 s^0 - \tfrac{1}{3}\rho\rho t^0 t^0)$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2}\rho v t^0(1 - \tfrac{1}{12}\rho\rho rr - \tfrac{1}{4}\rho\rho s^0 s^0 - \tfrac{1}{4}\rho\rho t^0 t^0)$$
$$\tau = \tfrac{1}{2}\rho v s^0(1 + \tfrac{5}{12}\rho\rho rr - \tfrac{1}{2}\rho\rho s^0 s^0)$$

für t und λ auf die fünfte, für σ und τ auf die sechste Ordnung (ausschl.) genau. Noch bequemer und eben so genau ist es, hiebei sogleich die Logarithmen zu gebrauchen, wodurch die Formeln, wenn man zur Abkürzung das Product der Grösse $\frac{1}{12}\rho\rho$ in den Modulus der briggischen Logarithmen mit μ bezeichnet, folgende Gestalt erhalten:

$$\log s = \log s^0 + 4\mu rr - 4\mu s^0 s^0$$
$$\log t = \log t^0 - 2\mu rr - 4\mu t^0 t^0$$
$$\log \lambda = \log \lambda^0 - 2\mu s^0 s^0 - 4\mu t^0 t^0$$
$$\log \sigma = \log \tfrac{1}{2}\rho v t^0 - \mu rr - 3\mu s^0 s^0 - 3\mu t^0 t^0$$
$$\log \tau = \log \tfrac{1}{2}\rho v s^0 + 5\mu rr - 6\mu s^0 s^0$$

Diese fünf Formeln in Verbindung mit den vorhergehenden für s^0, t^0, λ^0 bilden eine fünfte Auflösungsart, deren eigenthümliches es ist, dass genäherte Werthe der Grössen s, t, λ, σ, τ durch kleine sehr leicht zu berechnende an den Logarithmen anzubringende Correctionen zu scharfen erhoben werden. Die hiebei vorkommenden constanten Logarithmen sind

$$\log \rho = 4{,}6855748668 \quad (-10)$$
$$\log \tfrac{1}{2}\rho = 4{,}3845448712 \quad (-10)$$
$$\log \mu = 7{,}9297527989 \quad (-20)$$

oder wenn jene Correctionen sofort als Einheiten der siebenten Decimale erscheinen sollen

$$\log \mu = 4{,}9297527989 \quad (-10)$$

von welchen Logarithmen jedoch hier nur die ersten Ziffern zur Anwendung kommen.

17.

Viel einfacher lassen sich aber die Relationen zwischen den Grössen r, S, S', T, T', λ ausdrücken, wenn man von dem Mittel der beiden Breiten

45

und der beiden Azimuthe ausgeht. Schreiben wir

$$\tfrac{1}{2}(S+S') = B, \quad \tfrac{1}{2}(T+T') = A, \quad S-S' = b, \quad T-T' = a$$

so haben wir zuvörderst die Formeln

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}r \sin A &= \sin\tfrac{1}{2}\lambda \cos B \\ \sin\tfrac{1}{2}r \cos A &= \cos\tfrac{1}{2}\lambda \sin\tfrac{1}{2}b \\ \cos\tfrac{1}{2}r \sin\tfrac{1}{2}a &= \sin\tfrac{1}{2}\lambda \sin B \\ \cos\tfrac{1}{2}r \cos\tfrac{1}{2}a &= \cos\tfrac{1}{2}\lambda \cos\tfrac{1}{2}b \end{aligned}$$

wonach man also, wenn A, B, r als gegeben betrachtet werden, a und λ durch die Formeln

$$\sin A \operatorname{tang} B \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}r = \sin\tfrac{1}{2}a$$

$$\frac{\sin A \sin\frac{1}{2}r}{\cos B} = \sin\tfrac{1}{2}\lambda$$

und sodann b aus

$$\frac{\cos A \operatorname{tang}\frac{1}{2}r}{\cos\frac{1}{2}a} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b$$

oder

$$\frac{\cos A \sin\frac{1}{2}r}{\cos\frac{1}{2}\lambda} = \sin\tfrac{1}{2}b$$

bestimmt. Anstatt dieser Formeln wird man aber, wegen der Kleinheit von r, a, λ, b, lieber die folgenden anwenden, welche viel bequemer, und bis auf die fünfte Ordnung (ausschl.) genau sind:

$$\begin{aligned} a^0 &= r \sin A \operatorname{tang} B \\ \lambda^0 &= \frac{r \sin A}{\cos B} \\ b^0 &= r \cos A \\ \log a &= \log a^0 + \mu rr + \tfrac{1}{2}\mu a^0 a^0 \\ \log\lambda &= \log\lambda^0 - \tfrac{1}{2}\mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\lambda^0\lambda^0 \\ \log b &= \log b^0 + \tfrac{1}{2}\mu a^0 a^0 + \mu\lambda^0\lambda^0 \end{aligned}$$

wo, wie man sieht, die dritte Correction der Summe der ersten und der doppelten zweiten gleich ist.

Für unsere Aufgabe geben zwar diese Formeln keine directe Auflösung: indessen kann man sie als Controlle oder als concentrirte übersichtliche Inhaltswiederholung der directen Auflösung gebrauchen. Wer aber in numerischen Rechnungen einige Gewandtheit besitzt, wird sie auch leicht zu einer indirecten Auflösung benutzen können, und dieser, zumal wo anderer Zwecke wegen eine grob genäherte schon vorangegangen ist, wegen ihrer Bequemlichkeit und Schärfe vor allen andern Auflösungen den Vorzug geben.

T A F E L N.

Q+q	P+p	log m +	k	Q+q	P+p	log m +	k
46° 40′	46° 41′ 24″74900	10559	7″141	47° 30′	47° 31′ 31″34250	6759	5″313
41	42 24.88515	10472	7.101	31	32 31.46992	6694	5.279
42	43 25.02112	10385	7.062	32	33 31.59717	6630	5.245
43	44 25.15692	10299	7.024	33	34 31.72424	6566	5.211
44	45 25.29255	10213	6.985	34	35 31.85113	6502	5.178
45	46 25.42799	10128	6.946	35	36 31.97785	6439	5.144
46	47 25.56327	10043	6.907	36	37 32.10440	6376	5.111
47	48 25.69837	9959	6.869	37	38 32.23077	6314	5.078
48	49 25.83330	9875	6.830	38	39 32.35696	6252	5.045
49	50 25.96805	9792	6.792	39	40 32.48299	6190	5.012
50	51 26.10262	9709	6.754	40	41 32.60883	6129	4.979
51	52 26.23702	9626	6.716	41	42 32.73451	6068	4.946
52	53 26.37125	9544	6.678	42	43 32.86001	6008	4.913
53	54 26.50530	9462	6.640	43	44 32.98533	5948	4.880
54	55 26.63918	9381	6.602	44	45 33.11048	5888	4.848
55	56 26.77288	9301	6.565	45	46 33.23546	5829	4.816
56	57 26.90641	9221	6.527	46	47 33.36026	5770	4.783
57	58 27.03977	9141	6.490	47	48 33.48488	5712	4.751
58	59 27.17295	9062	6.452	48	49 33.60934	5654	4.719
59	47 0 27.30595	8983	6.415	49	50 33.73361	5596	4.687
47 0	1 27.43878	8904	6.378	50	51 33.85772	5539	4.655
1	2 27.57144	8826	6.341	51	52 33.98165	5482	4.624
2	3 27.70392	8749	6.304	52	53 34.10540	5426	4.592
3	4 27.83622	8672	6.267	53	54 34.22898	5370	4.560
4	5 27.96836	8595	6.230	54	55 34.35239	5314	4.529
5	6 28.10031	8519	6.194	55	56 34.47562	5259	4.498
6	7 28.23210	8444	6.157	56	57 34.59867	5204	4.466
7	8 28.36370	8369	6.121	57	58 34.72156	5149	4.435
8	9 28.49514	8294	6.084	58	59 34.84426	5095	4.404
9	10 28.62640	8219	6.048	59	48 0 34.96680	5042	4.373
10	11 28.75748	8146	6.012	48° 0	1 35.08916	4988	4.343
11	12 28.88839	8072	5.976	1	2 35.21134	4935	4.312
12	13 29.01913	7999	5.940	2	3 35.33335	4883	4.281
13	14 29.14969	7927	5.904	3	4 35.45519	4830	4.251
14	15 29.28007	7855	5.869	4	5 35.57685	4778	4.221
15	16 29.41028	7783	5.833	5	6 35.69834	4727	4.190
16	17 29.54032	7712	5.798	6	7 35.81965	4676	4.160
17	18 29.67018	7641	5.762	7	8 35.94079	4625	4.130
18	19 29.79987	7570	5.727	8	9 36.06175	4575	4.100
19	20 29.92938	7501	5.692	9	10 36.18254	4525	4.070
20	21 30.05872	7431	5.657	10	11 36.30316	4475	4.041
21	22 30.18788	7362	5.622	11	12 36.42360	4426	4.011
22	23 30.31687	7293	5.587	12	13 36.54387	4377	3.982
23	24 30.44569	7225	5.553	13	14 36.66396	4328	3.952
24	25 30.57433	7157	5.518	14	15 36.78388	4280	3.923
25	26 30.70279	7090	5.483	15	16 36.90362	4232	3.894
26	27 30.83108	7023	5.449	16	17 37.02319	4184	3.865
27	28 30.95920	6956	5.415	17	18 37.14259	4137	3.836
28	29 31.08714	6890	5.381	18	19 37.26181	4090	3.807
29	30 31.21491	6825	5.346	19	20 37.38086	4044	3.778
30	31 31.34250	6759	5.313	20	21 37.49973	3998	3.749

Q + q	P + p	log m +	k	Q + q	P + p	log m +	k
48° 20′	48° 21′ 37″49973	3998	3″749	49° 10′	49° 11′ 43″22141	2112	2″454
21	22 37.61843	3952	3.721	11	12 43.33141	2082	2.431
22	23 37.73695	3907	3.692	12	13 43.44123	2052	2.408
23	24 37.85530	3862	3.664	13	14 43.55088	2023	2.385
24	25 37.97348	3817	3.636	14	15 43.66036	1994	2.362
25	26 38.09148	3773	3.608	15	16 43.76967	1965	2.339
26	27 38.20931	3729	3.580	16	17 43.87880	1937	2.317
27	28 38.32696	3685	3.552	17	18 43.98775	1908	2.294
28	29 38.44444	3641	3.524	18	19 44.09653	1880	2.272
29	30 38.56175	3598	3.496	19	20 44.20514	1853	2.250
30	31 38.67888	3556	3.469	20	21 44.31358	1825	2.227
31	32 38.79583	3514	3.441	21	22 44.42184	1798	2.205
32	33 38.91262	3472	3.414	22	23 44.52993	1771	2.183
33	34 39.02923	3430	3.387	23	24 44.63784	1745	2.162
34	35 39.14566	3389	3.360	24	25 44.74558	1718	2.140
35	36 39.26192	3348	3.333	25	26 44.85315	1692	2.118
36	37 39.37801	3307	3.306	26	27 44.96054	1666	2.097
37	38 39.49392	3267	3.279	27	28 45.06777	1641	2.075
38	39 39.60966	3227	3.252	28	29 45.17481	1615	2.054
39	40 39.72522	3187	3.226	29	30 45.28169	1590	2.033
40	41 39.84061	3148	3.199	30	31 45.38838	1566	2.012
41	42 39.95583	3109	3.173	31	32 45.49491	1541	1.991
42	43 40.07087	3070	3.146	32	33 45.60126	1517	1.970
43	44 40.18574	3031	3.120	33	34 45.70744	1493	1.949
44	45 40.30043	2993	3.094	34	35 45.81345	1469	1.928
45	46 40.41495	2956	3.068	35	36 45.91928	1446	1.908
46	47 40.52929	2918	3.042	36	37 46.02494	1422	1.887
47	48 40.64347	2881	3.017	37	38 46.13043	1399	1.867
48	49 40.75746	2844	2.991	38	39 46.23574	1377	1.847
49	50 40.87129	2808	2.965	39	40 46.34088	1354	1.827
50	51 40.98494	2772	2.940	40	41 46.44584	1332	1.807
51	52 41.09841	2736	2.915	41	42 46.55063	1310	1.787
52	53 41.21171	2700	2.889	42	43 46.65525	1288	1.767
53	54 41.32484	2665	2.864	43	44 46.75970	1267	1.747
54	55 41.43780	2630	2.839	44	45 46.86397	1245	1.728
55	56 41.55058	2595	2.814	45	46 46.96807	1224	1.708
56	57 41.66318	2561	2.790	46	47 47.07199	1203	1.689
57	58 41.77561	2527	2.765	47	48 47.17574	1183	1.670
58	59 41.88787	2493	2.740	48	49 47.27932	1163	1.651
59	49 0 41.99996	2460	2.716	49	50 47.38273	1142	1.632
49° 0	1 42.11187	2427	2.692	50	51 47.48596	1123	1.613
1	2 42.22360	2394	2.667	51	52 47.58902	1103	1.594
2	3 42.33517	2362	2.643	52	53 47.69191	1084	1.575
3	4 42.44655	2329	2.619	53	54 47.79462	1064	1.556
4	5 42.55777	2297	2.595	54	55 47.89716	1045	1.538
5	6 42.66881	2266	2.572	55	56 47.99952	1027	1.520
6	7 42.77968	2234	2.548	56	57 48.10172	1008	1.501
7	8 42.89037	2203	2.524	57	58 48.20374	990	1.483
8	9 43.00089	2172	2.501	58	59 48.30559	972	1.465
9	10 43.11124	2142	2.477	59	50 0 48.40726	954	1.447
10	11 43.22141	2112	2.454	50 0	1 48.50876	936	1.429

Q + q	P + p	log m +	k	Q + q	P + p	log m +	k
50° 0'	50° 1' 48"50876	936	1"429	50° 50'	50° 51' 53"36348	305	0"678
1	2 48.61009	919	1.412	51	52 53.45618	297	0.666
2	3 48.71124	902	1.394	52	53 53.54870	289	0.654
3	4 48.81222	885	1.377	53	54 53.64105	281	0.642
4	5 48.91303	868	1.359	54	55 53.73323	273	0.630
5	6 49.01367	852	1.342	55	56 53.82524	265	0.618
6	7 49.11413	835	1.325	56	57 53.91708	258	0.606
7	8 49.21442	819	1.308	57	58 54.00874	251	0.595
8	9 49.31454	803	1.291	58	59 54.10023	243	0.583
9	10 49.41448	787	1.274	59	51 0 54.19155	236	0.572
10	11 49.51425	772	1.257	51 0	1 54.28270	229	0.561
11	12 49.61385	757	1.241	1	2 54.37367	223	0.550
12	13 49.71327	742	1.224	2	3 54.46447	216	0.539
13	14 49.81253	727	1.208	3	4 54.55511	209	0.528
14	15 49.91161	712	1.191	4	5 54.64556	203	0.517
15	16 50.01051	697	1.175	5	6 54.73585	197	0.506
16	17 50.10925	683	1.159	6	7 54.82597	191	0.496
17	18 50.20781	669	1.143	7	8 54.91591	185	0.485
18	19 50.30619	655	1.127	8	9 55.00568	179	0.475
19	20 50.40441	641	1.112	9	10 55.09528	173	0.465
20	21 50.50245	628	1.096	10	11 55.18471	167	0.454
21	22 50.60032	615	1.080	11	12 55.27397	162	0.444
22	23 50.69802	601	1.065	12	13 55.36305	156	0.435
23	24 50.79554	589	1.050	13	14 55.45196	151	0.425
24	25 50.89290	576	1.034	14	15 55.54070	146	0.415
25	26 50.99007	563	1.019	15	16 55.62927	141	0.405
26	27 51.08708	551	1.004	16	17 55.71767	136	0.396
27	28 51.18391	539	0.990	17	18 55.80590	131	0.387
28	29 51.28058	527	0.975	18	19 55.89395	127	0.377
29	30 51.37706	515	0.960	19	20 55.98183	122	0.368
30	31 51.47338	503	0.946	20	21 56.06955	118	0.359
31	32 51.56952	492	0.931	21	22 56.15709	113	0.350
32	33 51.66549	480	0.917	22	23 56.24445	109	0.342
33	34 51.76129	469	0.903	23	24 56.33165	105	0.333
34	35 51.85692	458	0.889	24	25 56.41867	101	0.324
35	36 51.95237	447	0.875	25	26 56.50553	97	0.316
36	37 52.04765	437	0.861	26	27 56.59221	93	0.308
37	38 52.14276	426	0.847	27	28 56.67872	89	0.299
38	39 52.23770	416	0.833	28	29 56.76506	86	0.291
39	40 52.33246	406	0.820	29	30 56.85123	82	0.283
40	41 52.42705	396	0.806	30	31 56.93722	79	0.275
41	42 52.52147	386	0.793	31	32 57.02305	75	0.267
42	43 52.61572	376	0.780	32	33 57.10870	72	0.160
43	44 52.70979	367	0.767	33	34 57.19418	69	0.252
44	45 52.80369	358	0.754	34	35 57.27950	66	0.245
45	46 52.89742	348	0.741	35	36 57.36464	63	0.237
46	47 52.99098	339	0.728	36	37 57.44960	60	0.230
47	48 53.08436	331	0.715	37	38 57.53440	57	0.223
48	49 53.17757	322	0.703	38	39 57.61903	55	0.216
49	50 53.27062	313	0.690	39	40 57.70348	52	0.209
50	51 53.36348	305	0.678	40	41 57.78777	50	0.202

$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k
51° 40′	51° 41′ 57″78777	50	0″202	52° 30′	52° 32′ 1″78428	0	0″006
41	42 57.87188	47	0.196	31	33 1.85986		0.005
42	43 57.95582	45	0.189	32	34 1.93528		0.004
43	44 58.03959	43	0.183	33	35 2.01053		0.003
44	45 58.12319	40	0.176	34	36 2.08561		0.002
45	46 58.20662	38	0.170	35	37 2.16052		0.001
46	47 58.28988	36	0.164	36	38 2.23526		0.001
47	48 58.37296	34	0.158	37	39 2.30982		0.001
48	49 58.45588	32	0.152	38	40 2.38422		0.000
49	50 58.53862	31	0.146	39	41 2.45845		0.000
50	51 58.62120	29	0.141	40	42 2.53251		0.000
51	52 58.70360	27	0.135	41	43 2.60640		0.000
52	53 58.78583	25	0.130	42	44 2.68013		0.000
53	54 58.86789	24	0.124	43	45 2.75368		0.001
54	55 58.94978	22	0.119	44	46 2.82706		0.001
55	56 59.03150	21	0.114	45	47 2.90027		0.001
56	57 59.11305	20	0.109	46	48 2.97331		0.002
57	58 59.19443	18	0.104	47	49 3.04619		0.003
58	59 59.27563	17	0.099	48	50 3.11889		0.004
59	52 0 59.35667	16	0.095	49	51 3.19143		0.005
52 0	1 59.43754	15	0.090	50	52 3.26379		0.006
1	2 59.51823	14	0.086	51	53 3.33599		0.007
2	3 59.59876	13	0.081	52	54 3.40802	0	0.008
3	4 59.67911	12	0.077	53	55 3.47987	1	0.010
4	5 59.75929	11	0.073	54	56 3.55156	1	0.011
5	6 59.83931	10	0.069	55	57 3.62308	1	0.013
6	7 59.91915	9	0.065	56	58 3.69443	1	0.014
7	8 59.99882	8	0.061	57	59 3.76561	1	0.016
8	10 0.07832	8	0.058	58	53 0 3.83662	1	0.018
9	11 0.15765	7	0.054	59	1 3.90747	2	0.020
10	12 0.23681	6	0.051	53 0	2 3.97814	2	0.023
11	13 0.31580	6	0.047	1	3 4.04864	2	0.025
12	14 0.39462	5	0.044	2	4 4.11898	2	0.027
13	15 0.47327	5	0.041	3	5 4.18915	3	0.030
14	16 0.55175	4	0.038	4	6 4.25914	3	0.033
15	17 0.63006	4	0.035	5	7 4.32897	4	0.036
16	18 0.70820	3	0.032	6	8 4.39863	4	0.038
17	19 0.78617	3	0.030	7	9 4.46813	5	0.041
18	20 0.86397	2	0.027	8	10 4.53745	5	0.044
19	21 0.94159	2	0.025	9	11 4.60660	6	0.048
20	22 1.01905	2	0.023	10	12 4.67559	6	0.051
21	23 1.09634	2	0.020	11	13 4.74440	7	0.054
22	24 1.17346	1	0.018	12	14 4.81305	8	0.058
23	25 1.25040	1	0.016	13	15 4.88153	8	0.062
24	26 1.32718	1	0.014	14	16 4.94984	9	0.065
25	27 1.40379	1	0.013	15	17 5.01798	10	0.069
26	28 1.48023	1	0.011	16	18 5.08595	11	0.073
27	29 1.55649	1	0.010	17	19 5.15376	12	0.078
28	30 1.63259	0	0.008	18	20 5.22139	14	0.082
29	31 1.70852		0.007	19	21 5.28886	14	0.086
30	32 1.78428	0	0.006	20	22 5.35616	15	0.091

$Q+q$	$P+p$	$\log m$	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$	k
53° 20′	53° 22′ 5″35616	15	0″091	54° 10′	54° 12′ 8″50704	169	0″460
21	23 5.42329	16	0.095	11	13 8.56579	175	0.471
22	24 5.49025	17	0.100	12	14 8.62438	180	0.481
23	25 5.55705	18	0.105	13	15 8.68279	186	0.492
24	26 5.62367	20	0.110	14	16 8.74104	192	0.502
25	27 5.69013	21	0.115	15	17 8.79913	199	0.513
26	28 5.75642	22	0.120	16	18 8.85705	205	0.524
27	29 5.82254	24	0.125	17	19 8.91480	212	0.535
28	30 5.88849	26	0.131	18	20 8.97238	218	0.546
29	31 5.95428	27	0.136	19	21 9.02980	225	0.557
30	32 6.01989	29	0.142	20	22 9.08705	232	0.569
31	33 6.08534	31	0.147	21	23 9.14413	239	0.580
32	34 6.15062	33	0.153	22	24 9.20105	246	0.592
33	35 6.21573	34	0.159	23	25 9.25781	253	0.604
34	36 6.28068	36	0.165	24	26 9.31439	261	0.615
35	37 6.34545	38	0.171	25	27 9.37081	268	0.627
36	38 6.41006	41	0.178	26	28 9.42706	276	0.639
37	39 6.47450	43	0.184	27	29 9.48315	284	0.652
38	40 6.53877	45	0.191	28	30 9.53907	292	0.664
39	41 6.60288	47	0.197	29	31 9.59483	300	0.676
40	42 6.66681	50	0.204	30	32 9.65042	309	0.689
41	43 6.73058	53	0.211	31	33 9.70584	317	0.701
42	44 6.79418	55	0.218	32	34 9.76110	326	0.714
43	45 6.85762	58	0.225	33	35 9.81619	335	0.727
44	46 6.92088	61	0.232	34	36 9.87111	344	0.740
45	47 6.98398	64	0.240	35	37 9.92587	353	0.753
46	48 7.04691	67	0.247	36	38 9.98046	362	0.766
47	49 7.10967	70	0.255	37	39 10.03489	372	0.780
48	50 7.17227	73	0.262	38	40 10.08915	381	0.793
49	51 7.23470	76	0.270	39	41 10.14325	391	0.807
50	52 7.29696	79	0.278	40	42 10.19718	401	0.820
51	53 7.35905	83	0.286	41	43 10.25094	411	0.834
52	54 7.42098	86	0.294	42	44 10.30454	421	0.848
53	55 7.48273	90	0.303	43	45 10.35797	432	0.862
54	56 7.54432	94	0.311	44	46 10.41124	443	0.876
55	57 7.60575	98	0.319	45	47 10.46434	453	0.890
56	58 7.66700	102	0.328	46	48 10.51727	464	0.905
57	59 7.72809	106	0.337	47	49 10.57004	476	0.919
58	54 0 7.78901	110	0.345	48	50 10.62265	487	0.934
59	1 7.84977	114	0.354	49	51 10.67509	498	0.949
54 0	2 7.91036	119	0.363	50	52 10.72736	510	0.964
1	3 7.97078	123	0.373	51	53 10.77947	522	0.978
2	4 8.03103	128	0.382	52	54 10.83142	534	0.994
3	5 8.09111	132	0.391	53	55 10.88320	546	1.009
4	6 8.15103	137	0.401	54	56 10.93481	559	1.024
5	7 8.21079	142	0.411	55	57 10.98626	571	1.039
6	8 8.27037	147	0.420	56	58 11.03754	584	1.055
7	9 8.32979	153	0.430	57	59 11.08866	597	1.071
8	10 8.38904	158	0.440	58	55 0 11.13961	611	1.086
9	11 8.44812	163	0.450	59	1 11.19040	624	1.102
10	12 8.50704	169	0.460	55 0	2 11.24102	638	1.118

Q + q	P + p	log m	k	Q + q	P + p	log m	k
55° 0'	55° 2' 11"24102	638	1"118	55° 50'	55° 52' 13"56267	1598	2"068
1	3 11.29148	651	1.134	51	53 13.60493	1624	2.090
2	4 11.34177	665	1.151	52	54 13.64703	1650	2.112
3	5 11.39190	680	1.167	53	55 13.68896	1676	2.134
4	6 11.44186	694	1.184	54	56 13.73074	1702	2.157
5	7 11.49166	709	1.200	55	57 13.77235	1728	2.179
6	8 11.54129	723	1.217	56	58 13.81379	1755	2.202
7	9 11.59076	738	1.234	57	59 13.85508	1782	2.225
8	10 11.64007	754	1.251	58	56 0 13.89620	1810	2.247
9	11 11.68921	769	1.268	59	1 13.93716	1837	2.270
10	12 11.73818	785	1.285	56 0	2 13.97795	1865	2.293
11	13 11.78699	800	1.302	1	3 14.01859	1894	2.317
12	14 11.83564	817	1.320	2	4 14.05906	1922	2.340
13	15 11.88412	833	1.337	3	5 14.09937	1951	2.363
14	16 11.93244	849	1.355	4	6 14.13952	1980	2.387
15	17 11.98059	866	1.372	5	7 14.17950	2009	2.411
16	18 12.02858	883	1.390	6	8 14.21932	2039	2.434
17	19 12.07640	900	1.408	7	9 14.25898	2069	2.458
18	20 12.12406	917	1.426	8	10 14.29848	2099	2.482
19	21 12.17156	935	1.445	9	11 14.33782	2130	2.506
20	22 12.21889	953	1.463	10	12 14.37699	2161	2.531
21	23 12.26605	971	1.481	11	13 14.41600	2192	2.555
22	24 12.31306	989	1.500	12	14 14.45485	2223	2.579
23	25 12.35990	1008	1.519	13	15 14.49354	2255	2.604
24	26 12.40657	1026	1.538	14	16 14.53206	2287	2.629
25	27 12.45308	1045	1.557	15	17 14.57043	2319	2.654
26	28 12.49943	1064	1.576	16	18 14.60863	2352	2.679
27	29 12.54561	1084	1.595	17	19 14.64667	2385	2.704
28	30 12.59163	1104	1.614	18	20 14.68455	2418	2.729
29	31 12.63749	1123	1.633	19	21 14.72226	2452	2.754
30	32 12.68318	1144	1.653	20	22 14.75982	2486	2.780
31	33 12.72870	1164	1.673	21	23 14.79721	2520	2.805
32	34 12.77407	1185	1.692	22	24 14.83444	2555	2.831
33	35 12.81927	1205	1.712	23	25 14.87151	2589	2.857
34	36 12.86430	1226	1.732	24	26 14.90842	2625	2.883
35	37 12.90918	1248	1.752	25	27 14.94517	2660	2.909
36	38 12.95389	1269	1.773	26	28 14.98175	2696	2.935
37	39 12.99843	1291	1.793	27	29 15.01818	2732	2.961
38	40 13.04282	1313	1.813	28	30 15.05444	2768	2.988
39	41 13.08703	1336	1.834	29	31 15.09054	2805	3.014
40	42 13.13109	1358	1.855	30	32 15.12648	2842	3.041
41	43 13.17498	1381	1.875	31	33 15.16226	2880	3.067
42	44 13.21871	1404	1.896	32	34 15.19788	2917	3.094
43	45 13.26228	1428	1.917	33	35 15.23334	2955	3.121
44	46 13.30568	1451	1.939	34	36 15.26863	2994	3.148
45	47 13.34892	1475	1.960	35	37 15.30377	3033	3.176
46	48 13.39199	1499	1.981	36	38 15.33874	3072	3.203
47	49 13.43491	1524	2.003	37	39 15.37356	3111	3.230
48	50 13.47766	1548	2.024	38	40 15.40821	3151	3.258
49	51 13.52024	1573	2.046	39	41 15.44270	3191	3.286
50	52 13.56267	1598	2.068	40	42 15.47703	3231	3.314

Q + q	P + p	log m	k	Q + q	P + p	log m	k
56° 40′	56° 42′ 15″47703	3231	3″314	57° 30′	57° 32′ 16″98962	5719	4″859
41	43 15.51120	3272	3.342	31	33 17.01581	5778	4.893
42	44 15.54521	3313	3.370	32	34 17.04185	5839	4.927
43	45 15.57906	3355	3.398	33	35 17.06772	5899	4.962
44	46 15.61275	3396	3.426	34	36 17.09344	5960	4.996
45	47 15.64627	3439	3.455	35	37 17.11900	6021	5.030
46	48 15.67964	3481	3.483	36	38 17.14441	6083	5.065
47	49 15.71285	3524	3.512	37	39 17.16965	6146	5.100
48	50 15.74589	3567	3.541	38	40 17.19474	6208	5.135
49	51 15.77878	3611	3.570	39	41 17.21967	6271	5.170
50	52 15.81150	3654	3.599	40	42 17.24444	6335	5.205
51	53 15.84407	3699	3.628	41	43 17.26905	6399	5.240
52	54 15.87647	3743	3.657	42	44 17.29351	6463	5.275
53	55 15.90872	3788	3.686	43	45 17.31780	6528	5.311
54	56 15.94080	3834	3.716	44	46 17.34194	6593	5.346
55	57 15.97273	3879	3.746	45	47 17.36593	6659	5.382
56	58 16.00449	3925	3.775	46	48 17.38975	6725	5.418
57	59 16.03610	3972	3.805	47	49 17.41342	6792	5.454
58	57 0 16.06754	4019	3.835	48	50 17.43693	6859	5.490
59	1 16.09883	4066	3.865	49	51 17.46028	6926	5.526
57 0	2 16.12995	4113	3.896	50	52 17.48348	6994	5.563
1	3 16.16092	4161	3.926	51	53 17.50652	7063	5.599
2	4 16.19172	4210	3.956	52	54 17.52940	7131	5.636
3	5 16.22237	4258	3.987	53	55 17.55212	7201	5.672
4	6 16.25286	4307	4.018	54	56 17.57468	7270	5.709
5	7 16.28318	4357	4.049	55	57 17.59709	7341	5.746
6	8 16.31335	4406	4.080	56	58 17.61935	7411	5.783
7	9 16.34336	4457	4.111	57	59 17.64144	7482	5.820
8	10 16.37320	4507	4.142	58	58 0 17.66338	7554	5.858
9	11 16.40289	4558	4.173	59	1 17.68516	7626	5.895
10	12 16.43242	4609	4.205	58 0	2 17.70678	7698	5.933
11	13 16.46179	4661	4.236	1	3 17.72825	7771	5.970
12	14 16.49100	4713	4.268	2	4 17.74956	7844	6.008
13	15 16.52005	4766	4.300	3	5 17.77072	7918	6.046
14	16 16.54895	4818	4.332	4	6 17.79171	7993	6.084
15	17 16.57768	4872	4.364	5	7 17.81255	8067	6.122
16	18 16.60625	4925	4.396	6	8 17.83324	8143	6.160
17	19 16.63467	4979	4.428	7	9 17.85376	8218	6.199
18	20 16.66293	5034	4.461	8	10 17.87414	8294	6.237
19	21 16.69102	5089	4.493	9	11 17.89435	8371	6.276
20	22 16.71896	5144	4.526	10	12 17.91441	8448	6.315
21	23 16.74674	5200	4.559	11	13 17.93431	8526	6.354
22	24 16.77436	5256	4.592	12	14 17.95406	8604	6.393
23	25 16.80182	5312	4.625	13	15 17.97365	8682	6.432
24	26 16.81913	5369	4.658	14	16 17.99308	8761	6.471
25	27 16.85627	5426	4.691	15	17 18.01236	8841	6.511
26	28 16.88326	5484	4.724	16	18 18.03148	8921	6.550
27	29 16.91008	5542	4.758	17	19 18.05045	9001	6.590
28	30 16.93675	5600	4.792	18	20 18.06925	9082	6.630
29	31 16.96326	5659	4.825	19	21 18.08791	9164	6.670
30	32 16.98962	5719	4.859	20	22 18.10641	9246	6.710

$Q+q$	$P+p$	$\log \underline{m}$	k	$Q+q$	$P+p$	$\log \underline{m}$	k
58° 20′	58° 22′ 18″10641	9246	6″710	58° 30′	58° 32′ 18″28283	10092	7″117
21	23 18. 12475	9328	6. 750	31	33 18. 29962	10180	7. 158
22	24 18. 14293	9411	6. 790	32	34 18. 31625	10268	7. 200
23	25 18. 16097	9495	6. 830	33	35 18. 33272	10356	7. 241
24	26 18. 17884	9578	6. 871	34	36 18. 34905	10445	7. 283
25	27 18. 19656	9663	6. 912	35	37 18. 36521	10535	7. 325
26	28 18. 21412	9748	6. 952	36	38 18. 38123	10625	7. 367
27	29 18. 23153	9833	6. 993	37	39 18. 39708	10715	7. 409
28	30 18. 24879	9919	7. 034	38	40 18. 41279	10806	7. 451
29	31 18. 26588	10006	7, 075	39	41 18. 42833	10898	7. 484
30	32 18. 28283	10092	7. 117	40	42 18. 44373	10990	7. 536

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

GEGENSTÄNDE DER HÖHERN GEODAESIE

ZWEITE ABHANDLUNG

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS

DER KÖNIGL. SOCIETÄT ÜBERREICHT MDCCCXLVI SEPT. I.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Band III.
Göttingen 1847.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

GEGENSTÄNDE DER HÖHERN GEODAESIE.

Die Aufgabe, aus der Grösse der Seite eines Dreiecks auf der Erdoberfläche, dem Azimuthe an dem einen Endpunkte, und der geographischen Breite dieses Endpunkts abzuleiten das Azimuth an dem andern Endpunkte, dessen Breite und den Längenunterschied beider Punkte, gehört zu den Hauptgeschäften der höhern Geodäsie. Für den Fall der Kugelfläche ist der Zusammenhang zwischen jenen sechs Grössen am Schluss der ersten Abhandlung in der einfachsten und zur schärfsten Rechnung geeigneten Form aufgestellt, welche auch leicht zu einer bequemen Auflösung der Aufgabe selbst benutzt werden kann. Es wird dadurch das Verlangen nach dem Besitz einer analogen unmittelbar für die Ellipsoidfläche gültigen Auflösungsart erweckt, und der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung ist, eine solche zu entwickeln. Vorher soll jedoch erst die Auflösung für den Fall der Kugelfläche in ein noch helleres Licht gestellt werden. Des bequemern Zurückweisens wegen lasse ich die Zahlenbezeichnung der Artikel sich an die erste Abhandlung anschliessen.

18.

Um den Grad der Genauigkeit, welcher durch die Formeln des 17. Art. erreicht wird, besser beurtheilen zu können, werden noch die Glieder der nächstfolgenden Ordnung entwickelt werden müssen; es ist jedoch wohl der Mühe

werth, das Verfahren anzugeben, nach welchem diese Entwicklung beliebig weit getrieben werden kann.

Ich erlaube mir an den dort gebrauchten Bezeichnungen einige Abänderungen, theils des bequemern Drucks wegen, theils um den verschiedenen Bezeichnungen in den einzelnen Theilen der gegenwärtigen Abhandlung etwas mehr Symmetrie geben zu können. Zunächst bedeute hier

r die Entfernung der beiden Punkte von einander, den Halbmesser der Kugel als Einheit angenommen.

$B+\frac{1}{2}b$ und $B-\frac{1}{2}b$ die Breite am ersten und zweiten Endpunkte von r.

$T+\frac{1}{2}t$ und $T-\frac{1}{2}t\pm 180^0$ das Azimuth des zweiten und ersten Endpunkts resp. vom ersten und zweiten aus.

l den Längenunterschied.

Es wird angenommen, dass das Azimuth von Süden nach Westen zu gezählt und l als positiv betrachtet wird, wenn der zweite Punkt westlicher liegt als der erste.

Es soll ferner gesetzt werden

$$\begin{aligned} \beta &= r\cos T \\ \tau &= r\sin T.\operatorname{tang} B \\ \lambda &= \frac{r\sin T}{\cos B} \end{aligned}$$

welche Grössen dasselbe ausdrücken, was im 17. Art. mit b^0, a^0, λ^0 bezeichnet war, nemlich die bis auf die dritte Ordnung (ausschliesslich) genauen Werthe von b, t, l, und zwischen denen die Gleichung

$$rr+\tau\tau = \beta\beta+\lambda\lambda$$

Statt findet. Die Ordnungen werden hier immer so verstanden, dass r wie eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird.

Zur Abkürzung wird noch geschrieben

$$\begin{aligned} \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}r}{r} &= m \\ \frac{2\sin\frac{1}{2}r}{r} &= n \end{aligned}$$

Zu der beabsichtigten Entwicklung gelangen wir am leichtesten durch Benutzung der Umwandlung der Formel

$$x = \sin y$$

in die Reihe

$$\log y = \log x + \tfrac{1}{6}xx + \tfrac{11}{180}x^4 + \tfrac{191}{5670}x^6 + \tfrac{2497}{113400}x^8 + \text{u. s. w.}$$

welche man leicht aus der bekannten

$$y = x(1 + \tfrac{1}{6}xx + \tfrac{3}{40}x^4 + \tfrac{5}{112}x^6 + \tfrac{35}{1152}x^8 + \text{u. s. w.})$$

ableitet. Wendet man dieselbe zuvörderst an auf die Gleichung

$$\operatorname{tang} B . \sin T . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} r = \sin \tfrac{1}{2} t$$

oder

$$\tfrac{1}{2} m\tau = \sin \tfrac{1}{2} t$$

indem man $x = \frac{1}{2}m\tau$, $y = \frac{1}{2}t$ setzt, so wird (I)

$$\log t = \log \tau + \log m + \tfrac{1}{24} mm\tau\tau + \tfrac{11}{2880} m^4\tau^4 + \tfrac{191}{362880} m^6\tau^6 + \tfrac{2497}{29030400} m^8\tau^8 + \text{u.s.w.}$$

Eben so, aus der Anwendung auf die Gleichung

$$\frac{\sin T \sin \frac{1}{2} r}{\cos B} = \sin \tfrac{1}{2} l$$

oder

$$\tfrac{1}{2} n\lambda = \sin \tfrac{1}{2} l$$

ergibt sich (II)

$$\log l = \log \lambda + \log n + \tfrac{1}{24} nn\lambda\lambda + \tfrac{11}{2880} n^4\lambda^4 + \tfrac{191}{362880} n^6\lambda^6 + \tfrac{2497}{29030400} n^8\lambda^8 + \text{u.s.w.}$$

Die dritte Anwendung wird gemacht auf die Gleichung

$$\frac{\cos B \operatorname{tang} \frac{1}{2} l}{\operatorname{tang} T} = \sin \tfrac{1}{2} b$$

nachdem derselben vermöge der Substitutionen

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l = \frac{n\lambda}{2\sqrt{(1 - \frac{1}{4} nn\lambda\lambda)}}$$

$$\frac{\cos B}{\operatorname{tang} T} = \frac{6}{\lambda}$$

folgende Gestalt gegeben ist

$$\frac{n6}{2\sqrt{(1 - \frac{1}{4} nn\lambda\lambda)}} = \sin \tfrac{1}{2} b$$

Es ergibt sich dann (III)

$$
\begin{aligned}
\log b = \quad & \log \sigma + \log n + \tfrac{1}{8} nn\lambda\lambda + \tfrac{1}{64} n^4\lambda^4 + \tfrac{1}{384} n^6\lambda^6 + \tfrac{1}{2048} n^8\lambda^8 + \text{u. s. w.} \\
+ \quad & \tfrac{1}{24}\, \sigma\sigma (nn + \tfrac{1}{4} n^4\lambda\lambda + \tfrac{1}{16} n^6\lambda^4 + \tfrac{1}{64} n^8\lambda^6 + \text{u. s. w.}) \\
+ \quad & \tfrac{11}{2880}\, \sigma^4 (n^4 + \tfrac{1}{2} n^6\lambda\lambda + \tfrac{3}{16} n^8\lambda^4 + \text{u. s. w.}) \\
+ \quad & \tfrac{191}{362880}\, \sigma^6 (n^6 + \tfrac{3}{4} n^8\lambda\lambda + \text{u. s. w.}) \\
+ \quad & \tfrac{2497}{29030400}\, \sigma^8 (n^8 + \text{u. s. w.}) \\
+ \quad & \text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

oder, indem man die Glieder gleicher Ordnung zusammenfasst,

$$
\begin{aligned}
\log b = \log \sigma + \log n & \\
& + \tfrac{1}{24}\, nn (\sigma\sigma + 3\lambda\lambda) \\
& + \tfrac{1}{2880}\, n^4 (11\,\sigma^4 + 30\,\sigma\sigma\lambda\lambda + 45\lambda^4) \\
& + \tfrac{1}{362880}\, n^6 (191\,\sigma^6 + 693\,\sigma^4\lambda\lambda + 945\,\sigma\sigma\lambda^4 + 945\lambda^6) \\
& + \tfrac{1}{29030400}\, n^8 (2497\,\sigma^8 + 11460\,\sigma^6\lambda\lambda + 20790\,\sigma^4\lambda^4 + 18900\,\sigma\sigma\lambda^6 \\
& \qquad + 14175\lambda^8) \\
& + \text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

Um die Gleichungen I, II, III in eine ganz entwickelte Gestalt zu bringen, wird man in denselben noch substituiren

$$
\begin{aligned}
\log m &= \tfrac{1}{12} rr + \tfrac{7}{1440} r^4 + \tfrac{31}{90720} r^6 + \tfrac{127}{4838400} r^8 + \text{u. s. w.} \\
mm &= 1 + \tfrac{1}{6} rr + \tfrac{17}{720} r^4 + \tfrac{31}{10080} r^6 + \text{u. s. w.} \\
m^4 &= 1 + \tfrac{1}{3} rr + \tfrac{3}{40} r^4 + \text{u. s. w.} \\
m^6 &= 1 + \tfrac{1}{2} rr + \text{u. s. w.} \\
& \text{u. s. w.} \\
\log n &= -\tfrac{1}{24} rr - \tfrac{1}{2880} r^4 - \tfrac{1}{181440} r^6 - \tfrac{1}{9676800} r^8 - \text{u. s. w.} \\
nn &= 1 - \tfrac{1}{12} rr + \tfrac{1}{360} r^4 - \tfrac{1}{20160} r^6 + \text{u. s. w.} \\
n^4 &= 1 - \tfrac{1}{6} rr + \tfrac{1}{80} r^4 - \text{u. s. w.} \\
n^6 &= 1 - \tfrac{1}{4} rr + \text{u. s. w.} \\
& \text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

Wir erhalten demnach für die Logarithmen von t, l, b, oder vielmehr für die Unterschiede dieser Logarithmen von den genäherten Werthen $\log\tau$, $\log\lambda$, $\log\sigma$, zusammengesetzte Reihen, welche fortschreiten

für $\log t$ nach den geraden Potenzen von τ und r, und deren Producten,

für $\log l$ eben so nach λ und r,

für $\log b$ nach σ, λ und r,

und die beigebrachten Zahlen enthalten diese Entwicklung bis zu den Grössen der achten Ordnung (einschl.), daher t, l, b selbst dadurch bis zu den Grössen der neunten Ordnung einschliesslich, oder der eilften Ordnung ausschliesslich bestimmt werden.

Die Entwicklung von $\log b$ kann auch auf eine andere Art, nemlich nach den Potenzen von σ, τ und r geschehen. Setzt man

$$z = \operatorname{tang} y$$

so wird

$$y = z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7}z^7 + \tfrac{1}{9}z^9 - \text{ u. s. w.}$$

und hieraus

$$\log y = \log z - \tfrac{1}{3}zz + \tfrac{13}{90}z^4 - \tfrac{251}{2835}z^6 + \tfrac{3551}{56700}z^8 - \text{ u. s. w.}$$

Wendet man diese Reihe an auf die Gleichung

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}t}{\operatorname{tang}B\,.\operatorname{tang}T}$$

nachdem man derselben vermöge der Substitutionen

$$\operatorname{tang}B\,.\operatorname{tang}T = \frac{\tau}{\sigma}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}t = \frac{m\tau}{2\sqrt{(1-\frac{1}{4}mm\tau\tau)}}$$

folgende Gestalt gegeben hat

$$\frac{\sigma m}{2\sqrt{(1-\frac{1}{4}mm\tau\tau)}} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}\log b = \log\sigma + \log m &+ \tfrac{1}{8}mm\tau\tau + \tfrac{1}{64}m^4\tau^4 + \tfrac{1}{384}m^6\tau^6 + \tfrac{1}{2048}m^8\tau^8 + \text{ u. s. w.}\\ &- \tfrac{1}{12}\,\sigma\sigma(mm + \tfrac{1}{4}m^4\tau\tau + \tfrac{1}{16}m^6\tau^4 + \tfrac{1}{64}m^8\tau^6 + \text{ u. s. w.})\\ &+ \tfrac{13}{1440}\,\sigma^4(m^4 + \tfrac{1}{2}m^6\tau\tau + \tfrac{3}{16}m^8\tau^4 + \text{ u. s. w.})\\ &- \tfrac{251}{181440}\,\sigma^6(m^6 + \tfrac{3}{4}m^8\tau\tau + \text{ u. s. w.})\\ &+ \tfrac{3551}{14515200}\,\sigma^8(m^8 + \text{ u. s. w.})\\ &+ \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

oder, indem man die Glieder gleicher Ordnung zusammenfasst,

$$\begin{aligned}\log b = \log\sigma + \log m & \\ & - \tfrac{1}{24}\, mm(2\sigma\sigma - 3\tau\tau) \\ & + \tfrac{1}{2880}\, m^4(26\sigma^4 - 60\sigma\sigma\tau\tau \quad + 45\tau^4) \\ & - \tfrac{1}{362880}\, m^6(502\sigma^6 - 1638\sigma^4\tau\tau + 1890\sigma\sigma\tau^4 - 945\tau^6) \\ & + \tfrac{1}{290304000}\, m^8(7102\sigma^8 - 30120\sigma^6\tau\tau + 49140\sigma^4\tau^4 - 37800\sigma\sigma\tau^6 \\ & \qquad + 14175\tau^8) \\ & - \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Durch Substitution der oben gegebenen Werthe von $\log m$, mm, m^4 u. s. w. erhält man hieraus die gesuchte Reihe, welche sich übrigens auch aus der erstern nach σ, λ, r fortschreitenden unmittelbar ableiten lässt, indem man $rr - \sigma\sigma - \tau\tau$ für $\lambda\lambda$ substituirt.

19.

Für unsern Zweck reicht es hin, die Formeln nur bis zur vierten Ordnung (einschl.) genau aufzustellen, nemlich

$$\begin{aligned}\log t &= \log\tau + \tfrac{1}{24}(2rr + \tau\tau) + \tfrac{1}{2880}(14r^4 + 20rr\tau\tau + 11\tau^4) \\ \log l &= \log\lambda - \tfrac{1}{24}(rr - \lambda\lambda) - \tfrac{1}{2880}(r^4 + 10rr\lambda\lambda - 11\lambda^4) \\ \log b &= \log\sigma - \tfrac{1}{24}(rr - \sigma\sigma - 3\lambda\lambda) - \tfrac{1}{2880}(r^4 + 10rr\sigma\sigma + 30rr\lambda\lambda - 11\sigma^4 \\ &\qquad - 30\sigma\sigma\lambda\lambda - 45\lambda^4)\end{aligned}$$

Anstatt der letzten Formel kann man auch eine der folgenden gebrauchen:

$$\begin{aligned}\log b &= \log\sigma + \tfrac{1}{24}(2rr - 2\sigma\sigma + 3\tau\tau) + \tfrac{1}{2880}(14r^4 - 40rr\sigma\sigma + 60rr\tau\tau + 26\sigma^4 \\ &\qquad - 60\sigma\sigma\tau\tau + 45\tau^4) \\ \log b &= \log\sigma + \tfrac{1}{24}(2\lambda\lambda + \tau\tau) - \tfrac{1}{2880}(12\sigma\sigma\lambda\lambda - 12\sigma\sigma\tau\tau - 14\lambda^4 - 32\lambda\lambda\tau\tau + \tau^4) \\ \log b &= \log\sigma + \tfrac{1}{24}(2\lambda\lambda + \tau\tau) - \tfrac{1}{2880}(12rr\lambda\lambda - 12rr\tau\tau - 26\lambda^4 - 8\lambda\lambda\tau\tau - 11\tau^4)\end{aligned}$$

In allen diesen Formeln sind $r, \sigma, \lambda, \tau, b, l, t$ als in Theilen des Halbmessers ausgedrückt und die Logarithmen als hyperbolische zu verstehen. Sollen dagegen jene sieben Grössen in Bogensecunden ausgedrückt und die Logarithmen die briggischen sein, so erleiden die Formeln weiter keine Veränderung, als dass der gemeinschaftliche Zahlencoëfficient der Glieder zweiter Ordnung $\tfrac{1}{24}$ in $\tfrac{1}{2}\mu$, und der gemeinschaftliche Zahlencoëfficient der Glieder vierter Ordnung $\tfrac{1}{2880}$ in ν verwandelt werden muss, wo μ, ν die Producte der Grössen $\tfrac{1}{12}\rho\rho$ und $\tfrac{1}{2880}\rho^4$

in den Modulus der briggischen Logarithmen bezeichnen, ρ in der im Art. 16 angegebenen Bedeutung genommen (und damit auch μ). Man hat für diese constanten Factoren

$$\log\mu = 7.9297527989(-20)$$
$$\log\nu = 4.9206912908(-30)$$

Bis zu den Gliedern zweiter Ordnung stimmen diese Resultate mit den im 17. Art. gegebenen überein. Der Zweck der vorstehenden weitern Entwicklung war nur, klar hervortreten zu lassen, dass selbst zur schärfsten Rechnung die Glieder zweiter Ordnung völlig zureichen: in der That kommt in dem ganzen Hannoverschen Dreieckssysteme kein Fall vor, wo die Glieder vierter Ordnung den Betrag von zwei Einheiten der zehnten Decimale erreichten, und nur ein Paar Fälle, wo sie *Eine* Einheit der zehnten Decimale überschreiten.

20.

Wenn unsere Formeln, welche nicht von der Breite und dem Azimuth an dem einen Orte, sondern von dem Mittelwerthe dieser Grössen an den beiden Örtern ausgehen, zur Auflösung der zu Anfang dieser Abhandlung aufgeführten Aufgabe benutzt werden sollen, so wird diess auf eine indirecte Art, oder richtiger durch stufenweise beliebig weit getriebene Annäherung geschehen müssen. Der Gang der Arbeit besteht darin, dass man von irgend einem genäherten Werthe von T ausgeht (wofür man in Ermangelung aller anderweitigen Kenntniss oder Schätzung zuerst das gegebene Azimuth an dem ersten Orte annehmen kann) und daraus einen viel schärfern ableitet; mit diesem dann dieselbe Rechnung wiederholt, und damit so lange fortfährt, bis man zu stehenden Resultaten gelangt. Man hat dabei zu beachten, dass bei den ersten Rechnungen nur 4 oder 5 Zifern der Logarithmen berücksichtigt zu werden brauchen, und dabei $\mathfrak{b}$ und τ anstatt der corrigirten b und t angewandt werden dürfen, daher man auch, bei diesen ersten Rechnungen, sich um λ und l noch nicht zu bekümmern braucht. Die Formeln sind so, wenn für den ersten Ort die Breite mit B^0, das Azimuth mit T^0 bezeichnet wird, der Reihe nach folgende:

$$\mathfrak{b} = r\cos T$$
$$B = B^0 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{b}$$
$$\tau = r\sin T\tang B$$
$$T = T^0 - \tfrac{1}{2}\tau$$

Nachdem man dahin gelangt ist, dass bei dem Gebrauch von fünfzifrigen Logarithmen der Werth von T sich nicht mehr ändert, berechnet man λ nach der Formel

$$\lambda = r \sin T \sec B$$

und führt dann eine neue Rechnung mit sieben Decimalen, wobei man die logarithmischen Correctionen vermittelst der Formeln

$$\log b = \log \beta + \mu\lambda\lambda + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau$$
$$\log t = \log \tau + \mu r r + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau$$

zuzieht und $B = B^0 - \frac{1}{2}b$, $T = T^0 - \frac{1}{2}t$ setzt. Eine nochmalige Wiederholung wird in der Regel dieselben, oder kaum merklich geänderte Resultate wiedergeben, und dann erst wird auch noch die Berechnung von l nach der Formel

$$\log l = \log\lambda - \tfrac{1}{2}\mu r r + \tfrac{1}{2}\mu\lambda\lambda$$

beigefügt. Um die Schnelligkeit der Annäherung (die hauptsächlich von der Kleinheit von r abhängt), an einem Beispiele zu zeigen, setze ich die Hauptmomente der Rechnung für den Übergang von dem Dreieckspunkte Brocken zu dem Punkte Inselsberg hieher. Es ist diess die grösste Dreiecksseite in dem Hannoverschen Dreieckssystem, viel grösser, als sonst bei trigonometrischen Operationen vorzukommen pflegen.

Bei der nach den Grundlagen der ersten Abhandlung bearbeiteten conformen Darstellung auf der Kugelfläche ist die Breite des Brockens $B^0 = 51°46'3''6345$; das Azimuth der Seite Brocken-Inselsberg $T^0 = 5°42'21''7704$; der Logarithm dieser Seite in Toisen $= 4{,}7353929$ oder in Theilen des Halbmessers $= 8{,}22018543$, oder in Bogensecunden, wie bei unsern Formeln vorausgesetzt ist, $\log r = 3{,}5346106$. Setzt man zuerst $T = 5°42'$, so wird

$$\beta = 3408''$$
$$B = 51°17'40''$$
$$\tau = 424''$$

und folglich ein genäherterer Werth

$$T = 5°38'50''$$

Die hiemit wiederholte Rechnung ergibt

$$\mathfrak{b} = 3407''\,9$$
$$B = 51^0\,17'\,39''\,7$$
$$\tau = 420''\,55$$
$$T = 5^0\,38'\,51''\,5$$

Mit diesem Werthe von T wird nun die schärfere Rechnung angefangen und dabei zugleich die logarithmische Correction mit zugezogen. Es findet sich. in Einheiten der siebenten Decimale,

$$\mu rr = 99.76$$
$$\mu\lambda\lambda = 2.47$$
$$\mu\tau\tau = 1.50$$

folglich

$$\mu\lambda\lambda + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau = +3$$
$$\mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau = +101$$
$$-\tfrac{1}{2}\mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\lambda\lambda = -49$$

und

$$\log\mathfrak{b} = 3.5324974$$
$$\log b = 3.5324977$$
$$b = 3407''9852$$
$$B = 51^0\,17'\,39''\,6419$$
$$\log\tau = 2.6238492$$
$$\log t = 2.6238593$$
$$t = 420''\,5904$$
$$T = 5^0\,38'\,51''\,4752$$

Eine nochmalige Wiederholung der Rechnung mit diesem Werthe von T bringt bei b gar keine Änderung hervor, und t verwandelt sich in $420''5898$. Man erhält daher

Breite des Punkts Inselsberg

$$B^0 - \mathfrak{b} = 50^0\,49'\,15''\,6493$$

Azimuth der Dreiecksseite Inselsberg-Brocken

$$T^0 - \tau + 180^0 = 185^0\,35'\,21''\,1806$$

Endlich findet sich

$$\log\lambda = 2.7315487$$
$$\log l = 2.7315438$$
$$l = 538''\,9442 = 0^0\ 8'\ 58''9442.$$

Die Bequemlichkeit dieses Verfahrens wird allerdings erst dann in ihrer vollen Grösse fühlbar, wenn man sich die Hülfen des kleinen Mechanismus bei Handhabung derartiger Methoden zu eigen gemacht hat, wozu eine Anweisung hier nicht an ihrem Platze sein würde. Ich begnüge mich hier nur anzudeuten, dass, was in obigem Beispiele wie eine viermalige Rechnung erscheint, nicht in der Form von vier getrennten Rechnungen, sondern wie eine einzige geschrieben werden soll, indem man bei jeder neuen Überarbeitung nur die letzten Zifern ergänzt oder verbessert. Jedenfalls braucht man immer nur die letzte Rechnung aufzubewahren, und gerade darin besteht ein grosser Vortheil, zumal bei Messungen von bedeutendem Umfange, dass man dann den ganzen wesentlichen Kern der Berechnung für alle Dreiecksseiten im möglich kleinsten Raume und in der übersichtlichsten zu beliebiger Prüfung der Richtigkeit geeignetsten Form besitzt.

21.

Ich gehe jetzt zu der Hauptaufgabe selbst über, welche für die Ellipsoidfläche eine ähnliche Methode fordert, wie für die Kugelfläche im Vorhergehenden gegeben ist. Die Auflösung dieser allerdings etwas verwickelten Aufgabe soll hier auf zwei ganz von einander verschiedenen Wegen abgeleitet werden. Da die eine Ableitung, mit welcher der Anfang gemacht werden wird, sich auf diejenige conforme Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche gründet, deren Theorie in der ersten Abhandlung entwickelt ist, so kann die Auffindung dieser Auflösung wie die *erste mittelbare* Benutzung dieser Theorie für die Zwecke der höhern Geodaesie betrachtet werden. (Vergl. Art. 11).

Es mögen demnach jetzt durch $B+\frac{1}{2}b$ und $B-\frac{1}{2}b$ die Breiten zweier Punkte auf der Ellipsoidfläche bezeichnet werden; ihr Längenunterschied durch l; das zwischen ihnen enthaltene Stück einer geodaetischen Linie (und zwar hier nach beliebiger Einheit gemessen) durch r; die Azimuthe der Linie am ersten und zweiten Endpunkte durch $T+\frac{1}{2}t$ und $T-\frac{1}{2}t\pm 180^0$. Es handelt sich also darum, b, l und t aus r, B und T zu finden durch Formeln, welche den oben

für die Kugelfläche gegebenen analog sind, und in dieselben übergehen, wenn man die Excentricität $= 0$, oder die beiden Halbachsen der erzeugenden Ellipse unter sich gleich und $= 1$ setzt.

Die Breite des der conformen Übertragung auf die Kugelfläche zum Grunde liegenden Normalparallelkreises bezeichne ich (wie oben Art. 3) mit P für die Ellipsoidfläche, und mit Q für die Kugelfläche; zugleich nehme ich an, dieser Normalparallelkreis sei so gewählt, dass Q dem arithmetischen Mittel der Breiten der beiden betreffenden Punkte auf der Kugelfläche gleich wird: diese Breiten selbst seien $Q+\frac{1}{2}q$ und $Q-\frac{1}{2}q$. Es sollen ferner a, A, α, e, φ, θ dieselben Bedeutungen behalten, wie in der ersten Abhandlung, Art. 2. 3. 4 ff.: es bedeuten nemlich

a die halbe grosse Achse des Ellipsoids, oder den Halbmesser des Äquators,
A den Halbmesser der Kugel,
$1:\alpha$ das constante Verhältniss der Längenunterschiede auf dem Ellipsoid zu den entsprechenden auf der Kugel,
$e = \sin\varphi$ die Excentricität der erzeugenden Ellipse,
$\sin\theta = e\sin P$.

Den zwischen den beiden Punkten auf der Kugelfläche enthaltenen Grösstekreisbogen bezeichne ich mit s; die Azimuthe dieses Bogens am ersten und zweiten Endpunkte mit $U+\frac{1}{2}u$ und $U-\frac{1}{2}u\pm 180^0$. Erwägt man nun noch, dass der Längenunterschied zwischen beiden Punkten $= \alpha l$ ist, so findet man zunächst die vier strengen Formeln

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}s.\cos U &= \cos\tfrac{1}{2}\alpha l.\sin\tfrac{1}{2}q\\
\sin\tfrac{1}{2}s.\sin U &= \sin\tfrac{1}{2}\alpha l.\cos Q\\
\cos\tfrac{1}{2}s.\cos\tfrac{1}{2}u &= \cos\tfrac{1}{2}\alpha l.\cos\tfrac{1}{2}q\\
\cos\tfrac{1}{2}s.\sin\tfrac{1}{2}u &= \sin\tfrac{1}{2}\alpha l.\sin Q
\end{aligned}$$

und hieraus die näherungsweise richtigen

$$q = s.\cos U(1+\tfrac{1}{24}qq-\tfrac{1}{24}ss+\tfrac{1}{8}\alpha\alpha ll) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$\alpha l = s.\frac{\sin U}{\cos Q}(1-\tfrac{1}{24}ss+\tfrac{1}{24}\alpha\alpha ll) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$u = s.\sin U.\operatorname{tang} Q(1+\tfrac{1}{12}ss+\tfrac{1}{24}uu) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Es ist unnöthig zu erinnern, dass in diesen drei Gleichungen l, q, s, u in Theilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden werden. Man sieht leicht, dass sie

bis auf die fünfte Ordnung (ausschl.) richtig sind, indem s wie eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird, und dass man, ohne den Grad der Schärfe zu vermindern, in den eingeklammerten Gliedern rechter Hand statt q, αl und u auch $s.\cos U$, $s.\frac{\sin U}{\cos Q}$, $s.\sin U.\tang Q$ substituiren darf.

22.

Es müssen nun zuvörderst die Grössen B, b, T, t, r, welche auf der Ellipsoidfläche ihre Bedeutung haben, mit ihren Correlaten auf der Kugelfläche Q, q, U, u, As verglichen werden. Alle dafür hier aufzustellenden Gleichungen werden bis wenigstens auf die dritte Ordnung (einschl.) genau sein, und, dass dieser Bedingung genügt werde, wird sich aus der Entwicklung selbst leicht erkennen lassen.

Wendet man die im 8. Art. gegebene Reihe auf unsere beiden Punkte an, so müssen die dort allgemein mit p und q bezeichneten Grössen nach unserer jetzigen Bezeichnung ausgedrückt werden

für den ersten Punkt durch $B+\frac{1}{2}b-P$ und $\frac{1}{2}q$
für den zweiten Punkt durch $B-\frac{1}{2}b-P$ und $-\frac{1}{2}q$

und wir haben demnach die beiden Gleichungen

$$B+\tfrac{1}{2}b = P+\frac{\cos\theta}{2\cos\varphi}.q-\frac{3ee}{8\cos\varphi^2}.\cos P.\sin P.qq$$
$$+\frac{ee}{16\cos\varphi^2\cos\theta}(-\cos P^2+\sin P^2+ee(5\cos P^2.\sin P^2-\sin P^4))q^3$$
$$B-\tfrac{1}{2}b = P-\frac{\cos\theta}{2\cos\varphi}.q-\frac{3ee}{8\cos\varphi^2}.\cos P.\sin P.qq$$
$$-\frac{ee}{16\cos\varphi^2\cos\theta}(-\cos P^2+\sin P^2+ee(5\cos P^2.\sin P^2-\sin P^4))q^3$$

Durch Addition und Subtraction ergibt sich also

$$B = P-\frac{3ee}{8\cos\varphi^2}.\cos P.\sin P.qq \quad \ldots\ldots \quad (4)$$
$$b = \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}.q+\frac{ee}{8\cos\varphi^2\cos\theta}(-\cos P^2+\sin P^2+ee(5\cos P^2.\sin P^2-\sin P^4))q^3 \quad (5)$$

Man sieht übrigens leicht, dass die Gleichung (4) um Grössen vierter, die Gleichung (5) hingegen nur um Grössen fünfter Ordnung ungenau ist.

Um T und t mit U und u zu vergleichen, werden die am Schluss des 15. Art. entwickelten Formeln benutzt werden müssen, denen eine Voraussetzung

zum Grunde lag, welcher in der gegenwärtigen Untersuchung genügt ist. Man hat dabei nur zu erwägen, dass die dortigen ψ^0 und ψ' nichts anderes sind, als hier $T+\frac{1}{2}t-(U+\frac{1}{2}u)$ und $T-\frac{1}{2}t-(U-\frac{1}{2}u)$; ferner das dortige h dasselbe was hier s; endlich dass das dortige χ von der hier mit U bezeichneten Grösse im Allgemeinen nur um eine Grösse zweiter Ordnung verschieden sein kann, jedenfalls aber der Unterschied wenigstens von der ersten Ordnung ist. Es ergibt sich so, auf die dritte Ordnung einschl. genau

$$T+\tfrac{1}{2}t = U+\tfrac{1}{2}u - \frac{ee\cos P.\sin P.\sin U.\cos U^2}{12\cos\varphi\cos\theta}.s^3$$
$$T-\tfrac{1}{2}t = U-\tfrac{1}{2}u + \frac{ee\cos P.\sin P.\sin U.\cos U^2}{12\cos\varphi\cos\theta}.s^3$$

und folglich, eben so genau,

$$T = U \quad \ldots\ldots \quad (6)$$
$$t = u - \frac{ee\cos P.\sin P.\sin U.\cos U^2}{6\cos\varphi\cos\theta}.s^3 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Die Vergleichung der Länge der geodaetischen Linie auf dem Ellipsoid mit dem Grösstekreisbogen auf der Kugel ist zwar in Art. 15 für den in Rede stehenden Fall nicht besonders entwickelt: es ist jedoch sehr leicht, diess zu ergänzen. Es ist nemlich in den dortigen Bezeichnungen die Länge des geodaetischen Bogens

$$= A\int\frac{\cos y}{m\cos\psi}.\,\mathrm{d}x$$

welche Integration von $x = -\frac{1}{2}(h-\delta)$ bis $x = +\frac{1}{2}(h+\delta)$ auszudehnen ist. Da y und ψ nur Grössen von der dritten Ordnung sind, so sieht man leicht, dass die Weglassung des Factors $\frac{\cos y}{\cos\psi}$ in dem Werthe des Integrals nur einen Fehler der siebenten Ordnung hervorbringen kann. Jene Länge ist also, bis auf die fünfte Ordnung einschl. genau,

$$= A\int\frac{\mathrm{d}x}{m} = A\int\mathrm{d}x(1-\mu x^3-\mu' x^4)$$
$$= A(x-\tfrac{1}{4}\mu x^4-\tfrac{1}{5}\mu' x^5)+\text{Const.}$$
$$= A\{h-\tfrac{1}{8}(h^3\delta+h\delta^3)\mu-\tfrac{1}{80}(h^5+10h^3\delta\delta+5h\delta^4)\mu'\}$$

Die Coëfficienten μ, μ' lassen sich angeben, wenn man in der Reihe

$$m = 1-\frac{2ee\cos P.\sin P}{3\cos\varphi\cos\theta}.q^3-\frac{ee\cos P^2}{6\cos\varphi^2\cos\theta^2}(1-7ee\sin P^2)q^4 \;\ldots\ldots$$

(welche von selbst aus der Art 9 gegebenen folgt) für q die Substitution macht

$$q = -\cos\chi . x - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang} Q . \sin\chi^2 xx \ldots$$

(deren leichte Ableitung hier weggelassen werden kann), und das Resultat mit der Reihe

$$m = 1 + \mu x^3 + \mu' x^4 \ldots$$

zusammenhält. Für unsern gegenwärtigen Zweck ist jedoch mehr nicht nöthig, als nachzuweisen, dass die gesuchte Länge des geodaetischen Bogens von Ah nicht mehr als um eine Grösse fünfter Ordnung abweicht. Da nun ersichtlich $h^5 + 10h^3\delta\delta + 5h\delta^4$ eine solche Grösse ist, so braucht der entwickelte Werth von μ' nicht hiehergesetzt zu werden. Für μ aber ergibt sich der Werth

$$\mu = \frac{2ee\cos P . \sin P}{3\cos\varphi\cos\vartheta} . \cos\chi^3$$

und da $\delta\cos\chi$ nach Art. 15 eine Grösse zweiter Ordnung ist, so wird offenbar auch $(h^3\delta + h\delta^3)\mu$ eine Grösse fünfter Ordnung.

Wir haben demnach, da h dasselbe bedeutet, was jetzt mit s bezeichnet ist, bis auf die fünfte Ordnung ausschliesslich genau

$$s = \frac{r}{A} \qquad (8)$$

Endlich, damit alles für die weitere Entwicklung erforderliche hier beisammen sei, setze ich noch folgende schon in der ersten Abhandlung (Art. 4, 6 und 3) gebrauchte strenge richtige Gleichungen hieher:

$$A = \frac{a\cos\varphi}{\cos\vartheta^3} \qquad (9)$$

$$\cos Q = \frac{\cos\vartheta\cos P}{a\cos\varphi} \qquad (10)$$

$$\sin Q = \frac{\sin P}{a}$$

und die aus der Verbindung dieser beiden hervorgehende

$$\operatorname{tang} Q = \frac{\cos\varphi \operatorname{tang} P}{\cos\vartheta} \qquad (11)$$

23.

Zur Erreichung unsers Zwecks brauchen nun bloss diese Gleichungen gehörig combinirt zu werden.

Zuvörderst ergibt sich aus der Verbindung der Gleichungen (1), (2), (3), dass $qq+\alpha\alpha ll-uu-ss$ eine Grösse vierter Ordnung ist, daher man anstatt (2) auch schreiben kann

$$l=\frac{s.\sin U}{\alpha.\cos Q}(1-\tfrac{1}{24}qq+\tfrac{1}{24}uu)$$

oder wenn man nach (8), (9) und (10)

$$s=\frac{r\cos\theta^2}{a\cos\varphi},\qquad \alpha\cos Q=\frac{\cos\theta\cos P}{\cos\varphi}$$

schreibt,

$$l=\frac{r\cos\theta\sin U}{a\cos P}(1-\tfrac{1}{24}qq+\tfrac{1}{24}uu)$$

Es wird ferner $\frac{\cos\theta}{\cos P}=\frac{\sqrt{(1-ee\sin P^2)}}{\cos P}$ vermittelst der Gleichung (4) und durch eine leichte Rechnung entwickelt in

$$\frac{\cos\theta}{\cos P}=\frac{\sqrt{(1-ee\sin B^2)}}{\cos B}(1+\frac{3ee\sin P^2}{8(1-ee\sin P^2)}.qq)$$

was bis auf die vierte Ordnung ausschl. genau ist. Wir haben daher, wenn zugleich T für U geschrieben wird, gemäss der Gleichung (6),

$$l=\frac{r\sqrt{(1-ee\sin B^2)}.\sin T}{a\cos B}(1-\frac{1-10ee\sin P^2}{24(1-ee\sin P^2)}.qq+\tfrac{1}{24}uu)$$

Nachdem in dem eingeklammerten Theile noch substituirt ist $\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1-ee\sin P^2)}}.b$ für q, sodann t für u und endlich B für P, was alles, nach Gleichung (5), (7), (4), wie man leicht sieht, geschehen kann, ohne den Grad der Genauigkeit zu vermindern, und wenn wir ausserdem, zur Abkürzung,

$$\sqrt{(1-ee\sin B^2)}=k$$

schreiben, so erhalten wir (I)

$$l=\frac{kr\sin T}{a\cos B}(1-\frac{(1-10ee\sin B^2)\cos\varphi^2}{24k^2}.bb+\tfrac{1}{24}tt)$$

24.

Auf ähnliche Weise verwandelt sich Gleichung (1) in

$$q=s\cos U(1-\tfrac{1}{12}qq+\tfrac{1}{12}ss+\tfrac{1}{8}uu)$$

und daher Gleichung (5) in

$$b = \frac{r\cos\theta^2 \cos U}{a\cos\varphi^2}\{1 - [\tfrac{1}{12} + \frac{ee}{8\cos\varphi^2\cos\theta^2}(\cos P^2 - \sin P^2 - ee(5\cos P^2\sin P^2 - \sin P^4))]qq$$
$$+ \tfrac{1}{12}ss + \tfrac{1}{8}uu\}$$

Für $\cos\theta^3 = (1 - ee\sin P^2)^{\frac{3}{2}}$ findet man leicht die vermittelst (4) so weit, wie hier nöthig ist, geführte Entwickelung

$$\cos\theta^3 = (1 - ee\sin B^2)^{\frac{3}{2}}(1 - \frac{9e^4\cos P^2\sin P^2}{8\cos\varphi^2(1 - ee\sin P^2)}\cdot qq)$$

wodurch die vorhergehende Gleichung sich verwandelt in

$$b = \frac{r(1 - ee\sin B^2)^{\frac{3}{2}}\cos U}{a\cos\varphi^2}\{1 - [\tfrac{1}{12} + \frac{ee}{8\cos\varphi^2(1 - ee\sin P^2)}(\cos P^2 - \sin P^2$$
$$+ ee(4\cos P^2\sin P^2 + \sin P^4))]qq + \tfrac{1}{12}ss + \tfrac{1}{8}uu\}$$

oder in einer etwas veränderten Form

$$b = \frac{rk^3\cos U}{a\cos\varphi^2}\{1 - \frac{1}{24\cos\varphi^2(1 - ee\sin P^2)}(2 + ee - (8ee - 14e^4)\sin P^2 - 9e^4\sin P^4)qq$$
$$+ \tfrac{1}{12}ss + \tfrac{1}{8}uu\}$$

Schreibt man nun noch hierin

$$\frac{\cos\varphi \,.\, b}{\sqrt{(1 - ee\sin P^2)}} \text{ anstatt } q, \quad \text{wegen (5)}$$
$$\frac{rr(1 - ee\sin P^2)^2}{aa\cos\varphi^2} \text{ anstatt } ss, \quad \text{wegen (8) und (9)}$$
$$T \text{ und } t \text{ anstatt } U \text{ und } u, \quad \text{wegen (6) und (7)}$$

und zuletzt

$$B \text{ für } P \text{ wegen (4)},$$

was alles, ohne Nachtheil für die Genauigkeit geschehen kann, so erhält man (II)

$$b = \frac{rk^3}{a\cos\varphi^2}\,.\cos T\{1 - \frac{1}{24k^4}(2 + ee - (8ee - 14e^4)\sin B^2 - 9e^4\sin B^4)\,.\,bb$$
$$+ \frac{k^4}{12aa\cos\varphi^2}\,.\,rr + \tfrac{1}{8}tt\}$$

25.

Aus den Gleichungen (1) und (3) erhellet, dass qqu von $s^3\cos U^2\sin U\tang Q$, oder nach (11), von $\frac{s^3\cos\varphi\cos U^2\sin U\,.\tang P}{\cos\theta}$ nur um eine Grösse fünfter Ordnung verschieden ist: es ist daher verstattet, die Gleichung (7) auch so zu schreiben

$$t = u(1 - \frac{ee\cos P^2}{6\cos\varphi^2}\,.\,qq)$$

oder wenn man für u den Werth aus (3) substituirt, und nach (8), (9), (11),

$$s = \frac{r\cos\theta^2}{a\cos\varphi} = \frac{r\cos\theta\,\mathrm{tang}\,P}{a\,\mathrm{tang}\,Q}$$

setzt

$$t = \frac{r\cos\theta\,\mathrm{tang}\,P.\sin U}{a}\left(1+\tfrac{1}{24}uu+\tfrac{1}{12}ss-\frac{ee\cos P^2}{6\cos\varphi^2}.qq\right)$$

Für $\cos\theta.\mathrm{tang}\,P = \sqrt{(1-ee\sin P^2)}.\mathrm{tang}\,P$ findet man nach (4) den so weit wie hier nöthig ist entwickelten Werth

$$\sqrt{(1-ee\sin B^2)}.\mathrm{tang}\,B\left(1+\frac{3ee-6e^4\sin P^2+3e^4\sin P^4}{8\cos\varphi^2(1-ee\sin P^2)}.qq\right)$$

und folglich

$$t = \frac{rk\,\mathrm{tang}\,B\sin U}{a}\left(1+\frac{5ee+(4ee-14e^4)\sin P^2+5e^4\sin P^4}{24\cos\varphi^2(1-ee\sin P^2)}.qq+\tfrac{1}{12}ss+\tfrac{1}{24}uu\right)$$

Macht man nun noch hierin dieselben Substitutionen, wie im vorhergehenden Art., so erhält man als Endresultat (III)

$$t = \frac{rk\,\mathrm{tang}\,B.\sin T}{a}\left(1+\frac{5ee+(4ee-14e^4)\sin B^2+5e^4\sin B^4}{24k^4}.bb+\frac{k^4}{12aa\cos\varphi^2}.rr+\tfrac{1}{24}tt\right)$$

Die drei Formeln I. II, III enthalten im Wesentlichen die Auflösung unsrer Aufgabe. Dass sie bis zur dritten Ordnung einschliesslich genau sind, steht durch ihre Ableitung unmittelbar fest. Dass aber in der Wirklichkeit ihre Genauigkeit noch eine Ordnung weiter reicht, oder dass der Fehler jeder der Formeln von der fünften Ordnung ist, würde sich leicht durch einige ergänzende Zwischenentwicklungen, oder auch dadurch darthun lassen, dass in den Ausdrücken ihrer Natur nach keine Grössen gerader Ordnung Statt finden können: ich halte mich jedoch dabei nicht auf, da die *zweite* in den folgenden Artikeln (26—32) auszuführende Ableitung der Formeln dasselbe Resultat von selbst in sich begreift.

26.

Diese Untersuchung ist wie eine selbstständige von allem vorhergehenden unabhängige zu betrachten, und es sollen daher zur Bequemlichkeit und zur Verhütung von Ungewissheiten alle dabei zu verwendenden Bezeichnungen so wie sie auftreten erst erklärt werden. Meistens werden diejenigen Buchstaben, welche schon in der ersten Ableitung gebraucht sind, ihre dortige Bedeutung behalten, doch werden ein Paar derselben (u und s), da sie dort bloss Hülfsgrössen vorstel-

len, die in den Resultaten nicht mehr erscheinen, hier ohne Übelstand zu anderm Zweck benutzt werden dürfen.

Durch die zwei Punkte der Ellipsoidfläche, auf welche die Aufgabe sich bezieht, werde eine geodaetische Linie, zunächst von unbestimmter Ausdehnung, geführt, und auf derselben ein beliebiger Anfangspunkt gewählt. Das Stück jener Linie von dem Anfangspunkte bis zu einem unbestimmten Punkte werde durch u bezeichnet; der Winkel, welchen, an letzterm Punkte, die geodaetische Linie mit dem Meridian macht, jene in dem Sinne wachsender u, diesen von Norden nach Süden genommen, durch X; Breite und Länge des unbestimmten Punktes durch Y und Z. Ich nehme an, dass die Längen von Westen nach Osten, die Azimuthe X in dem Sinn von Süden nach Westen zu wachsen. Werden nun noch, wie immer bisher, halbe grosse Achse und Excentricität der erzeugenden Ellipse durch a und e bezeichnet, so hat man, aus bekannten Gründen

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}u} = -\frac{\cos X(1-ee\sin Y^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-ee)a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = -\frac{\sin X(1-ee\sin Y^2)^{\frac{1}{2}}}{a\cos Y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Es ist ferner, nach einem bekannten Lehrsatze die Grösse

$$\frac{\sin X\cos Y}{\sqrt{(1-ee\sin Y^2)}}$$

für alle Punkte derselben geodaetischen Linie constant, und hieraus, wenn man logarithmisch differentiirt

$$\operatorname{cotang} X\,\mathrm{d}X = (\operatorname{tang} Y - \frac{ee\cos Y\sin Y}{1-ee\sin Y^2})\mathrm{d}Y = \frac{(1-ee)\operatorname{tang} Y}{1-ee\sin Y^2}.\mathrm{d}Y$$

folglich, aus der Verbindung mit (1),

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}u} = -\frac{\sin X\operatorname{tang} Y(1-ee\sin Y^2)^{\frac{1}{2}}}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Wir wollen jedoch unsere Aufgabe allgemeiner fassen, und

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}u} = x,\quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}u} = y,\quad \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = z$$

setzen, indem wir zunächst nur voraussetzen, dass x, y, z irgendwelche gegebene Functionen der beiden Veränderlichen X und Y sind. Es entstehe ferner durch neue Differentiation

$$\mathrm{d}x = x'\mathrm{d}X + x''\mathrm{d}Y$$
$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}X + y''\mathrm{d}Y$$
$$\mathrm{d}z = z'\mathrm{d}X + z''\mathrm{d}Y$$

und dann durch nochmalige Differentiation

$$\mathrm{d}x' = x'''\mathrm{d}X + x''''\mathrm{d}Y, \qquad \mathrm{d}x'' = x''''\mathrm{d}X + x^{\mathrm{v}}\mathrm{d}Y$$
$$\mathrm{d}y' = y'''\mathrm{d}X + y''''\mathrm{d}Y, \qquad \mathrm{d}y'' = y''''\mathrm{d}X + y^{\mathrm{v}}\mathrm{d}Y$$
$$\mathrm{d}z' = z'''\mathrm{d}X + z''''\mathrm{d}Y, \qquad \mathrm{d}z'' = z''''\mathrm{d}X + z^{\mathrm{v}}\mathrm{d}Y$$

Es wird demnach, insofern Z, implicite, nur eine Function von u ist,

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = z$$
$$\frac{\mathrm{dd}Z}{\mathrm{d}u^2} = xz' + yz''$$
$$\frac{\mathrm{d}^3 Z}{\mathrm{d}u^3} = xx'z' + xy'z'' + x''yz' + yy''z'' + xxz''' + 2xyz'''' + yyz^{\mathrm{v}}$$

Die successiven Differentialquotienten von X und Y lassen sich auf dieselbe Art entwickeln, oder unmittelbar aus denen von Z ableiten, wenn man nur darin für z ohne und mit Accenten beziehungsweise x und y ebenso accentuirt substituirt.

27.

Es seien nun die *bestimmten* Werthe, welche die vier Grössen u, X, Y, Z in den beiden Punkten annehmen, auf welche unsre Aufgabe sich bezieht, der Reihe nach,

für den ersten Punkt $R - \frac{1}{2}r$, $T + \frac{1}{2}t$, $B + \frac{1}{2}b$, $L + \frac{1}{2}l$
für den zweiten Punkt $R + \frac{1}{2}r$, $T - \frac{1}{2}t$, $B - \frac{1}{2}b$, $L - \frac{1}{2}l$

und eben so, für denjenigen Punkt der geodaetischen Linie, welcher zwischen jenen in der Mitte liegt, beziehungsweise R, T, B, L, wo demnach die Cursivtypen T, B, L von den Antiqua T, B, L wohl unterschieden werden müssen.

Es mögen ferner die in der Gestalt von Functionen von X und Y erscheinenden achtzehn unbestimmten Grössen

$$x,\ x',\ x'',\ x''',\ x'''',\ x^{\mathrm{v}}$$
$$y,\ y',\ y'',\ y''',\ y'''',\ y^{\mathrm{v}}$$
$$z,\ z',\ z'',\ z''',\ z'''',\ z^{\mathrm{v}}$$

durch die Substitution $X = T$, $Y = B$ die bestimmten Werthe

$$\begin{array}{llllll} f, & f', & f'', & f''', & f'''', & f^{\mathrm{v}} \\ g, & g', & g'', & g''', & g'''', & g^{\mathrm{v}} \\ h, & h', & h'', & h''', & h'''', & h^{\mathrm{v}} \end{array}$$

annehmen; hingegen durch die Substitution $X = \mathrm{T}$, $Y = \mathrm{B}$ folgende

$$\begin{array}{llllll} \mathrm{f}, & \mathrm{f}', & \mathrm{f}'', & \mathrm{f}''', & \mathrm{f}'''', & \mathrm{f}^{\mathrm{v}} \\ \mathrm{g}, & \mathrm{g}', & \mathrm{g}'', & \mathrm{g}''', & \mathrm{g}'''', & \mathrm{g}^{\mathrm{v}} \\ \mathrm{h}, & \mathrm{h}', & \mathrm{h}'', & \mathrm{h}''', & \mathrm{h}'''', & \mathrm{h}^{\mathrm{v}} \end{array}$$

Durch den Taylorschen Lehrsatz wird der Werth von Z für $u = R - \frac{1}{2}r$ in die Reihe

$$\mathrm{L} - \tfrac{1}{2}r . \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} + \tfrac{1}{8}rr . \frac{\mathrm{dd}Z}{\mathrm{d}u^2} - \tfrac{1}{48}r^3 . \frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}u^3} + \text{ u. s. w.}$$

entwickelt, und der für $u = R + \frac{1}{2}r$ in

$$\mathrm{L} + \tfrac{1}{2}r . \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} + \tfrac{1}{8}rr . \frac{\mathrm{dd}Z}{\mathrm{d}u^2} + \tfrac{1}{48}r^3 . \frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}u^3} + \text{ u. s. w.}$$

wo für die Differentialquotienten diejenigen bestimmten Werthe gesetzt werden müssen, welche dem Werthe $u = R$ entsprechen, also

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} &= \mathrm{h} \\ \frac{\mathrm{dd}Z}{\mathrm{d}u^2} &= \mathrm{fh}' + \mathrm{gh}'' \\ \frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}u^3} &= \mathrm{ff}'\mathrm{h}' + \mathrm{fg}'\mathrm{h}'' + \mathrm{f}''\mathrm{gh}' + \mathrm{gg}''\mathrm{h}'' + \mathrm{ffh}''' + 2\mathrm{fgh}'''' + \mathrm{ggh}^{\mathrm{v}} \end{aligned}$$

Da nun jene beiden Werthe von Z beziehungsweise $= L + \frac{1}{2}l$ und $L - \frac{1}{2}l$ sind, so erhält man

$$L = \mathrm{L} + \tfrac{1}{8}(\mathrm{fh}' + \mathrm{gh}'')rr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$l = -\mathrm{h}r - \tfrac{1}{24}(\mathrm{ff}'\mathrm{h}' + \mathrm{fg}'\mathrm{h}'' + \mathrm{f}''\mathrm{gh}' + \mathrm{gg}''\mathrm{h}'' + \mathrm{ffh}''' + 2\mathrm{fgh}'''' + \mathrm{ggh}^{\mathrm{v}})r^3 \;.\;. \quad (5)$$

wo die erstere Gleichung bis auf Grössen der vierten, die andere bis auf Grössen der fünften Ordnung ausschl. genau ist *).

---

*) Die Bemessung der Ordnungen geschieht so, dass $\frac{r}{a}$ wie eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird. Man erkennt leicht, dass die Coëfficienten von r, rr, r^3 u. s. w. die Divisoren a, aa, a^3 u. s. w. impliciren.

Wenn man erwägt, dass in der obigen Entwicklung in Beziehung auf Z nichts weiter vorausgesetzt ist, als dass es eine von u abhängige veränderliche Grösse ist, deren Differentialquotient $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = z$ durch irgend eine Function von X und Y ausgedrückt werde, so kann man die gefundenen Resultate auch unmittelbar auf jede andere in gleichem Falle sich befindende veränderliche Grösse, namentlich auf X oder Y selbst, übertragen, wenn man nur anstatt L, L, l, und der verschieden accentuirten h beziehungsweise T, T, t und die verschiedenen f, oder B, B, b, und die verschiedenen g einschiebt. Zunächst gibt uns demnach die Gleichung (4), von welcher hier sonst kein directer Gebrauch gemacht wird, folgende beiden, gleichfalls bis zur vierten Ordnung ausschl. genauen:

$$T = \mathrm{T} + \tfrac{1}{6}(\mathrm{ff' + f''g})rr$$
$$B = \mathrm{B} + \tfrac{1}{6}(\mathrm{fg' + gg''})rr$$

Man schliesst hieraus zuvörderst, dass h und h, als die Werthe von z, je nachdem man T und B, oder T und B für X und Y substituirt, von einander um eine Grösse zweiter Ordnung verschieden sind, und zwar wird dieser Unterschied, bis auf die vierte Ordnung ausschl. genau, bestimmt durch die Formel

$$h = \mathrm{h} + \tfrac{1}{6}(\mathrm{ff' + f''g})rr.\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}X}\right) + \tfrac{1}{6}(\mathrm{fg' + gg''})rr\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Y}\right)$$

wo für die partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}X}\right)$ und $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Y}\right)$, oder z', z'' ihre bestimmten Werthe bei $X = \mathrm{T}$, $Y = \mathrm{B}$ anzunehmen sind, nemlich $\mathrm{h'}$ und $\mathrm{h''}$. Es ist also, bis auf die vierte Ordnung genau,

$$\mathrm{h} = h - \tfrac{1}{6}(\mathrm{ff'h' + fg'h'' + f''gh' + gg''h''})rr$$

und vermöge der Substitution dieses Werths in der Gleichung (5) wird bis auf die fünfte Ordnung ausschl. genau

$$l = -hr + \tfrac{1}{12}(\mathrm{2ff'h' + 2fg'h'' + 2f''gh' + 2gg''h'' - ffh''' - 2fgh'''' - ggh^{v}})r^3$$

Aus gleichen Gründen wie h von h, werden auch f, $\mathrm{f'}$, $\mathrm{f''}$ u. s. w. g, $\mathrm{g'}$, $\mathrm{g''}$ u. s. w. $\mathrm{h'}$, $\mathrm{h''}$ u. s. w. von f, f', f'' u. s. w. g, g', g'' u. s. w. h', h'' u. s. w. beziehungsweise um Grössen zweiter Ordnung verschieden sein, und man kann daher in dem eben gegebenen Ausdruck für l anstatt jener Grössen die letztern ohne Verminderung des Grades der Genauigkeit substituiren. Es ist also gleichfalls bis auf die fünfte Ordnung ausschl. genau

$$l = -hr + \tfrac{1}{12}(2ff'h' + 2f''gh' + 2fg'h'' + 2gg''h'' - ffh''' - 2fgh'''' - ggh^{v})r^3 \,..\, (6)$$

Der obigen Bemerkung zufolge darf man nun auch in dieser Gleichung l mit t oder mit b vertauschen, wenn man nur

anstatt	$h,\ h',\ h'',\ h''',\ h'''',\ h^{v}$
im erstern Falle	$f,\ f',\ f'',\ f''',\ f'''',\ f^{v}$
und im andern	$g,\ g',\ g'',\ g''',\ g'''',\ g^{v}$

setzt, so dass man hat

$$t = -fr + \tfrac{1}{12}(2ff'f'' + 2f'f''g + 2ff''g' + 2f''gg'' - fff''' - 2ff''''g - f^{v}gg)r^3 \,..\, (7)$$
$$b = -gr + \tfrac{1}{12}(2ff'g' + 2f''gg' + 2fg'g'' + 2gg''g'' - ffg''' - 2fgg'''' - ggg^{v})r^3 \,..\, (8)$$

28.

Die drei Formeln (6), (7), (8) enthalten bereits das Wesentliche zur Auflösung unsrer Aufgabe, so dass zu ihrer Vervollständigung nur noch eine mechanische Rechnung, nemlich die Entwicklung der Werthe der verschiedenen Differentialquotienten und deren Substitution übrig bleibt. Jene Entwicklung gibt, indem wir sofort anstatt der unbestimmten Werthe x, x' u. s. w. y u. s. w. die zu $X = T$, $Y = B$ gehörigen bestimmten f, f' u. s. w., g u. s. w. schreiben, und zur Abkürzung noch setzen

$$\cos B = c$$
$$\sin B = s$$
$$\sqrt{(1 - ee\sin B^2)} = k$$

folgende achtzehn Werthe:

$$f = -\frac{k\sin T}{ac}.s$$
$$f' = -\frac{k\cos T}{ac}.s$$
$$f'' = -\frac{\sin T}{akcc}.(1 - 2eess + ees^4)$$
$$f''' = +\frac{k\sin T}{ac}.s$$
$$f'''' = -\frac{\cos T}{akcc}.(1 - 2eess + ees^4)$$
$$f^{v} = -\frac{\sin T}{ak^3c^3}.((2 - 3ee)s + (ee + 2e^4)s^3 - (2ee + e^4)s^5 + e^4s^7)$$

$$g = -\frac{k^2 \cos T}{a(1-ee)}$$

$$g' = +\frac{k^2 \sin T}{a(1-ee)}$$

$$g'' = +\frac{3kee \cos T}{a(1-ee)} . cs$$

$$g''' = +\frac{k^2 \cos T}{a(1-ee)}$$

$$g'''' = -\frac{3kee \sin T}{a(1-ee)} . cs$$

$$g^{v} = +\frac{3ee \cos T}{a(1-ee)k} . (1-(2+2ee)ss+3ees^4)$$

$$h = -\frac{k \sin T}{ac}$$

$$h' = -\frac{k \cos T}{ac}$$

$$h'' = -\frac{\sin T}{acck} . (1-ee)s$$

$$h''' = +\frac{k \sin T}{ac}$$

$$h'''' = -\frac{\cos T}{acck} . (1-ee)s$$

$$h^{v} = -\frac{(1-ee)\sin T}{ac^3k^3} . (1+ss-2ees^4)$$

29.

Wir wollen nun die drei Gleichungen (7), (8), (6) in folgende Form setzen

$$t = -fr(1+Frr)$$
$$b = -gr(1+Grr)$$
$$l = -hr(1+Hrr)$$

wo

$$-fr = \frac{k \sin T . \operatorname{tang} B}{a} . r$$
$$-gr = \frac{k^2 \cos T}{a(1-ee)} . r$$
$$-hr = \frac{k \sin T}{a \cos B} . r$$

beziehungsweise die genäherten und bis auf die dritte Ordnung ausschl. genauen Werthe von t, b, l sind, die zur Abkürzung mit τ, σ, λ bezeichnet werden sollen. Jede der Grössen F, G, H ist das Aggregat von sieben Theilen. nemlich

$$F = -\tfrac{1}{12}f'f' - \frac{f'f''g}{12f} - \tfrac{1}{12}f''g' - \frac{f''gg''}{12f} + \tfrac{1}{24}ff''' + \tfrac{1}{12}f''''g + \frac{f^{v}gg}{24f}$$
$$G = -\frac{ff'g'}{12g} - \tfrac{1}{12}f''g' - \frac{fg'g''}{12g} - \tfrac{1}{12}g''g'' + \frac{ffg'''}{24g} + \tfrac{1}{12}fg'''' + \tfrac{1}{24}gg^{v}$$
$$H = -\frac{ff'h'}{12h} - \frac{f''gh'}{12h} - \frac{fg'h''}{12h} - \frac{gg''h''}{12h} + \frac{ffh'''}{24h} + \frac{fgh''''}{12h} + \frac{ggh^{v}}{24h}$$

30.

Die Werthe der sieben Bestandtheile von F ergeben sich der Reihe nach

1) $-\frac{kk\cos T^2}{12aacc}.ss$

2) $-\frac{kk\cos T^2}{12aa(1-ee)cc}.(1-2eess+ees^4)$

3) $+\frac{kk\sin T^2}{12aa(1-ee)cc}.(1-2eess+ees^4)$

4) $+\frac{eekk\cos T^2}{4aa(1-ee)^2}.(1-2eess+ees^4)$

5) $-\frac{kk\sin T^2}{24aacc}.ss$

6) $+\frac{kk\cos T^2}{12aa(1-ee)cc}.(1-2eess+ees^4)$

7) $+\frac{kk\cos T^2}{24aa(1-ee)^2cc}.(2-3ee+(ee+2e^4)ss-(2ee+e^4)s^4)$

Hier destruiren die Bestandtheile 2 und 6 einander; 1, 4 und 7 vereinigen sich zu

$$+\frac{kk\cos T^2}{24aa(1-ee)^2}.(2+3ee+(2ee-12e^4)ss+5e^4s^4)$$

die Bestandtheile 3 und 5 hingegen zu

$$+\frac{kk\sin T^2}{24aa(1-ee)cc}.(2-(1+3ee)ss+2ees^4)$$

oder, da $2-(1+3ee)ss+2ees^4$ identisch ist mit $2cckk+(1-ee)ss$, zu

$$+\frac{k^4\sin T^2}{12aa(1-ee)}+\frac{kk\sin T^2}{24aacc}.ss$$

Indem man nun noch $\frac{k^4\sin T^2}{12aa(1-ee)}$ in

$$\frac{k^4}{12aa(1-ee)}-\frac{k^4\sin T^2}{12aa(1-ee)}$$

verwandelt, und alles vereinigt, erhält man

$$F = \frac{k^4}{12aa(1-ee)}+\frac{kk\sin T^2\tang B^2}{24aa}+\frac{kk\cos T^2}{24aa(1-ee)^2}.(5ee+(4ee-14e^4)ss+5e^4s^4)$$

und hieraus, in Gemässheit von $t = \tau(1 + Frr)$,

$$t = \tau\{1 + \frac{k^4}{12aa(1-ee)} . rr + \tfrac{1}{24}\tau\tau + \frac{1}{24k^4}(5ee + (4ee - 14e^4)ss + 5e^4s^4)\sigma\sigma\} \quad .. \quad (9)$$

31.

Für die sieben Bestandtheile von G ergeben sich folgende Werthe:

1) $+ \frac{kk \sin T^2}{12aacc} . ss$

2) $+ \frac{kk \sin T^2}{12aa(1-ee)cc} . (1 - 2eess + ees^4)$

3) $- \frac{eekk \sin T^2}{4aa(1-ee)} . ss$

4) $- \frac{3e^4 kk \cos T^2}{4aa(1-ee)^2} . ccss$

5) $- \frac{kk \sin T^2}{24aacc} . ss$

6) $+ \frac{eekk \sin T^2}{4aa(1-ee)} . ss$

7) $- \frac{eekk \cos T^2}{8aa(1-ee)^2} . (1 - (2 + 2ee)ss + 3ees^4)$

Hier destruiren die Theile 3 und 6 einander; die übrigen vereinigen sich, indem man einerseits 1, 2 und 5, andererseits 4 und 7 zusammenfasst, in

$$+ \frac{kk \sin T^2}{24aa(1-ee)cc} . (2 + (1 - 5ee)ss + 2ees^4)$$
$$- \frac{eekk \cos T^2}{8aa(1-ee)^2} . (1 - (2 - 4ee)ss - 3ees^4)$$

Das erste Glied verwandelt sich, da $2 + (1 - 5ee)ss + 2ees^4$ mit $2cckk + 3(1 - ee)ss$ identisch ist, in

$$\frac{k^4 \sin T^2}{12aa(1-ee)} + \frac{kk \sin T^2}{8aacc} . ss$$

Lösen wir hier $\frac{k^4 \sin T^2}{12aa(1-ee)}$ in $\frac{k^4}{12aa(1-ee)} - \frac{kk \cos T^2}{12aa(1-ee)} . (1 - eess)$ auf, so gibt die Vereinigung aller Theile

$$G = \frac{k^4}{12aa(1-ee)} + \frac{kk \sin T^2 \tang B^2}{8aa} - \frac{kk \cos T^2}{24aa(1-ee)^2} . (2 + ee - (8ee - 14e^4)ss - 9e^4s^4)$$

und hieraus, in Gemässheit von $b = \sigma(1 + Grr)$,

$$b = \sigma\{1 + \frac{k^4}{12aa(1-ee)} . rr + \tfrac{1}{8}\tau\tau - \frac{1}{24k^4} . (2 + ee - (8ee - 14e^4)ss - 9e^4s^4)\sigma\sigma\} \quad .. \quad (10)$$

32.

Endlich ergeben sich die Werthe der sieben Bestandtheile von H folgendermaassen:

$$1)\quad -\frac{kk\cos T^2}{aacc}.ss$$

$$2)\quad -\frac{kk\cos T^2}{12aa(1-ee)cc}.(1-2eess+ees^4)$$

$$3)\quad +\frac{kk\sin T^2}{12aacc}.ss$$

$$4)\quad +\frac{eekk\cos T^2}{4aa(1-ee)}.ss$$

$$5)\quad -\frac{kk\sin T^2}{24aacc}.ss$$

$$6)\quad +\frac{kk\cos T^2}{12aacc}.ss$$

$$7)\quad +\frac{kk\cos T^2}{24aa(1-ee)cc}.(1+ss-2ees^4)$$

Die Glieder 1 und 6 destruiren einander; die übrigen ergeben durch ihre Vereinigung

$$H=\frac{kk\sin T^2}{24aacc}.ss-\frac{kk\cos T^2}{24aa(1-ee)}.(1-10eess)$$

woraus, in Gemässheit von $l=\lambda(1+Hrr)$ hervorgeht

$$l=\lambda\left(1+\tfrac{1}{24}\tau\tau-\frac{1-ee}{24k^4}.(1-10eess)\sigma\sigma\right) \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

Die Formeln 9, 10, 11, welche die Auflösung unsrer Aufgabe in sich fassen, unterscheiden sich von den Formeln III, II, I, (Artt. 25, 24, 23) bloss darin, dass jene innerhalb der Parenthesen da τ und σ haben, wo in diesen t und b steht, was, wie man leicht sieht, in den Endresultaten nur Unterschiede fünfter Ordnung hervorbringt: da nun jene, wie aus ihrer Ableitung erhellet, bis zur fünften Ordnung ausschl. genau sind, so ist bewiesen, dass auch die nach der ersten Methode gefundenen Formeln I, II, III (Art. 23—25) dieselbe Genauigkeit besitzen.

33.

Zur numerischen Berechnung wird man die Formeln 9, 10, 11 lieber in folgende logarithmische Form bringen, bei welcher offenbar der Grad der Genauigkeit unverändert bleibt: M bezeichnet darin den Modulus des gewählten Logarithmensystems:

$$\log t = \log\tau + \frac{Mk^4}{12aa(1-ee)}.rr + \tfrac{1}{24}M\tau\tau + \frac{M}{24k^4}(5ee+(4ee-14e^4)ss+5e^4s^4)\sigma\sigma$$

$$\log b = \log\sigma + \frac{Mk^4}{12aa(1-ee)}.rr + \tfrac{1}{8}M\tau\tau - \frac{M}{24k^4}(2+ee-(8ee-14e^4)ss-9e^4s^4)\sigma\sigma$$

$$\log l = \log\lambda + \tfrac{1}{24}M\tau\tau - \frac{(1-ee)M}{24k^4}(1-10eess)\sigma\sigma$$

Da, wie man leicht sieht, in allen bisher entwickelten Formeln die Grössen t, τ, b, σ, l, λ als in Theilen des Halbmessers ausgedrückt angenommen sind, so wird man, wenn jene in Secunden ausgedrückt und dieselben Bezeichnungen für sie beibehalten werden sollen, den Formeln für τ, σ, λ (Art. 29) noch den Factor $\frac{1}{\rho}$ beifügen müssen; in den Gleichungen 9, 10, 11 hingegen, so wie in den daraus abgeleiteten logarithmischen, muss den Gliedern, die $\tau\tau$ oder $\sigma\sigma$ enthalten, noch der Factor $\rho\rho$ zugesetzt werden, wo ρ (eben so wie oben Art. 16 und 19) die Grösse des Bogens von einer Secunde in Theilen des Halbmessers bedeutet. Behält man nun auch noch μ in der oben gebrauchten Bedeutung bei, nemlich

$$\mu = \tfrac{1}{12}M\rho\rho$$

und schreibt zur Abkürzung

$$(1) = \frac{k}{a\rho}$$

$$(2) = \frac{k^3}{a(1-ee)\rho}$$

$$(3) = \frac{Mk^4}{12aa(1-ee)}$$

$$(4) = \frac{\mu}{2k^4}(5ee+(4ee-14e^4)ss+5e^4s^4)$$

$$(5) = \frac{\mu}{2k^4}(2+ee-(8ee-14e^4)ss-9e^4s^4)$$

$$(6) = \frac{(1-ee)\mu}{2k^4}(1-10eess)$$

$$(7) = \tfrac{1}{2}\mu$$

so ist unsre Auflösung in folgenden sechs Formeln enthalten:

$$\tau = (1)r\sin T\,\mathrm{tang}\,B$$

$$\sigma = (2)r\cos T$$

$$\lambda = (1)r\sin T\sec B$$

$$\log t = \log\tau + (3)rr + (4)\sigma\sigma + (7)\tau\tau$$

$$\log b = \log\sigma + (3)rr - (5)\sigma\sigma + 3(7)\tau\tau$$

$$\log l = \log\lambda - (6)\sigma\sigma + (7)\tau\tau$$

34.

Von den sieben Coëfficienten (1), (2) u. s. w. ist der letzte constant, nemlich

$$\log\ (7) = 7{,}6287228032(-20)$$

und

$$\log 3\,(7) = 8{,}1058440580(-20)$$

die übrigen werden, sobald bestimmte Werthe für die Dimensionen des Ellipsoids gewählt sind, Functionen der Breite B, und lassen sich also in eine Tafel bringen, deren Argument B ist. Steht eine solche Tafel zu Gebote, so ist die Rechnung nach dieser Methode für das Ellipsoid eben so bequem, wie die Rechnung für die Kugel.

Ich füge am Schlusse dieser Abhandlung eine solche Tafel für die Zone von 51^0 bis 54^0 bei, in welcher die Werthe von B von Minute zu Minute fortschreiten, und bemerke dazu folgendes.

Von den Ellipsoidelementen ist die Tafel nur in so fern abhängig, als darin eine bestimmte Abplattung oder ein bestimmter Werth von e zum Grunde gelegt ist, derjenige nemlich, welchen die letzte von Bessel ausgeführte Rechnung ergeben hat, und der auch der der ersten Abhandlung beigefügten Tafel zum Grunde liegt (s. Art. 5). Damit der Zahlenwerth von a bloss von der Abplattung abhängig werde, ist als Einheit nicht die Toise oder ein sonstiges willkürliches Maass angenommen, sondern der zehnmillionste Theil des Erdmeridians, wonach also a unmittelbar durch e vermittelst der Gleichung

$$\pi a\left(1-\tfrac{1}{4}ee-\tfrac{1.3}{4.16}e^4-\tfrac{1.3.15}{4.16.36}e^6-\tfrac{1.3.15.35}{4.16.36.64}e^8-\tfrac{1.3.15.35.63}{4.16.36.64.100}e^{10}-\text{u. s. w.}\right) = 20000000$$

deren Gesetz offenbar ist, gefunden werden kann, oder vermittelst der ihr gleichgeltenden

$$a = \tfrac{20000000}{\pi}\left(1+\tfrac{1}{4}ee+\tfrac{7}{64}e^4+\tfrac{15}{256}e^6+\tfrac{370}{16384}e^8+\tfrac{1515}{65536}e^{10}+\text{u. s. w.}\right)$$

Man findet so, mit jenem Werthe von e,

$$a = 6376851{,}447$$
$$\log a = 6{,}8046062999$$

Es versteht sich, dass bei Anwendung unsrer Tafel auch r erst in derselben Einheit ausgedrückt sein muss; um dies zu erreichen, wird man (gemäss dem von

Bessel in Toisen angegebenen Werthe von a, Art. 5), wenn r ursprünglich in Toisen ausgedrückt war, zu dem Logarithmen hinzuzusetzen haben

$$0{,}2897827662$$

oder, wenn r ursprünglich in französischen gesetzlichen Metern gegeben war, wird von dem Logarithmen subtrahirt werden müssen

$$0{,}0000371638$$

Die Glieder, welche die Factoren (3), (4) u. s. w. enthalten, können als Correctionen betrachtet werden, durch welche die genäherten Logarithmen $\log \tau$, $\log \beta$, $\log \lambda$ in die berichtigten $\log t$, $\log b$, $\log l$ verwandelt werden. Diese Correctionen sind in allen Fällen, für welche unsere Methode angewandt werden soll, nur sehr kleine Decimalbrüche, und da jene Logarithmen in der Regel siebenzifrig gerechnet werden, so ist es bequem, auch jene Correctionen sofort in Einheiten der siebenten Decimale ausgedrückt zu erhalten. Dies geschieht, indem man den Coëfficienten (3), (4) u. s. w. anstatt der im vorhergehenden Art. angegebenen Werthe zehnmillionenmal grössere beilegt, oder ihre Logarithmen um sieben Einheiten vergrössert. Auf diese Weise sind sie in unserer Tafel angesetzt, und so wird denn auch

$$\log\ (7) = 4{,}62872\ (-10)$$
$$\log 3\,(7) = 5{,}10584\ (-10)$$

gesetzt werden. Übrigens sind auch so noch (3), (4), (5), (6), eben so wie (1) und (2) ächte Brüche, oder ihre Logarithmen an sich negativ: in der Tafel stehen sie aber nach üblicher Art, indem sämmtlichen Logarithmen 10 Einheiten geborgt sind.

35.

Von der Benutzung unsrer Formeln zur Auflösung der zu Anfang dieser Abhandlung aufgestellten Aufgabe gilt nun alles, was oben (Art. 20) in Beziehung auf dieselbe Aufgabe für die Kugelfläche gesagt ist, fast unverändert und unter geringen Modificationen. Bezeichnet man die wirklich gegebenen Grössen, nemlich die Breite und das Azimuth an dem ersten Orte mit B^0 und T^0, so wird man zuerst, von einem genäherten Werthe von T ausgehend (wofür man in Er-

mangelung aller andern Kenntniss T^0 annehmen mag), die vier Formeln berechnen

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &= (2) r \cos T \\ B &= B^0 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{b} \\ \tau &= (1) r \sin T \tang B \\ T &= T^0 - \tfrac{1}{2}\tau \end{aligned}$$

und zwar wird man den Werth von (2), der aus der Tafel mit dem Argument B entnommen werden sollte, das erstemal mit dem Argument B^0 entnehmen können, wenn man nicht durch Schätzung einen schon mehr genäherten Werth von B anticipiren zu können glaubt; den Werth von (1) nimmt man aus der Tafel mit dem eben gefundenen Werthe von B.

Dieselbe Rechnung wiederholt man mit dem durch die vierte Gleichung gefundenen Werthe von T, indem man (1) und (2) mit dem schon verbesserten B aus der Tafel entlehnt; und so macht man nöthigenfalls eine abermalige Wiederholung, bis das Resultat zum Stehen kommt, d. i. bis man durch die vierte Formel denselben Werth von T wiedererhält, von dem man zuletzt ausgegangen war. Zu allen diesen Rechnungen wird man nur fünfzifrige Logarithmen verwenden.

Bei den weitern Wiederholungen wird man die Rechnung mit siebenzifrigen Logarithmen führen, die logarithmischen Correctionen von $\log\tau$ und $\log\mathfrak{b}$ mit zuziehen, und $B = B^0 - \frac{1}{2}b$, $T = T^0 - \frac{1}{2}t$ setzen. Erst wenn auch diese Rechnung stehende Resultate gegeben hat, wird man auch λ und l nach den am Schluss des 33. Art. gegebenen Formeln berechnen. Zur Erläuterung dieser Vorschriften mögen hier die Hauptmomente eines Beispiels stehen, welches eben so wie oben Art. 20 bei der sphärischen Rechnung von der Dreiecksseite Brocken-Inselsberg hergenommen ist.

Bei der ellipsoidischen Rechnung ist die Breite des Brockens

$$= 51^\circ\ 48'\ 1''\ 9294 = B^0$$

das Azimuth der Seite Brocken-Inselsberg

$$= 5^\circ\ 42'\ 21''\ 7699 = T^0$$

Der Logarithm der Dreiecksseite in Toisen ist bis auf die siebente Decimale derselbe wie in der conformen Darstellung auf der Kugelfläche, nemlich $= 4{,}7353929$, folglich in der unsrer Hülfstafel zum Grunde liegenden Einheit $\log r = 5{,}0251757$.

Wenn man, Behuf der ersten Annäherung, $T = 5^0\ 42'\ 22''$, und aus der Tafel mit Argument $51^0\ 48'$ den Logarithmen von $(2) = 8{,}51004$ setzt, so findet sich $\sigma = 3412''$, $B = 51^0 19' 36''$; und, wenn man hiemit $\log(1) = 8{,}50893$ setzt, $\tau = 425$ und $T = 5^0\ 38'\ 49''$. Eine neue Rechnung mit diesem Werthe, wobei man (mit dem vorher gefundenen Werthe von B) $\log(2) = 8{,}51007$ setzt, ergibt

$$\sigma = 3413'', \quad B = 51^0\ 19'\ 35'', \quad \tau = 420''\ 5, \quad T = 5^0\ 38'\ 51''\ 5$$

Mit dem gefundenen Werthe von B entlehnt man aus der Tafel

$$\begin{aligned}\log(1) &= 8{,}5089337\\ \log(2) &= 8{,}5100716\\ \log(3) &= 1{,}94876\\ \log(4) &= 3{,}32553\\ \log(5) &= 4{,}92770\\ \log(6) &= 4{,}61132\end{aligned}$$

Mit $T = 5^0\ 38'\ 51''\ 5$ findet sich zuvörderst $\log\sigma = 3{,}5331341$, oder $\sigma = 3412''\ 983$, und indem man hier noch einmal σ anstatt b anwendet, $B = 51^0\ 19'\ 35''\ 4379$. Hiemit ferner $\log\tau = 2{,}6238475$. Hiernächst findet man, in Einheiten der siebenten Decimale

$$\begin{aligned}(3)rr &= 99{,}80\\ (4)\sigma\sigma &= 2{,}46\\ (5)\sigma\sigma &= 98{,}62\\ (6)\sigma\sigma &= 47{,}60\\ 3(7)\tau\tau &= 2{,}26\\ (7)\tau\tau &= 0{,}75\end{aligned}$$

und hiemit die logarithmischen Correctionen

von	$\log\sigma$	$+\ 3$
	$\log\tau$	$+103$
	$\log\lambda$	$-\ 47$

Man hätte diese Rechnung auch schon mit den frühern Werthen von $\log\sigma$ und $\log\tau$ machen können, ohne ein anderes Resultat zu erhalten; es würde dann sogleich mit $\log b = 3{,}5331344$ der Werth von $b = 3412''\ 985$, und $B = 51^0\ 19'\ 35''\ 4369$

sich ergeben haben. Auf $\log\tau$ hat dies keinen ändernden Einfluss; wir haben mithin $\log t = 2{,}6238578$, $t = 420''\,5889$, $T = 5^0\,38'\,51''\,4755$. Wollte man mit diesem Werthe von T die Rechnung noch einmal durchgehen, so würde B keine Änderung erleiden; für $\log\tau$ würde man finden $2{,}6238470$, also $\log t = 2{,}6238573$, $t = 420''\,5884$, mithin $T = 5^0\,38'\,51''\,4757$. Eine nochmalige Rechnung mit diesem Werthe würde gar keine Änderung hervorbringen, und offenbar hätte man auch bei dem vorhergehenden Resultate schon stehen bleiben können, da bei der Anwendung siebenzifriger Logarithmen die vierte Decimale der Secunde um eine oder einige Einheiten schwankend bleiben kann. Das Endresultat ist also

$$\text{Breite von Inselsberg} = B^0 - b = 50^0\,51'\,8''\,9444$$
$$\text{Azimuth der Seite Inselsberg-Brocken} = 180^0 + T^0 - t$$
$$= 185^0\,35'\,21''\,1815$$

Endlich findet sich für den Längenunterschied

$$\log\lambda = 2{,}7313519$$
$$\log l = 2{,}7313472$$
$$l = 538''\,7002 = 0^0\,8'\,58''\,7002$$

Es ist übrigens nicht nöthig, hier die am Schluss des Art. 20 gemachten Bemerkungen zu wiederholen, welche auch hier ihre vollkommene Geltung behalten.

T A F E L.

B	log (1)	log (2)	log (3)	log (4)	log (5)	log (6)
51° 0'	8.5089417	8.5100959	1.94879	3.32421	4.92773	4.61145
1	13	47	79	27	73	45
2	09	34	79	34	73	44
3	05	22	79	41	72	43
4	8.5089401	8.5100909	78	48	72	43
5	8.5089397	8.5100897	78	55	72	42
6	93	85	78	61	72	41
7	88	72	78	68	72	41
8	84	60	78	75	72	40
9	80	47	78	82	71	39
10	8.5089376	8.5100835	1.94877	3.32488	4.92771	4.61138
11	72	23	77	3.32495	71	38
12	68	8.5100810	77	3.32502	71	37
13	64	8.5100798	77	09	71	36
14	59	85	77	15	71	36
15	55	73	77	22	70	35
16	51	61	76	29	70	34
17	47	48	76	36	70	34
18	43	36	76	42	70	33
19	39	23	76	49	70	32
20	8.5089335	8.5100711	1.94876	3.32556	4.92770	4.61132
21	31	8.5100699	76	63	69	31
22	26	86	75	69	69	30
23	22	74	75	76	69	29
24	18	61	75	83	69	29
25	14	49	75	90	69	28
26	10	37	75	3.32596	69	27
27	06	24	75	3.32603	68	27
28	8.5089302	12	74	10	68	26
29	8.5089298	8.5100600	74	17	68	25
30	8.5089293	8.5100587	1.94874	3.32623	4.92768	4.61125
31	89	75	74	30	68	24
32	85	62	74	37	68	23
33	81	50	74	44	67	23
34	77	38	73	50	67	22
35	73	25	73	57	67	21
36	69	13	73	64	67	20
37	65	8.5100501	72	70	67	20
38	60	8.5100488	73	77	67	19
39	56	76	73	84	66	18
40	8.5089252	8.5100463	1.94872	3.32691	4.92766	4.61118
41	48	51	72	3.32697	66	17
42	44	39	72	3.32704	66	16
43	40	26	72	11	66	16
44	36	14	72	17	66	15
45	32	0.5100402	72	24	65	14
46	27	8.5100389	71	31	65	14
47	23	77	71	37	65	13
48	19	65	71	44	65	12
49	15	52	71	51	65	11
50	8.5089211	8.5100340	1.94871	3.32757	4.92765	4.61111

B	log (1)	log (2)	log (3)	log (4)	log (5)	log (6)
51° 50′	8.5089211	8.5100340	1.94871	3.32757	4.92765	4.61111
51	07	28	71	64	64	10
52	8.5089203	15	70	71	64	09
53	8.5089199	8.5100303	70	78	64	09
54	95	8.5100291	70	84	64	08
55	90	78	70	91	64	07
56	86	66	70	3.32798	64	07
57	82	54	70	3.32804	63	06
58	78	41	69	11	63	05
59	74	29	69	18	63	05
52 0	8.5089170	8.5100217	1.94869	3.32824	4.92763	4.61104
1	66	8.5100204	69	31	63	03
2	62	8.5100192	69	38	63	02
3	58	80	69	44	62	02
4	53	67	68	51	62	01
5	49	55	68	58	62	00
6	45	43	68	64	62	4.61100
7	41	30	68	71	62	4.61099
8	37	18	68	78	62	98
9	33	8.5100106	68	84	61	98
10	8.5089129	8.5100094	1.94868	3.32891	4.92761	4.61097
11	25	81	67	3.32898	61	96
12	21	69	67	3.32904	61	96
13	17	57	67	11	61	95
14	12	44	67	17	61	94
15	08	32	67	24	60	94
16	04	20	67	31	60	93
17	8.5089100	8.5100007	66	37	60	92
18	8.5089096	8.5099995	66	44	60	91
19	92	83	66	51	60	91
20	8.5089088	8.5099971	1.94866	3.32957	4.92760	4.61090
21	84	58	66	64	59	89
22	80	46	66	71	59	89
23	76	34	65	77	59	88
24	71	21	65	84	59	87
25	67	8.5099909	65	90	59	87
26	63	8.5099897	65	3.32997	59	86
27	59	85	65	3.33004	58	85
28	55	72	65	10	58	85
29	51	60	64	17	58	84
30	8.5089047	8.5099848	1.94864	3.33024	4.92758	4.61083
31	43	36	64	30	58	83
32	39	23	64	37	58	82
33	35	8.5099811	64	43	57	81
34	31	8.5099799	64	50	57	80
35	27	86	63	57	57	80
36	22	74	63	63	57	79
37	18	62	63	70	57	78
38	14	50	63	76	57	78
39	10	37	63	83	56	77
40	8.5089006	8.5099725	1.94863	3.33090	4.92756	4.61076

B	log(1)	log(2)	log(3)	log(4)	log(5)	log(6)
52° 40′	8.5089006	8.5099725	1.94863	3.33090	4.92756	4.61076
41	8.5089002	13	62	3.33096	56	76
42	8.5088998	8.5099701	62	3.33103	56	75
43	94	8.5099688	62	09	56	74
44	90	76	62	16	56	74
45	86	64	62	22	55	73
46	82	52	62	29	55	72
47	78	40	61	36	55	72
48	73	27	61	42	55	71
49	69	15	61	49	55	70
50	8.5088965	8.5099603	1.94861	3.33155	4.92755	4.61070
51	61	8.5099591	61	62	54	69
52	57	78	61	69	54	68
53	53	66	60	75	54	67
54	49	54	60	82	54	67
55	45	42	60	88	54	66
56	41	29	60	3.33195	54	65
57	37	17	60	3.33201	53	65
58	33	8.5099505	60	08	53	64
59	29	8.5099493	59	14	53	63
53 0	8.5088925	8.5099481	1.94859	3.33221	4.92753	4.61063
1	20	68	59	28	53	62
2	16	56	59	34	53	61
3	12	44	59	41	52	61
4	08	32	59	47	52	60
5	04	20	59	54	52	59
6	8.5088900	8.5099407	58	60	52	59
7	8.5088896	8.5099395	58	67	52	58
8	92	83	58	73	52	57
9	88	71	58	80	51	57
10	8.5088884	8.5099359	1.94858	3.33286	4.92751	4.61056
11	80	46	58	93	51	55
12	76	34	57	3.33299	51	54
13	72	22	57	3.33306	51	54
14	68	8.5099310	57	13	51	53
15	64	8.5099298	57	19	51	52
16	60	86	57	26	50	52
17	55	73	57	32	50	51
18	51	61	56	39	50	50
19	47	49	56	45	50	50
20	8.5088843	8.5099237	1.94856	3.33352	4.92750	4.61049
21	39	25	56	58	50	48
22	35	13	56	65	49	48
23	31	8.5099200	56	71	49	47
24	27	8.5099188	55	78	49	46
25	23	76	55	84	49	46
26	19	64	55	91	49	45
27	15	52	55	3.33397	49	44
28	11	40	55	3.33404	48	44
29	07	27	55	10	48	43
30	8.5088803	8.5099115	1.94854	3.33417	4.92748	4.61042

B	log(1)	log(2)	log(3)	log(4)	log(5)	log(6)
53° 30′	8.5088803	8.5099115	1.94854	3.33417	4.92748	4.61042
31	8.5088799	8.5099103	54	23	48	42
32	95	8.5099091	54	30	48	41
33	91	79	54	36	48	40
34	87	67	54	43	47	39
35	83	55	54	49	47	39
36	78	42	53	56	47	38
37	74	30	53	62	47	37
38	70	18	53	69	47	37
39	66	8.5099006	53	75	47	36
40	8.5088762	8.5098994	1.94853	3.33481	4.92746	4.61035
41	58	82	53	88	46	35
42	54	70	53	3.33494	46	34
43	50	58	52	3.33501	46	33
44	46	45	52	07	46	33
45	42	33	52	14	46	32
46	38	21	52	20	45	31
47	34	8.5098909	52	27	45	31
48	30	8.5098897	52	33	45	30
49	26	85	51	40	45	29
50	8.5088722	8.5098873	1.94851	3.33546	4.92745	4.61029
51	18	61	51	53	45	28
52	14	49	51	59	44	27
53	10	36	51	65	44	27
54	06	24	51	72	44	26
55	8.5088702	12	50	78	44	25
56	8.5088698	8.5098800	50	85	44	25
57	94	8.5098788	50	91	44	24
58	90	76	50	3.33598	43	23
59	86	64	50	3.33604	43	23
54° 0	8.5088682	8.5098752	1.94850	3.33611	4.92743	4.61022

ANZEIGEN.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1827 November 5.

Am 8. October überreichte Hr. Hofr. GAUSS der Königl. Societät eine Vorlesung:

Disquisitiones generales circa superficies curvas.

Obgleich die Geometer sich viel mit allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen beschäftigt haben, und ihre Resultate einen bedeutenden Theil des Gebiets der höhern Geometrie ausmachen, so ist doch dieser Gegenstand noch so weit davon entfernt, erschöpft zu sein, dass man vielmehr behaupten kann, es sei bisher nur erst ein kleiner Theil eines höchst fruchtbaren Feldes angebauet. Der Verf. hat schon vor einigen Jahren durch die Auflösung der Aufgabe, alle Darstellungen einer gegebenen Fläche auf einer andern zu finden, bei welchen die kleinsten Theile ähnlich bleiben, dieser Lehre eine neue Seite abzugewinnen gesucht: der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung ist, abermals andere neue Gesichtspunkte zu eröffnen, und einen Theil der neuen Wahrheiten, die dadurch zugänglich werden, zu entwickeln. Wir werden davon hier anzeigen, was ohne zu grosse Weitläuftigkeit verständlich gemacht werden kann, müssen aber dabei im Voraus bemerken, dass sowohl die neuen Begriffsbildungen, als die Theoreme, wenn die grösste Allgemeinheit umfasst werden soll, zum Theil noch einiger Beschränkungen oder nähern Bestimmungen bedürfen, welche hier übergangen werden müssen.

Bei Untersuchungen, wo eine Mannigfaltigkeit von Richtungen gerader Linien im Raume ins Spiel kommt, ist es vortheilhaft, diese Richtungen durch diejenigen Punkte auf der Oberfläche einer festen Kugel zu bezeichnen, welche die Endpunkte der mit jenen parallel gezogenen Radien sind: Mittelpunkt und Halbmesser dieser *Hülfskugel* sind hierbei ganz willkürlich; für letztern mag die Lineareinheit gewählt werden. Diess Verfahren kommt im Grunde mit demjenigen überein, welches in der Astronomie in stetem Gebrauch ist, wo man alle Richtungen auf eine fingirte Himmelskugel von unendlich grosem Halbmesser bezieht. Die sphärische Trigonometrie, und einige andere Lehrsätze, welchen der Verf. noch einen neuen von häufiger Anwendbarkeit beigefügt hat, dienen dann zur Auflösung der Aufgaben, welche die Vergleichung der verschiedenen vorkommenden Richtungen darbieten kann.

Wenn man die Richtung der an jedem Punkt einer krummen Fläche auf diese errichteten Normale durch den nach dem angedeuteten Verfahren entsprechenden Punkt der Kugelfläche bezeichnet, also jedem Punkt der krummen Fläche in dieser Beziehung einen Punkt der Oberfläche der Hülfskugel entsprechen lässt, so wird, allgemein zu reden, jeder Linie auf der krummen Fläche eine Linie auf der Oberfläche der Hülfskugel, und jedem Flächenstück von jener ein Flächenstück von dieser entsprechen. Je geringer die Abweichung jenes Stücks von der Ebene ist, desto kleiner wird der entsprechende Theil der Kugelfläche sein, und es ist mithin ein sehr natürlicher Gedanke zum Maassstabe der Totalkrümmung, welche einem Stück der krummen Fläche beizulegen ist, den Inhalt des entsprechenden Stücks der Kugelfläche zu gebrauchen. Der Verf. nennt daher diesen Inhalt die *ganze Krümmung* des entsprechenden Stücks der krummen Fläche. Ausser der Grösse kommt aber zugleich noch die *Lage* der Theile in Betracht, die, ganz abgesehen von dem Grössenverhältniss, in den beiden Stücken entweder eine ähnliche, oder eine verkehrte sein kann: diese beiden Fälle werden durch das der Totalkrümmung vorzusetzende positive oder negative Zeichen unterschieden werden können. Diese Unterscheidung hat jedoch nur insofern eine bestimmte Bedeutung, als die Figuren auf bestimmten Seiten der beiden Flächen gedacht werden: der Verf. nimmt sie bei der Kugelfläche auf der äussern und bei der krummen Fläche auf derjenigen Seite, wo man sich die Normale errichtet denkt, und es folgt dann, dass das positive Zeichen bei convex-convexen oder concav-concaven Flächen (die nicht wesentlich verschieden sind), und das nega-

tive bei concav-convexen Statt hat. Wenn das in Rede stehende Stück der krummen Fläche in dieser Beziehung aus Theilen ungleicher Art besteht, so werden noch nähere Bestimmungen nothwendig, die hier übergangen werden müssen.

Die Vergleichung des Inhalts zweier einander correspondirender Stücke der krummen Fläche und der Oberfläche der Hülfskugel führt nun (auf dieselbe Art wie z. B. aus der Vergleichung von Volumen und Masse der Begriff von Dichtigkeit hervorgeht) zu einem neuen Begriffe. Der Verf. nennt nämlich *Krümmungsmaass* in einem Punkt der krummen Fläche den Werth des Bruches, dessen Nenner der Inhalt eines unendlich kleinen Stücks der krummen Fläche in diesem Punkt, und der Zähler der Inhalt des entsprechenden Stücks der Fläche der Hülfskugel, oder die ganze Krümmung jenes Elements ist. Man sieht, dass, in dem Sinn des Verf., ganze Krümmung und Krümmungsmaass bei krummen Flächen dem analog ist, was bei krummen Linien resp. Amplitudo und schlechthin Krümmung genannt wird; er fand Bedenken, die letztern mehr durch Gewohnheit als wegen Angemessenheit recipirten Ausdrücke auf die krummen Flächen zu übertragen. Uebrigens liegt weniger an den Benennungen selbst, als daran, dass ihre Einführung durch prägnante Sätze gerechtfertigt wird.

Die Auflösung der Aufgabe, das Krümmungsmaass in jedem Punkt einer krummen Fläche zu finden, erscheint in verschiedener Gestalt, nach Maassgabe der Art, wie die Natur der krummen Fläche gegeben ist. Die einfachste Art ist, indem die Punkte im Raum allgemein durch drei rechtwinklige Coordinaten x, y, z unterschieden werden, eine Coordinate als Function der beiden andern darzustellen: dabei erhält man den einfachsten Ausdruck für das Krümmungsmaass. Zugleich ergibt sich aber ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen diesem Krümmungsmaass und den Krümmungen derjenigen Curven, die durch den Schnitt der krummen Fläche mit Ebenen senkrecht auf dieselbe, hervorgehen. Bekanntlich hat EULER zuerst gezeigt, dass zwei dieser schneidenden Ebenen, die einander gleichfalls unter einem rechten Winkel schneiden, die Eigenschaft haben, dass in der einen der grösste, in der andern der kleinste Krümmungshalbmesser Statt findet, oder richtiger, dass in ihnen die beiden äussersten Krümmungen vorkommen. Hier ergibt sich nun aus dem erwähnten Ausdruck für das Krümmungsmaass, dass dieses einem Bruche gleich wird, dessen Zähler die Einheit, der Nenner das Product der beiden äussersten Krümmungshalbmesser wird. — Weniger einfach wird der Ausdruck für das Krümmungsmaas, wenn

die Natur der krummen Fläche durch eine Gleichung zwischen x, y, z, bestimmt ist, und noch zusammengesetzter wird jener, wenn die Natur der krummen Fläche dadurch gegeben ist, dass x, y, z in der Gestalt von Functionen zweier neuen veränderlichen Grössen p, q dargestellt sind. Im letzten Fall enthält der Ausdruck funfzehn Elemente, nemlich die partiellen Differentialquotienten der ersten und zweiten Ordnung von x, y, z nach p und q: allein er ist weniger wichtig an sich, als weil er den Übergang zu einem andern bahnt, der zu den merkwürdigsten Sätzen in dieser Lehre gerechnet werden muss. Bei jener Art, die Natur der krummen Fläche darzustellen, hat der allgemeine Ausdruck für irgend ein Linearelement auf derselben,

oder für $\sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}$, die Form $\sqrt{(E\mathrm{d}x^2 + 2F\mathrm{d}x.\mathrm{d}y + G\mathrm{d}y^2)}$

wo E, F, G wiederum Functionen von p und q werden; der erwähnte neue Ausdruck für das Krümmungsmaass enthält nun bloss diese Grössen, und ihre partiellen Differentialquotienten der ersten und zweiten Ordnung. Man sieht also, dass zur Bestimmung des Krümmungsmaasses bloss die Kenntniss des allgemeinen Ausdrucks eines Linearelements erforderlich ist, ohne dass es der Ausdrücke für die Coordinaten x, y, z selbst bedarf. Eine unmittelbare Folge davon ist der merkwürdige Lehrsatz: Wenn eine krumme Fläche, oder ein Stück derselben auf eine andere Fläche abgewickelt werden kann, so bleibt nach der Abwickelung das Krümmungsmaass in jedem Punkt ungeändert. Als specieller Fall folgt hieraus ferner: In einer krummen Fläche, die in eine Ebene abgewickelt werden kann, ist das Krümmungsmaass überall $= 0$. Man leitet daraus sofort die characteristische Gleichung der in eine Ebene abwickelungsfähigen Flächen ab, nemlich, in so fern z als Function von x und y betrachtet wird,

$$\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x^2} \cdot \frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}y^2} - \left(\frac{\mathrm{dd}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y}\right)^2 = 0$$

eine Gleichung, die zwar längst bekannt, aber nach des Verf. Urtheil bisher nicht mit der erforderlichen Strenge bewiesen war.

Diese Sätze führen dahin, die Theorie der krummen Flächen aus einem neuen Gesichtspunkte zu betrachten, wo sich der Untersuchung ein weites noch ganz unangebautes Feld öffnet. Wenn man die Flächen nicht als Grenzen von Körpern, sondern als Körper, deren eine Dimension verschwindet, und zugleich als biegsam, aber nicht als dehnbar betrachtet, so begreift man, dass zweierlei

wesentlich verschiedene Relationen zu unterscheiden sind, theils nemlich solche, die eine bestimmte Form der Fläche im Raume voraussetzen, theils solche, welche von den verschiedenen Formen, die die Fläche annehmen kann, unabhängig sind. Die letztern sind es, wovon hier die Rede ist: nach dem, was vorhin bemerkt ist, gehört dazu das Krümmungsmaass; man sieht aber leicht, dass eben dahin die Betrachtung der auf der Fläche construirten Figuren, ihrer Winkel, ihres Flächeninhalts und ihrer Totalkrümmung, die Verbindung der Punkte durch kürzeste Linien u. dgl. gehört. Alle solche Untersuchungen müssen davon ausgehen, dass die Natur der krummen Fläche an sich durch den Ausdruck eines unbestimmten Linearelements in der Form $\sqrt{(E dp^2 + 2F dp . dq + G dq^2)}$ gegeben ist. Der Verf. hat gegenwärtiger Abhandlung einen Theil seiner seit mehreren Jahren auf diesem Felde angestellten Untersuchuneen einverleibt, indem er sich auf solche einschränkte, die von dem ersten Eintritt nicht zu entfernt liegen und zum Theil als allgemeine Hülfsmittel zu vielfachen weitern Untersuchungen dienen können. Bei unsrer Anzeige müssen wir uns noch mehr beschränken, und uns begnügen, nur einiges als Probe anzuführen. Als solche mögen folgende Lehrsätze dienen.

Wenn auf einer krummen Fläche von Einem Anfangspunkte ein System unendlich vieler kürzester Linien von gleicher Länge ausläuft, so schneidet die durch ihre Endpunkte gehende Linie jede derselben unter rechten Winkeln. Wenn an jedem Punkte einer beliebigen Linie auf einer krummen Fläche kürzeste Linien von gleicher Länge senkrecht gegen jene Linie gezogen sind, so sind diese alle auch senkrecht gegen diejenige Linie, welche ihre andern Endpunkte verbindet. Diese beiden Lehrsätze, wovon der zweite als eine Generalisirung des ersten betrachtet werden kann, werden sowohl analytisch, als durch einfache geometrische Betrachtungen bewiesen. *Der Überschuss der Summe der Winkel eines aus kürzesten Linien gebildeten Dreiecks über zwei Rechte ist der Totalkrümmung des Dreiecks gleich.* Es wird hiebei angenommen, dass für die Winkel derjenige, dem ein dem Halbmesser gleicher Bogen entspricht, $(57^0\,17'\,45'')$, und für die ganze Krümmung, als Stück der Fläche der Hülfskugel, der Inhalt eines Quadrats, dessen Seite der Halbmesser der Hülfskugel ist, als Einheit zum Grunde liegt. Offenbar kann man diess wichtige Theorem auch so ausdrücken: der Überschuss der Winkel eines aus kürzesten Linien gebildeten Dreiecks über zwei Rechte verhält sich zu acht Rechten, wie das Stück der Oberfläche der Hülfsku-

gel, welches jenem als ganze Krümmung entspricht, zu der ganzen Oberfläche der Hülfskugel. Allgemein wird der Überschuss der Winkel eines Polygons von n Seiten, wenn diese kürzeste Linien sind, über $2n-4$ Rechte, der ganzen Krümmung des Polygons gleich sein.

Die allgemeinen in der Abhandlung entwickelten Untersuchungen werden am Schluss derselben noch auf die Theorie der durch kürzeste Linien gebildeten Dreiecke angewandt, wovon wir hier nur ein paar Haupttheoreme anführen. Sind a, b, c die Seiten eines solchen Dreiecks (die als Grössen der ersten Ordnung betrachtet werden); A, B, C die gegenüberstehenden Winkel; α, β, γ die Krümmungsmaasse in den Winkelpunkten; σ der Flächeninhalt des Dreiecks, so ist, bis auf Grössen der vierten Ordnung, $\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\sigma$ der Überschuss der Summe $A+B+C$ über zwei Rechte. Ferner sind, mit derselben Genauigkeit, die Winkel eines ebenen geradlinigen Dreiecks, dessen Seiten a, b, c sind, der Ordnung nach

$$A-\tfrac{1}{12}(2\alpha+\beta+\gamma)\sigma$$
$$B-\tfrac{1}{12}(\alpha+2\beta+\gamma)\sigma$$
$$C-\tfrac{1}{12}(\alpha+\beta+2\gamma)\sigma$$

Man sieht sogleich, dass das letzte Theorem eine Generalisirung des bekannten von Legendre zuerst aufgestellten ist, nach welchem man, bis auf Grössen der vierten Ordnung, die Winkel des geradlinigen Dreiecks erhält, wenn man die Winkel des sphärischen jeden um den dritten Theil des sphärischen Excesses vermindert. Auf einer nichtsphärischen Fläche muss man also den Winkeln ungleiche Reductionen beifügen, und die Ungleichheit ist allgemein zu reden eine Grösse der dritten Ordnung; wenn jedoch die ganze Fläche nur wenig von der Kugelgestalt abweicht, so involvirt jene noch ausserdem einen Factor von der Ordnung der Abweichung von der Kugelgestalt. Es ist unstreitig für die höhere Geodaesie wichtig, dass man im Stande ist, die Ungleichheiten jener Reductionen zu berechnen, und dadurch die volle Ueberzeugung zu erhalten, dass sie für alle messbaren Dreiecke auf der Oberfläche der Erde als ganz unmerklich zu betrachten sind. So finden sich z. B. in dem grössten Dreiecke der von dem Verf. ausgeführten Triangulirung, dessen grösste Seite fast 15 geographische Meilen lang ist, und in welchem der Ueberschuss der Summe der drei Winkel über zwei Rechte fast 15 Secunden beträgt, die drei Reductionen der Winkel auf die Win-

kel eines geradlinigen Dreiecks 4"95113, 4"95104, 4"95131. Übrigens hat der Verf. auch die in den obigen Ausdrücken fehlenden Glieder der vierten Ordnung entwickelt, die für die Kugelfläche eine sehr einfache Form erhalten; bei messbaren Dreiecken auf der Oberfläche der Erde sind sie aber ganz unmerklich, und in dem angeführten Beispiel würden sie die erste Reduction nur um zwei Einheiten der fünften Decimale vermindert und die dritte eben so viel vergrössert haben.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1843 November 6.

Der königlichen Societät ist am 23. October von dem Hofrath Gauss eine Vorlesung überreicht, mit der Überschrift:

Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodaesie,

von welcher hier ein kurzer Bericht gegeben werden soll.

Bei dem trigonometrishen Theile der von dem Verf. in den Jahren 1821—1827 ausgeführten Gradmessung, und bei den spätern damit zusammenhängenden und über das ganze Königreich Hannover sich erstreckenden trigonometrischen Vermessungen sind, sowohl in Beziehung auf die Art, wie die Messungen angestellt wurden, als noch mehr in Beziehung auf ihre nachherige mathematische Behandlung und ihre Verarbeitung zu Resultaten, Wege eingeschlagen, die von den sonst betretenen abweichen. Manches von diesen dem Hofr. Gauss eigenthümlichen Methoden ist zwar bereits zur Öffentlichkeit gebracht, theils von ihm selbst in verschiedenen vorlängst erschienenen Aufsätzen, theils durch andere, welche nach mündlichen oder brieflichen Mittheilungen bei ihren eigenen trigonometrischen Messungen Anwendungen davon gemacht hatten. Allein der erheblichere Theil jener Methoden, diejenigen, welche sich am meisten von den sonst gebräuchlichen unterscheiden, und deren Verständniss eine tiefere mathematische Begründung erfordert, ist bisher noch nicht dargestellt. Des Verf. frühern Vorsatz, nach völliger Beendigung der Messungen diese selbst nebst allen von ihm angewandten Verfahrungsarten in einem besondern Werke darzulegen, haben Umstände, deren Auseinandersetzung nicht hieher gehört, zur Zeit noch procrastinirt, und er hat deshalb das Auskunftsmittel gewählt, das im theoreti-

schen Theile ihm eigenthümliche in einer Reihe von einzelnen Abhandlungen bekannt zu machen. Es wird dadurch noch der Vortheil gewonnen, dass auf diese Art manche ein selbstständiges Interesse darbietende Untersuchungen, welche mit den übrigen in enger Verwandtschaft stehen, sie vorbereiten und in ein helleres Licht setzen, auch wenn von denselben bei den in Rede stehenden Messungen selbst keine unmittelbare Anwendung gemacht ist, doch mit grösserer Ausführlichkeit entwickelt werden können, als bei dem frühern Plane mit einer gleichmässigen Behandlung der Gegenstände verträglich sein würde.

In die Klasse solcher Untersuchungen gehört namentlich diejenige, welche den Gegenstand der vorliegenden *ersten* Abhandlung ausmacht. Den Hauptinhalt derselben bildet eine Methode, nach welcher ein System von Dreiecken auf der Oberfläche eines Umdrehungs-Ellipsoids, ohne etwas von der Schärfe aufzuopfern, so berechnet werden kann, als wenn es auf einer Kugelfläche sich befände. Diese Methode findet ihre Grundlage in der Auflösung eines viel umfassendern Problems, welche der Verf. in einer 1822 geschriebenen und von Herrn Conferenzrath SCHUMACHER im dritten Heft der Astronomischen Abhandlungen zum Druck beförderten Denkschrift gegeben hat, unter dem Titel: *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird.* Der Verf. hat diejenigen Darstellungen einer Fläche auf einer andern, welche der angegebenen Bedingung Genüge leisten, zur Abkürzung des Vortrags und weil sie überhaupt als eine sehr reiche Hülfsquelle für die Rechnungen der höhern Geodaesie eine besondere Benennung wohl verdienen, mit dem Namen *conforme Darstellungen* belegt, welches sonst vage Beiwort also hier immer in einer präcis bestimmten Bedeutung zu verstehen ist. MERCATORS und die stereographische Projection sind bekannte Beispiele conformer Darstellungen der Kugelfläche auf der Ebene.

Es ist kaum nöthig, zu bemerken, dass die Aehnlichkeit in den kleinsten (unendlich kleinen) Theilen wohl unterschieden werden muss von der Ähnlichkeit in allen endlichen Theilen. Die letztere ist nur in speciellen Fällen zu erreichen möglich, wenn nemlich die erste Fläche entweder auf die zweite selbst oder auf eine ihr ähnliche abgewickelt werden kann; im Allgemeinen aber, wo die Conformität *nur* in der Ähnlichkeit der kleinsten Theile besteht, ist das *Vergrösserungsverhältniss*, d. i. das Verhältniss, in welchem die auf beiden Flächen einan-

der entsprechenden unendlich kleinen Linien zu einander stehen, eine nach Verschiedenheit der Stellen in den Flächen veränderliche Zahl. In MERCATORS Projection z. B. ist die Vergrösserungszahl desto grösser, je entfernter vom Äquator, in der stereographischen Projection, je entfernter vom Augenpunkte die betreffenden Stellen sind.

Von jeder gegebenen Fläche sind auf einer andern gegebenen Fläche unendlich viele conforme Darstellungen möglich; die allgemeine Auflösung umfasst sie sämmtlich, indem sie eine arbiträre Function enthält, welche nach Gefallen oder den jedesmaligen Zwecken gemäss bestimmt werden kann. Wenn nur ein Theil der einen Fläche übertragen werden soll, ist es in der Regel am vortheilhaftesten, eine solche conforme Darstellung zu wählen, bei welcher innerhalb der darzustellenden Fläche die Ungleichheiten des Vergrösserungsverhältnisses in den möglich engsten Grenzen bleiben.

Die Aufgabe der conformen Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche ist in der angeführten Schrift unter den Beispielen besonders abgehandelt, und der allgemeinen Auflösung sind zwei specielle beigefügt, wovon die eine vorzugsweise für die Darstellung der ganzen Ellipsoidfläche geeignet, die andere hingegen weit zweckmässiger ist, wenn (wie es immer bei bestimmten Anwendungen auf die Geodaesie der Fall ist) nur ein mässiger Theil der als ellipsoidisch betrachteten Erdfläche auf eine Kugelfläche conform übertragen werden soll. In wie hohem Grade diese zweite Darstellungsart der oben ausgesprochenen Forderung genügt, ist aus einem a. a. O. aufgestellten Beispiele abzunehmen, wo die Veränderlichkeit des Vergrösserungsverhältnisses innerhalb einer Zone von fünf Breitengraden nur $\frac{1}{530000}$ beträgt. Es sind ferner daselbst die Hauptzüge der Methode, wie überhaupt eine conforme Übertragung zur Berechnung eines Dreieckssystems benutzt werden kann, im Allgemeinen angedeutet, die eigentliche Ausführung aber, und die Anwendung auf diese bestimmte Übertragungsart einer späteren Bearbeitung vorbehalten.

Die gegenwärtige Abhandlung ist nun dazu bestimmt, diese Verpflichtung auszulösen, obwohl nicht ganz in derselben Art, wie sie eingegangen war: es wird nemlich darin nicht die eben erwähnte, sondern eine davon verschiedene dritte specielle Auflösung der Aufgabe zum Grunde gelegt, durch welche der beabsichtigte Zweck noch vollkommener erreicht wird. In diesen Blättern müssen wir uns damit begnügen, nur im Allgemeinen einen Begriff davon zu geben.

Ein System von Dreiecken auf dem Sphäroid, dessen Seiten sogenannte geodaetische Linien sind, wird bei einer conformen Übertragung auf die Kugelfläche durch ein analoges Dreieckssystem dargestellt, worin die Winkel, wie schon aus dem Begriffe der Conformität von selbst folgt, den entsprechenden Winkeln des erstern Systems *genau* gleich sind, während die Seiten zwar nicht in mathematischer Schärfe Bögen von grössten Kreisen werden, aber doch davon nur sehr wenig abweichen. Kann man nun bewirken, dass diese Abweichungen in dem ganzen Umfange des Systems nach Massgabe der in die Berechnung zu legenden Genauigkeit wie ganz verschwindend betrachtet werden dürfen, so ist klar, dass nachdem eine Seite des sphäroidischen Systems auf die Kugelfläche übertragen ist, man ohne weiteres das ganze System wie eines von gewöhnlichen sphärischen Dreiecken berechnen darf, und nur am Schluss von den Längen und Breiten auf der Kugelfläche auf die Längen und Breiten auf dem Sphäroid zurückzugehen braucht, insofern man die Endresultate der Messung in dieser Form verlangt. Dieser Übergang wird entweder vermittelst der Formeln, welche die gewählte Übertragungsart darbietet, geschehen können, oder vermittelst einer im Voraus berechneten Hülfstafel. In den Fällen hingegen, wo jene Abweichung merklich genug wird, um eine Berücksichtigung zu verdienen, wird jeder aus den Messungen hervorgegangene Winkel vor der scharfen Berechnung auf der Kugel erst einer kleinen Reduction bedürfen, und die Arbeit wird dadurch nur unbedeutend vergrössert werden, wenn die Zahlwerthe der Reductionen sich mit Leichtigkeit berechnen lassen.

Die in der vorliegenden Abhandlung entwickelte Übertragungsart ist so beschaffen, dass die Abweichung derjenigen Curve, durch welche ein geodaetischer Bogen auf der Kugelfläche dargestellt wird, von Grösstenkreisbogen zwischen denselben Endpunkten, immer wie ganz verschwindend zu betrachten ist in der Nähe eines bestimmten Parallelkreises (Normal-Parallelkreises), welchen man nach Gefallen wählen kann, und, wenn man die ganze Rechnungsanlage von vorne her für ein bestimmtes Dreieckssystem selbst ausführt, am schicklichsten ungefähr durch die Mitte des ganzen Systems legen mag. Je weiter man sich von diesem Normal-Parallelkreise nach Norden oder Süden entfernt, desto grösser können jene Abweichungen werden, die übrigens daneben zugleich von der Grösse der Dreiecksseiten und von ihrer Lage gegen den Meridian abhängig sind; immer aber bleiben sie, selbst bei sehr beträchtlicher Entfernung von dem Normal-Pa-

rallelkreise, noch so geringfügig, dass man ihre Berücksichtigung bei den meisten Messungen kaum der wenn auch leichten Mühe werth halten wird.

In der Abhandlung ist die Theorie aller dieser und anderer damit zusammenhängenden Rechnungen vollständig entwickelt, an einer durchgehenden Musterrechnung erläutert, und mit einer Hülfstafel begleitet, die allerdings zunächst für diejenige Zone bestimmt ist, in welcher das Hannoversche Dreieckssystem liegt, aber auch ohne weiteres für Messungen benutzt werden kann, die diese Zone weit überschreiten: sie erstreckt sich nemlich über eine Zone von zwölf Breitengraden, in deren Mitte der gewählte Normal-Parallelkreis von 52°40′ Breite liegt. Diese Tafel ist mit einer Schärfe berechnet, die ausreicht selbst wenn ein Dreieckssystem mit zehnzifrigen Logarithmen berechnet werden soll, also mit einer viel grösseren Schärfe, als man in den meisten Fällen beibehalten wird: indessen schien die kleine Raumersparniss, die durch Weglassung von ein paar Decimalen gewonnen sein würde, zu unerheblich, um beim Abdruck etwas davon zu unterdrücken.

Merklich und unmerklich sind bei Rechnungsoperationen relative Begriffe, und es ist also wohl der Mühe werth, sie nach ein paar aus der Abhandlung entlehnten Beispielen auf ein bestimmtes Maass zurückzuführen.

In dem Hannoverschen Dreieckssysteme ist das grösste Dreieck, welches auch zugleich am weitesten von dem Normal-Parallelkreise abliegt, dasjenige, welches zwischen den Punkten Brocken, Hohehagen, Inselsberg gebildet wird. In diesem kommen daher auch die grössten Werthe der Richtungsreductionen vor, und zwar bei der Seite Hohehagen-Inselsberg, wo die Reduction des Azimuths an dem erstern Endpunkte —0″00332, am andern +0″00428 beträgt. In dem ganzen Systeme kommen nur noch zwei andere Dreiecksseiten vor, wo die Reductionen 0″001 übersteigen, bei allen übrigen bleiben sie unter dieser Grösse.

Das grösste Hauptdreieck der trigonometrischen Vermessungen der Schweiz ist das zwischen den Punkten Chasseral, Suchet, Berra enthaltene; es berührt eben die südliche Grenze, bis zu welcher die Hülfstafel sich erstreckt, so dass die Richtungsreductionen sich noch vermittelst derselben berechnen lassen. Die grösste Reduction ist die, welche das Azimuth von Chasseral in Suchet trifft, und beträgt +0″06221.

Es ist hieraus ersichtlich, dass in der ganzen Zone, worin das Hannoversche Dreieckssystem liegt, die Reduction ganz wegfällt, wenn die Rechnung auf

Hunderttheile der Secunde geführt wird, und dass man sogar in der ganzen Zone von zwölf Graden, welche die Hülfstafel umfasst, die Berücksichtigung der Reductionen unterlassen kann, wenn man in der Rechnung nur Zehntel der Secunde notirt.

Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1846 September 28.

Am 1sten September wurde von dem geh. Hofrath Gauss der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften eine Vorlesung überreicht mit der Überschrift:

Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodaesie, zweite Abhandlung,

über deren Inhalt und Zusammenhang mit der ersten Abhandlung ein kurzer Bericht hier zu geben ist.

In der ersten Abhandlung war eine neue Methode, die geodaetischen Messungen zu behandeln, vorgetragen, deren Haupteigenthümlichkeit darin besteht, dass die meisten Rechnungen ganz oder fast ganz eben so geführt werden, als befände sich das Dreieckssystem nicht auf einer sphäroidischen, sondern auf einer Kugelfläche, und zwar ohne allen Abbruch für die äusserste Schärfe der Resultate. Eine der Hauptaufgaben im Gebiete der geodaetischen Rechnungen, nemlich aus der Grösse einer als geodaetische Linie auftretenden Dreiecksseite, der Breite des einen Endpunkts, und dem Azimuthe, unter welchem daselbst der andere Endpunkt erscheint, abzuleiten die Breite dieses andern Endpunkts, das dortige Azimuth der Dreiecksseite, und den Längenunterschied der beiden Punkte, reducirt sich bei jener Behandlungsweise auf die blosse Auflösung eines sphärischen Dreiecks. Ein Paar Seiten sind gleichwohl dieser Aufgabe in der erwähnten Abhandlung aus dem Grunde gewidmet, weil die gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie, wenn man nicht zu mehrzifrigen Logarithmen greifen will, nicht immer ausreichen würden, den Resultaten eine ganz genügende Schärfe zu geben, und deshalb gewisse Umformungen jener Formeln nothwendig werden. Ausserdem aber verstattet der Umstand, dass die Seiten solcher Dreiecke, deren Winkel wirklich gemessen werden, immer in Vergleich zu den Dimensionen des gan-

zen Erdkörpers nur kleine Grössen sein können, solche Umwandlungen der Formeln, welche die Geschmeidigkeit und Bequemlichkeit derselben sehr vergrössern; ja, wenn gleich diese Umwandlungen eigentlich nur Näherungsformeln sind, so können sie doch nicht bloss eben so grosse, sondern selbst grössere Schärfe gewähren, als die absolut strengen Formeln, was man nicht paradox finden wird, wenn man erwägt, dass die letztern doch immer vermittelst der trigonometrischen Tafeln zur Ausübung kommen müssen, deren Schärfe keine absolute, sondern durch die Anzahl der Decimalzifern begrenzt ist. Unter den verschiedenen in der ersten Abhandlung mitgetheilten für den angedeuteten Zweck bestimmten Formeln zeichnet sich nun besonders die am Schluss derselben aufgeführte Combination dadurch aus, dass sie den Zusammenhang jener sechs Quantitäten in der zur Rechnung möglich bequemsten Gestalt aufstellt, und eine Schärfe gewährt, die auch bei den grössten wirklich messbaren Dreiecken überflüssig ausreicht. Es musste dadurch das Verlangen nach dem Besitz analoger unmittelbar für die Ellipsoidfläche geltender Formeln erweckt werden, und die Entwicklung derselben bildet den Hauptinhalt der gegenwärtigen *zweiten* Abhandlung.

Während die Auffindung der erwähnten für die Kugelfläche gültigen Formeln auf ganz elementarischen Sätzen beruhete, erfordert hingegen die Ermittlung ihrer Gegenstücke auf der Ellipsoidfläche eine Reihe ziemlich verwickelter Operationen, und es muss daher ohne Zweifel angenehm sein, wenn mehr als Ein Weg zu demselben Ziele zu gelangen nachgewiesen wird. Der Verf., welcher alle diese Untersuchungen schon vor mehr als dreissig Jahren zu seinem Privatgebrauch durchgeführt, und nur bisher zur Veröffentlichung noch keine besondere Veranlassung gefunden hatte, theilt nun in der vorliegenden Abhandlung *zwei* unter sich durchaus verschiedene, aber zuletzt zu ganz gleichen Resultaten führende Ableitungsarten mit, von denen eine in der Theorie der conformen Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche wurzelt. In dieser Beziehung schliesst sich die zweite Abhandlung auch an die erste an, obwohl übrigens beide insofern als gänzlich unabhängig von einander zu betrachten sind, als man freie Wahl behält, die geodaetischen Rechnungen entweder bloss nach der in der ersten Abhandlung, oder bloss nach der in der zweiten Abhandlung gelehrten Methode zu führen.

Die Aufgabe, von der geographischen Lage eines Punkts auf der Sphäroidfläche zu der eines andern Punktes überzugehen, der mit jenem durch eine geo-

daetische Linie von bekannter Grösse und Richtung verbunden ist, ist schon seit langer Zeit vielfältig behandelt, und um unter verschiedenen Methoden zu seinem Gebrauch passend zu wählen, muss man allerdings mancherlei Umstände berücksichtigen. Es ist z. B. erheblich dabei, ob man die Aufgabe nur für Einen oder einige wenige concrete Fälle aufzulösen hat, oder für sehr viele. In der letztern Voraussetzung wird es von Wichtigkeit sein, dass die Methode jedesmal die möglich grösste Bequemlichkeit und Übersichtlichkeit der Definitivrechnung gewähre, wenn auch die Anwendbarkeit der Methode vielleicht erst gewisse allgemeine Vorbereitungsarbeiten erfordern sollte. Eben so wichtig ist der Umstand, ob man die Resultate einer ausgedehnten trigonometrischen Vermessung alle in der Form von geographischer Länge und Breite und zwar ausschliesslich *nur* in *dieser* Form verlange, oder ob daneben die Resultate für die Lage sämmtlicher Punkte auch noch in einer andern Form, z. B. der der rechtwinkligen Coordinaten, aufgestellt werden; im letztern Fall wird es weniger nothwendig sein, die geographische Lage mit der alleräussersten Schärfe anzugeben.

Die von Dusejour, Legendre, Delambre u. A. gegebenen Formeln berücksichtigen nur die erste Potenz der Abplattung, was allerdings in practischer Hinsicht von nicht grosser Erheblichkeit sein wird, da einmal die Abplattung des Erdsphäroids nur ein kleiner Bruch ist. Es ist daher auch nicht die Meinung, es als einen in practischer Beziehung wichtigen Vorzug geltend zu machen, dass die neue Methode von der Kleinheit der Abplattung ganz unabhängig ist. Die bessern unter jenen Methoden mögen allerdings eine in den meisten Fällen zureichende Schärfe gewähren, obwohl man einen in mathematischer Beziehung genügenden Nachweis dafür vermisst. Dagegen darf man behaupten, dass die neue Methode, wenn die nöthigen Erfordernisse bereit sind, eine bequemere und nach ihrem wesentlichen Inhalt in einem bedeutend kleinern Raum zu concentrirende Rechnung ergibt. Bessels im Jahre 1825 gegebene Auflösung trägt das Gepräge einer grossen mathematischen Vollendung, und ist auch gar nicht abhängig von der Voraussetzung, dass die Entfernung der beiden Punkte von einander im Vergleich zu den Dimensionen des ganzen Erdsphäroids klein sei. In theoretischer Rücksicht ist dies ohne Zweifel ein Vorzug dieser Methode; bei Beurtheilung des practischen Werthes hat man aber folgende Umstände in Betracht zu ziehen. Die Methode macht gar keinen Unterschied zwischen dem Fall grosser und dem Fall kleinerer Entfernungen, sondern erfordert für alle Fälle gleich lange Rechnungen,

verzichtet also auf die Vortheile, die man in dem letztern in der Ausübung ungleich häufiger vorkommenden Falle bei dem Gebrauch anderer Methoden von diesem Umstande ziehen kann. Der nützliche Gebrauch der Besselschen Methode wird sich also auf den Fall beschränken, wo die beiden Punkte nicht unmittelbar durch die Seite eines wirklich gemessenen Dreiecks zusammenhängen, sondern wo der Zusammenhang durch eine grössere Reihe von Dreiecken vermittelt ist. Allein dann muss man mit Recht fragen, wie denn die *Data* zu der Aufgabe erlangt werden sollen, nemlich die wirkliche Länge der die beiden Punkte verbindenden geodaetischen Linie, und der Winkel, welchen sie an dem einen Endpunkte mit dem Meridian macht? Diese Bestimmung durch eine bloss *sphärische* Berechnung der Übergangsdreiecke zu machen (wie Bessel bei der wenig ausgedehnten preussischen Gradmessung gethan hat), würde bei einer viel grössern Entfernung nicht mehr zulässig bleiben: soll aber dieser Übergang sphäroidisch gerechnet werden, so wird dies schon für sich allein eben so viel Arbeit erfordern, als wenn man gleich von jedem folgenden Punkt Breite, Länge und das rückwärts geltende Azimuth bestimmt. Übrigens gelten diese Bemerkungen auch von Ivory's Auflösungsmethode, die mit der von Bessel viele Ähnlichkeit hat, aber das eigentliche practische Bedürfniss wenig berücksichtigt.

Über die in der vorliegenden Abhandlung gegebene Methode möge hier noch Folgendes bemerkt werden.

Die Formeln geben unmittelbar die *Differenzen* zwischen den beiden Breiten und den beiden Azimuthen, so wie den Längenunterschied, und eben hierauf beruht, bei der Kleinheit dieser Differenzen (insofern rücksichtlich der Azimuthe das eine von der Südseite, das andere von der Nordseite des Meridians gezählt wird) die Schärfe der Rechnung, ohne mehrstellige Logarithmen zu erfordern. Die Symmetrie und Einfachheit der Formeln hingegen beruhet darauf, dass sie zunächst nicht von der Breite und dem Azimuthe an dem einen Endpunkte, sondern von dem Mittel der beiden Breiten und dem Mittel der beiden Azimuthe abhängen. Es folgt daraus, dass die Formeln, zur Auflösung der Aufgabe, wie sie oben ausgesprochen ist, nur vermöge eines indirecten Verfahrens oder einer successiven Annäherung benutzt werden können. Geübte und mit den Hülfen des kleinen Mechanismus derartiger Operationen vertraute Rechner werden in diesem Umstande kaum eine Unbequemlichkeit finden, zumal da man annehmen kann, dass fast immer zu der Zeit, wo die scharfe Ausführung der Rech-

nung vorgenommen werden soll, sehr genäherte Werthe der zu bestimmenden Grössen schon vorliegen. Genau genommen haben übrigens auch alle andern Auflösungsarten des Problems, namentlich auch die BESSELsche, theilweise diesen Charakter indirecter Operationen. Der wesentlichste Umstand bleibt aber der, dass von den wiederholten Annäherungen nur die letzte, die den ganzen Kern der Rechnung vollständig enthält, aufbewahrt zu werden braucht, und dass diese eine Kürze und Übersichtlichkeit hat, wie keine andere Methode.

Die Formeln für die Auflösung der Aufgabe auf der Sphäroidfläche unterscheiden sich von denen für die Kugelfläche lediglich dadurch, dass gewisse Zwischengrössen, die bei diesen constant sind, bei jenen von der Breite abhängig werden; diese lassen sich folglich in eine Hülfstafel bringen, deren Argument die Breite bildet. Steht eine solche Hülfstafel zu Gebote, so wird in jedem concreten Falle die Rechnung auf der Sphäroidfläche ganz eben so leicht, wie auf der Kugelfläche. Für die Zone von 51—54 Grad Breite, welche für das Hannoversche Dreieckssystem ausreicht, ist eine solche Hülfstafel am Schlusse der Abhandlung beigefügt, und zwar nach demjenigen Werthe der Abplattung, welchen BESSEL aus allen bisherigen Gradmessungen abgeleitet hat, und der auch schon in der ersten Abhandlung zum Grunde gelegt war. Wer dieselbe Methode auf ein ausserhalb dieser Zone liegendes Dreieckssystem anwenden wollte, würde damit anfangen müssen, jene Hülfstafel für seinen Zweck weiter auszudehnen, oder, falls er eine andere Abplattung zum Grunde legen wollte, sich erst eine neue Hülfstafel zu construiren. Wo es die Bearbeitung eines grossen Dreieckssystems gilt, kommt eine solche vorgängige Hülfsarbeit gar nicht in Betracht, und die darauf gewandte Mühe wird durch die Bequemlichkeit der Benutzung reichlich ersetzt. Für den Fall hingegen, wo man nur eine oder ein paar concrete Auflösungen der in Rede stehenden Aufgabe suchen soll, hat die Methode nicht vorzugsweise bestimmt sein sollen.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1808 Januar 9.

Archimedes gründete bekanntlich in seiner Schrift, *Circuli dimensio*, seine Bestimmung der Grenzen für den Umfang des Kreises darauf, dass er denselben zwischen den Umfang eines umgeschriebenen und eines eingeschriebenen 96 Ecks einschloss. Die Berechnung dieser Zahlen, oder vielmehr die Bestimmung einer grössern Zahl, als jener, und einer kleinern, als dieser, verrichtet er durch stufenweises Fortschreiten vom Sechseck zum Zwölfeck, von diesem zum 24 Eck u. s. f. Für beide 96 Ecke geht er daher, nach unserer Art zu reden, von einem genäherten Werthe der Irrationalgrösse $\sqrt{3}$ aus, wovon der eine, nemlich $\frac{265}{153}$, etwas zu klein, der andere, $\frac{1351}{780}$, etwas zu gross ist; jener wird bei den umschriebenen, dieser bei den eingeschriebenen Vielecken gebraucht. Bei genauerer Ansicht findet man, dass diese genäherten Werthe in der Reihe $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{26}{15}$ u. s. f., deren Glieder abwechselnd grösser und kleiner sind als $\sqrt{3}$, und jedes weniger davon verschieden, als irgend ein andrer, durch kleinere Zahlen ausgedrückter, Bruch, — mit vorkommen; der Bruch $\frac{265}{153}$ ist nemlich das achte, und $\frac{1351}{780}$ das eilfte Glied der Reihe. Es scheint demnach, dass Archimed diese genäherten Werthe nicht durch Zufall, sondern methodisch gefunden habe; da er selbst sich aber über die Art, wie er dazu gekommen ist, gar nicht erklärt, und man übrigens nicht findet, dass unsre Methoden dergleichen Aufgaben aufzulösen, den Alten bekannt gewesen wären, so bietet sich hier ein Gegenstand zu Conjecturen dar. Hr. Prof. Mollweide in Halle hat in einer kürzlich an die Königl. Societät, deren Correspondent er ist, eingeschickten kleinen Abhandlung, welche

De methodo ab Archimede adhibita ad rationem, in qua inter se sunt latus trianguli aequilateri et radius circuli circumscripti, numeris veritati proxime exprimendam

überschrieben ist, eine Untersuchung angestellt, und ein Verfahren angegeben, das dem Zustande der Arithmetik der Alten angemessen ist, und also vielleicht das von Archimed gebrauchte selbst sein könnte. Hr. M. leitet nemlich, indem er die Seite des Dreiecks durch AC, und den Halbmesser des umschriebenen

Kreises durch AB, ferner eine Linie $= AC - AB$ durch CF bezeichnet, durch Schlüsse in der bei den alten Geometern üblichen Form folgende Proportionen ab:

$$\begin{aligned} AC:AB &= 5AB + 2CF : 3AB + CF = 19AB + 7CF : 11AB + 4CF \\ &= 71AB + 26CF : 41AB + 15CF = 265AB + 97CF : 153AB + 56CF \\ &= 989AB + 362CF : 571AB + 209CF \end{aligned}$$

Aus der vorletzten folgt dann leicht $AC:AB > 265:153$, so wie aus der letzten, wenn man eine Linie $BD = 2AB - AC = AB - CF$ einführt,

$$AC:AB = 1351AB - 362BD : 780AB - 209BD < 1351:780$$

Dass Hr. M., welcher sich mit der bei den alten Geometern üblichen Einkleidung arithmetischer Schlüsse sehr vertraut gemacht hat, Archimed's Ideengang wirklich errathen haben könne, wollen wir gern zugeben; entscheiden wird sich aber hierüber um so weniger etwas lassen, da dergleichen Untersuchungen auf sehr mannigfaltige Art angegriffen werden können, und überdies auch sonst Spuren vorhanden sind, dass der grosse Grieche im Besitz mancher nichts weniger als gemeiner Wahrheiten und Kunstgriffe, selbst aus der höhern Arithmetik, gewesen sein muss.

Eine Frage bleibt übrigens hier noch übrig, warum nemlich Archimed, wenn er seine genäherten Werthe methodisch gefunden hat, bei den grössern bis zum eilften Gliede gegangen ist, da er doch bei den kleinern nur bis zum achten ging; man sollte glauben, er würde bei jenen sich mit dem neunten Gliede $\frac{362}{209}$ begnügt haben, welches immer zur Ausmittelung der untern Grenze $3\frac{10}{71}$ hinreichend gewesen wäre, und könnte vielleicht verleitet werden, hieraus die Folge zu ziehen, dass Archimed doch den Bruch $\frac{1351}{780}$ durch eine Art von glücklichem Zufall gefunden habe, und der einfachere $\frac{362}{209}$ ihm entgangen sei. Hr. M. glaubt, Archimed habe jenen Bruch desswegen gewählt, weil er der einfachste von denen sei, deren Zähler zu der Ordnung der Tausender gehören, so wie er den Bruch $\frac{265}{153}$ als den einfachsten aus der Ordnung der Hunderter gewählt habe: allein dieser Grund scheint uns nicht befriedigend. Wir finden es vielmehr wahrscheinlicher, dass er den Bruch $\frac{1351}{780}$ desswegen vorzog, weil er fand, dass derselbe zufälliger Weise beim weitern Fortgange der Rechnung eine bequeme Vereinfachung darbietet, so dass sich beim 24 Eck für dasjenige Verhältniss, welches, nach unsrer Art zu reden, $1 : \text{cotang}\, 7^\circ 30'$ ist, eine äusserst nahe Grenze sehr

einfach durch 240 : 1823 vorstellen liess; diesen Vortheil hätte er entbehren müssen, wäre er ursprünglich von dem Bruche $\frac{367}{168}$ ausgegangen.

Am Schlusse der Abhandlung macht Hr. M. noch die Bemerkung, dass auch COLUMELLA *de re rustica* V, 2 von einem der genäherten Werthe von $\sqrt{3}$ (nemlich von $\frac{26}{15}$) Gebrauch gemacht hat, indem er für den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks die Summe des dritten und des zehnten Theils des auf seiner Seite beschriebenen Quadrats annimmt.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1813 Juli 31.

Géométrie descriptive par GASPARD MONGE, *de l'institut des sciences etc. Nouvelle édition. Avec un supplément par* M. HACHETTE, *instituteur à l'école impériale polytechnique etc.* Paris, bei J. KLOSTERMANN dem jüngern. 162 und 118 Seiten in Quart.

Die Geometrie, deren Gegenstand die Raumverhältnisse sind, zerfällt in zwei grosse Abtheilungen, je nachdem der Raum nur nach zwei Dimensionen betrachtet wird (in der Ebene), oder nach allen drei Dimensionen zugleich. Man begreift leicht, dass der andere Theil seiner Natur nach von einem viel grössern Umfange sein, und eine viel grössere Mannigfaltigkeit von Fragen und Untersuchungen darbieten müsse, als der erste. Wenn daher schon von unserer Elementar-Geometrie die Planimetrie einen grössern Theil ausmacht, als die Stereometrie, so rührt dies nur daher, dass letztere verhältnissmässig viel weniger entwickelt und ausgebildet ist. In der That hat man vorzüglich die Untersuchungen der letztern Art in neuern Zeiten lieber mit Hülfe der Analyse behandelt, und sie so gleichsam der Geometrie entzogen, welche sich nur der unmittelbaren Anschauung bedient. Es ist auch nicht zu läugnen, dass die Vorzüge der analytischen Behandlung vor der geometrischen, ihre Kürze, Einfachheit, ihr gleichförmiger Gang, und besonders ihre Allgemeinheit, sich gewöhnlich um so entschiedener zeigen, je schwieriger und verwickelter die Untersuchungen sind. Inzwischen ist es doch immer von hoher Wichtigkeit, dass auch die geometrische Methode fortwährend cultivirt werde. Abgesehen davon, dass sie doch in manchen einzelnen

Fällen unmittelbarer und kürzer zum Ziele führt, als die Analyse, besonders wenn diese nicht mit Gewandtheit gehandhabt wird, dass jene dann eine ihr eigenthümliche Eleganz hat, wird sie auch besonders in formeller Hinsicht und beim frühern jugendlichen Studium unentbehrlich bleiben, um Einseitigkeit zu verhüten, den Sinn für Strenge und Klarheit zu schärfen, und den Einsichten eine Lebendigkeit und Unmittelbarkeit zu geben, welche durch die analytischen Methoden weit weniger befördert, mitunter eher gefährdet werden. Aus diesen Gründen sieht man mit Vergnügen, dass einige Französische Geometer in den letzten Jahrzehnten angefangen haben, den Theil der Geometrie, welcher sich mit den Verhältnissen von Punkten und Linien, die nicht in Einer Ebene liegen, von verschiedenen Ebenen gegen einander, mit Linien von doppelter Krümmung und mit krummen Flächen beschäftigt, mit besonderer Sorgfalt, und, in so fern dabei bloss geometrische Methoden angewandt werden, als eine besondere Disciplin unter dem Namen der *Géométrie descriptive* zu cultiviren. Dem vorliegenden Werke über diese Wissenschaft müssen wir insbesondere das Lob einer grossen Klarheit und Concision im Vortrage, eines wohlgeordneten Überganges vom Leichtern zum Schwerern, und der Reichhaltigkeit an neuen Ansichten und gelungenen Ausführungen beilegen, und daher das Studium desselben als eine kräftige Geistesnahrung empfehlen, wodurch unstreitig zur Belebung und Erhaltung des echten, in der Mathematik der Neuern sonst manchmal vermissten, geometrischen Geistes viel mit beigetragen werden kann. Ausser dieser rein wissenschaftlichen Seite dieser Untersuchungen kommt auch noch der mannigfaltige Nutzen in Betracht, welchen sie in den Künsten haben, die sich auf Raumverhältnisse beziehen, namentlich in der Zeichenkunst, der Feldmesskunst, der Baukunst, der Befestigungskunst. Auch in dieser Hinsicht hat der Verfasser seine Schrift durch mancherlei Anwendungen interessanter zu machen gewusst, wenn er gleich meistens nur mehr auf sie hingedeutet, als sie wirklich ausgeführt hat.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1814 Februar 14.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the Year 1813. IV und 304 Seiten. 26 S. *Meteorological Journal* und 8 S. *Index* in Quart.

Mathematische und astronomische Abhandlungen. — Über eine merkwürdige Anwendung des Cotesischen *Lehrsatzes, von* J. F. W. Herschel (Sohn des Astronomen). Es sei n eine beliebige ganze Zahl, $n\omega = 360^0$ und N irgend ein Winkel. Unter diesen Voraussetzungen gibt der Cotesische Lehrsatz das Product aus allen Radiis Vectoribus, denen in einem Kegelschnitt, nach astronomischer Art zu reden, die wahren Anomalien $N, N+\omega, N+2\omega, N+3\omega \ldots . N+(n-1)\omega$ entsprechen, durch einen einfachen Ausdruck. Wenn gleich diese und andere ähnliche Entwickelungen, welche den Gegenstand des Aufsatzes ausmachen, an sich keine besondere Schwierigkeiten haben, so liest man diesen doch mit Vergnügen wegen der Art der Behandlung. Was der Verf. über die Bezeichnung $\cos^2 A$ sagt, welches einige neuere mathematische Schriftsteller für das Quadrat von $\cos A$, ganz gegen alle Analogie, gebrauchen, da es dieser zufolge den Cosinus eines Bogens $= \cos A$ bedeuten sollte, hat ganz unsern Beifall.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1814 Mai 2.

Commentationes mathematico-philologicae tres, sistentes explicationem duorum locorum difficilium, alterius Virgilii, *alterius* Platonis, *itemque examinationem duorum mensurarum praeceptorum* Columellae. *Adjecta est epistola ad v. cl.* J. G. Schneider *de excerptis geometricis* Epaphroditi *et* Vitruvii Rufi *scripta ab auctore harum commentationum* Carolo Brandano Mollweide, *astron. in acad. Lipsiensi professore.* Leipzig 1813. 122 Seiten in Octav, nebst einer Kupfertafel.

[Die Anzeige der ersten Abhandlung ist in dem Bande für Astronomie der Werke von Gauss abgedruckt.]

Die zweite Abhandlung, über eine dunkle Stelle in Plato's Menon, war schon im Jahre 1805 der hiesigen Königl. Soc. der Wissenschaften handschrift-

lich vorgelegt, und ein kurzer Auszug daraus schon damals in unsern Blättern mitgetheilt (1805 St. 124). Wir bemerken also hier nur, dass dies diejenige Stelle ist, wo Socrates durch ein Beispiel aus der Geometrie anschaulich machen will, wie man sich zur Auflösung einer Aufgabe vorher durch Annahme gewisser näherer Bestimmungen vorzubereiten hat. Die geometrische Aufgabe, welche Socrates hierzu wählt, ist die Frage über die Möglichkeit, ein gegebenes Dreieck in einen gegebenen Kreis einzutragen, aber die Worte, wodurch er erst gewisse Einschränkungen über die Art des Dreiecks festsetzen will, haben den Auslegern viel zu schaffen gemacht. Herr Mollweide führt mit vielem gelehrten Scharfsinn hier aus, dass die dadurch bezeichnete Eigenschaft keine andere ist, als die Zerlegbarkeit des Dreiecks in zwei andere dem Ganzen ähnliche, welches denn freilich im Grunde nichts anders als eine pretiöse Umschreibung des *rechtwinkligen* Dreiecks ist. Die Art wie Hr. M. beweist, dass jene Eigenschaft nur dem rechtwinkligen Dreiecke zukommen kann, ist viel künstlicher und weitläufiger als hier eben nöthig gewesen wäre, da dies gleich unmittelbar aus der Gleichheit der drei Winkel ABC, ADB, BDC folgt (S. 46).

Die dritte Abhandlung war gleichfalls schon früher unserer Societät handschriftlich vorgelegt, und ein Bericht darüber in unsern gel. Anz. (1807 St. 74) gegeben; sie erscheint hier mit bedeutenden Vermehrungen. Es werden darin zwei von Columella gelehrte Näherungsmethoden erläutert, die Fläche des gleichseitigen Dreiecks und die Fläche eines Kreissegments zu berechnen. Eine kleine Übereilung findet sich S. 71, wo behauptet wird, dass kein anderer Bruch, dessen Zähler und Nenner unter 100 sei, dem wahren Verhältnisse des gleichseitigen Dreiecks zum Quadrate über derselben Seite so nahe kommen könne, als $\frac{13}{30}$; in der That sind die beiden Brüche $\frac{29}{67}$ und $\frac{42}{97}$ genauer.

Der Brief an den verdienten Prof. Schneider in Breslau enthält einige Anmerkungen zu den von Hase in Bredows *Epistolae Parisienses* mitgetheilten Stücken von den freilich sehr unbedeutenden mathematischen Schriften des Vitruvius Rufus und Epaphroditus.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1814 Juni 13.

Lehrbuch der mathematischen Geographie von Friedrich Kries, Professor am Gymnasium zu Gotha. Mit sieben Kupfertafeln. 236 Seiten in Octav. Leipzig, bei G. J. Göschen.

Der Plan des Verfassers bei Abfassung dieses Lehrbuchs für eine Wissenschaft, welche für jeden Gebildeten ein so vielseitiges Interesse hat, ging dahin, zwischen den dürftigen und oberflächlichen Abrissen derselben, die den Lehrbüchern der politischen Erdbeschreibung vorangeschickt zu werden pflegen, und sich nur auf die Aufzählung von Hauptresultaten beschränken, ohne sie durch mathematische Behandlung zu begründen oder zu erläutern, — und den grössern Werken, welche feinere, weniger allgemein verbreitete Kenntnisse der höhern Mathematik voraussetzen, eine schickliche Mittelstrasse zu treffen. In einem solchen Werke erwartet man nicht neue Aufklärungen, die die Wissenschaft selbst weiter bringen, sondern nur, dass eine zweckmässige Auswahl aus dem Bekannten mit Ordnung, Gründlichkeit und Klarheit dargestellt werde, und dieses Ziel hat der Verf. in der That erreicht. Er handelt in zehn Abschnitten von der Gestalt des Erdkörpers im Allgemeinen; von der mathematischen Eintheilung der Erdkugel und ihrer Grösse; von der Umdrehung derselben um ihre Axe und den damit zusammenhängenden Erscheinungen; von den Mitteln, die geographische Breite eines Orts zu bestimmen, und eine Mittagslinie zu ziehen; von der Bewegung der Erde um die Sonne; von der Eintheilung der Himmels- und der Erdkugel in Beziehung auf die Bewegung der Erde um die Sonne, und den Erscheinungen, die auf der Erde aus dieser Bewegung entstehen; von der Zeitbestimmung und den Mitteln zur Bestimmung der geographischen Länge; von der sphäroidischen Gestalt der Erde; von der Verfertigung künstlicher Erdkugeln und der Landkarten; vom Gebrauch der künstlichen Erdkugel zur Auflösung mathematisch geographischer Aufgaben. Wir können nicht anders, als dieser Anordnung und Auswahl im Allgemeinen unsern Beifall geben, wenn gleich unsrer Ansicht nach hie und da noch einige Gegenstände, die nicht berührt sind, hätten aufgenommen, und dagegen andere z. B. die verschiedenen Projectionsarten der Karten allenfalls etwas kürzer hätten abgehandelt werden können. So hätten wir unter andern einige Anleitung gewünscht, die Oberfläche einzelner Länder, wenn

auch nur bei der Kugelgestalt der Erde, und den Abstand einzelner Punkte auf der Erdfläche von einander zu berechnen, so wie überhaupt, dass der Gebrauch der sphärischen Trigonometrie nicht so ganz ausgeschlossen wäre. Auch bei der sphäroidischen Gestalt der Erde hätte wohl *bestimmter* herausgehoben werden können, wie der Begriff der geographischen Breite anders modificirt werden müsse als auf der Kugel, und wie von dieser Breite die relative Lage gegen den Erdäquator, die Erdaxe und den Erdmittelpunkt abhängt. Doch diess sind Kleinigkeiten, die dem allgemeinen Werthe des Buchs keinen Abbruch thun, und auf die der Verfasser, wenn vielleicht eine neue Auflage erforderlich sein sollte, zu welcher ein für den Unterricht sehr empfehlenswerthes Buch wohl gelangen kann, leicht wird Rücksicht nehmen können.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1816 April 20.

Commentatio in primum elementorum Euclidis *librum, qua veritatem geometriae principiis ontologicis niti evincitur, omnesque propositiones, axiomatum geometricorum loco habitae, demonstrantur. Auctore* J. C. Schwab, *Regi Württembergiae a consiliis aulicis secretioribus, academiae scientiarum Petropolitanae, Berolinensis et Harlemensis Sodali.* (65 Seiten in Octav.) Stuttgart 1814. Typis J. F. Steinkopf.

Vollständige Theorie der Parallel-Linien. Nebst einem Anhange, in welchem der erste Grundsatz zur Technik der geraden Linie angegeben wird. Herausgegeben von Matthias Metternich, *Doctor der Philosophie, Professor der Mathematik, Mitglied der gelehrten Gesellschaft nützlicher Wissenschaften zu Erfurt.* 44 Seiten in Octav. Mainz 1815. Auf Kosten des Verfassers in Commission bei Florian Kupferberg.

Es wird wenige Gegenstände im Gebiete der Mathematik geben, über welche so viel geschrieben wäre, wie über die Lücke im Anfange der Geometrie bei Begründung der Theorie der Parallel-Linien. Selten vergeht ein Jahr, wo nicht irgend ein neuer Versuch zum Vorschein käme, diese Lücke auszufüllen, ohne dass wir doch, wenn wir ehrlich und offen reden wollen, sagen könnten, dass wir im Wesentlichen irgend weiter gekommen wären, als Euklides vor 2000 Jah-

ren war. Ein solches aufrichtiges und unumwundenes Geständniss scheint uns der Würde der Wissenschaft angemessener, als das eitele Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen.

Der Verfasser der erstern Schrift hatte bereits vor 15 Jahren in einer kleinen Abhandlung: *Tentamen novae parallelarum theoriae notione situs fundatae* einen ähnlichen Versuch gemacht, indem er Alles auf den Begriff von Identität der Lage zu stützen suchte. Er definirt Parallel-Linien als solche gerade Linien, die einerlei Lage haben, und schliesst daraus, dass solche Linien von jeder dritten geraden Linie nothwendig unter gleichen Winkeln geschnitten werden müssen, weil diese Winkel nichts anders seien, als das Maass der Verschiedenheit der Lage dieser dritten Linie von den Lagen der beiden Parallel-Linien. Diese Beweisart ist in der vorliegenden neuen Schrift wiederholt, ohne dass wir sagen könnten, dass sie durch die eingewebten philosophischen Betrachtungen an Stärke gewonnen hätte. Der Behauptung S. 24: Notionem situs e geometria adeo non excludi posse, ut potius notionibus eius fundamentalibus annumeranda sit, *dudum omnes agnovere geometrae* muss in dem Sinne, in welchem der Verf. den Begriff Lage in seinem Beweise gebraucht, jeder Geometer widersprechen. Wenn wir von des Verfassers Definition: Situs est modus, quo plura coëxistunt vel iuxta se existunt in spatio ausgehen, so ist Lage ein blosser Verhältniss-Begriff, und man kann wohl sagen, dass zwei gerade Linien *A*, *B* eine gewisse Lage gegen einander haben, die mit der gegenseitigen Lage zweier andern *C*, *D* einerlei ist. Aber der Verf. gebraucht das Wort Lage in seinem Beweise als absoluten Begriff, indem er von Identität der Lage zweier nicht coincidirenden geraden Linien spricht. Diese Bedeutung ist offenbar so lange leer und ohne Haltung, bis wir wissen, was wir uns bei einer solchen Identität denken und woran wir dieselbe erkennen sollen. Soll sie an der Gleichheit der Winkel mit *einer* dritten geraden Linie erkannt werden, so wissen wir ohne vorangegangenen Beweis noch nicht, ob eben dieselbe Gleichheit auch bei den Winkeln mit einer vierten geraden Linie Statt haben werde: soll die Gleichheit der Winkel mit *jeder* andern geraden Linie das Criterium sein, so wissen wir wiederum nicht, ob gleiche Lage ohne Coincidenz möglich ist. Wir stehen mithin *nach* des Verf. Beweise noch gerade auf demselben Punkte, wo wir *vor* demselben standen.

Ein grosser Theil der Schrift dreht sich um die Behauptung gegen Kant,

dass die Gewissheit der Geometrie sich nicht auf Anschauung, sondern auf Definitionen und auf das Principium identitatis und das Principium contradictionis gründe. Dass von diesen logischen Hülfsmitteln zur Einkleidung und Verkettung der Wahrheiten in der Geometrie fort und fort Gebrauch gemacht werde, hat wohl Kant nicht läugnen wollen: aber dass dieselben für sich nichts zu leisten vermögen, und nur taube Blüthen treiben, wenn nicht die befruchtende lebendige Anschauung des Gegenstandes überall waltet, kann wohl niemand verkennen, der mit dem Wesen der Geometrie vertraut ist. Hrn. Schwab's Widerspruch scheint übrigens zum Theil nur auf Missverständniss zu beruhen: wenigstens scheint uns, nach dem 16. Paragraph seiner Schrift, welcher von Anfang bis zu Ende gerade das Anschauungsvermögen in Anspruch nimmt, und am Ende beweisen soll, postulata Euclidis in generaliora resolvi posse, non sensu et *intuitione* sed *intellectu* fundata, dass Hr. Schwab sich bei diesen Benennungen verschiedener Zweige des Erkenntnissvermögens etwas anderes gedacht haben müsse, als der Königsberger Philosoph.

Obgleich der Verfasser der zweiten Schrift seinen Gegenstand auf eine ganz andere und wirklich mathematische Art behandelt hat, so können wir doch über das Resultat derselben nicht günstiger urtheilen. Wir haben nicht die Absicht, hier den ganzen Gang seines versuchten Beweises darzulegen, sondern begnügen uns, dasjenige hier herauszuheben, worauf im Grunde alles ankommt. Man denke sich zwei im Punkte N unter rechten Winkeln einander schneidende gerade Linien, und fälle von einem Punkte S, der ausserhalb dieser geraden Linien aber in derselben Ebne liegt, senkrechte auf dieselben ST und SM. Es kommt nun darauf an zu beweisen, dass MST ein rechter Winkel wird. Der Verf. sucht dies apagogisch zu beweisen; zuvörderst nimmt er an, MST sei spitz, fällt von T auf MS das Perpendikel Tp, und beweist, dass p zwischen S und M fallen muss. Hierauf fällt er wieder aus p auf NT das Perpendikel pq, wo q zwischen T und N fallen wird. Dann fällt er abermals aus q auf MS das Perpendikel qp', wo p' zwischen p und M liegen wird. Sodann abermals aus p' auf NT das Perpendikel $p'q'$ u. s. w. Diese Operationen lassen sich ohne Aufhören fortsetzen, und so werden von der Linie MS nach und nach die Stücke Sp, pp' u. s. w. abgeschnitten, die jedes eine angebliche Grösse haben, und deren Zahl unbegrenzt ist. Der Verfasser meint nun, dass dies widersprechend sei, weil auf diese Weise nothwendig MS zuletzt erschöpft werden müsste.

Es ist kaum begreiflich, wie er sich auf eine solche Weise selbst täuschen konnte. Er macht sich sogar selbst den Einwurf, dass die Summe der Stücke Sp, pp' u. s. w., wenn die Stücke immer kleiner und kleiner werden, doch, ungeachtet ihre Anzahl ohne Aufhören zunehme, nicht über eine gewisse Grenze hinauswachsen könnte, und meint diesen Einwurf damit zu heben, dass jene Stücke, auch wenn sie immer kleiner und kleiner werden, doch immer grösser bleiben, als *eine angebliche Grösse*; nemlich jene Stücke sind Katheten von rechtwinkligen Dreiecken, und folglich immer grösser als der Unterschied zwischen Hypotenuse und der andern Kathete. Fast scheint es, dass eine grammatische Zweideutigkeit den Verf. irre geleitet hat, nemlich der zwiefache Sinn des Artikels *eine* angebliche Grösse. Der Schluss des Verf. würde nur dann richtig sein, wenn sich zeigen liesse, dass die Stücke Sp, pp' u. s. w. immer grösser bleiben, als *eine bestimmte* angebliche Grösse, z. B. als der Unterschied zwischen der Hypotenuse pT und der Kathete ST. Aber das lässt sich nicht beweisen, sondern nur, dass jedes Stück immer grösser bleibt, als eine angebliche Grösse, die aber selbst für jedes Stück eine andere ist, nemlich Sp grösser als der Unterschied zwischen pT und ST, ferner pp' grösser als der Unterschied zwischen qp' und qp u. s. w. Hiemit verschwindet nun aber die ganze Kraft des Beweises.

Auf dieselbe Art, wie er seinen Beweis führen zu können geglaubt hat, könnte er auch beweisen, dass in einem ebnen Dreiecke ABC, worin B ein rechter Winkel ist, C nicht spitz sein könne; er brauchte nur aus B ein Perpendikel BD auf die Hypotenuse AC zu fällen, dann wieder das Perpendikel DE auf AB und so ohne Aufhören die Perpendikel EF, FG, GH u. s. w. wechselsweise auf AC und AB. Die Stücke CD, DF, FH u. s. w. sind immer grösser als der angebliche Unterschied zwischen Hypotenuse und einer Kathete *desjenigen* rechtwinkligen Dreiecks, worin jede der Reihe nach die andere Kathete ist, demungeachtet erschöpft ihre Summe offenbar die Hypotenuse AC nie, so gross auch ihre Anzahl genommen wird.

Wir müssten fast bedauern, bei so bekannten und leichten Dingen so lange verweilt zu haben, wenn nicht diese Schrift, deren Verf. es übrigens wirklich um Wahrheit zu thun zu sein scheint, durch die Art wie sie schon vor ihrer Erscheinung in öffentlichen Blättern angekündigt wurde, eine mehr als gewöhnliche Aufmerksamkeit auf sich gezogen hätte. Wir bemerken daher hier nur noch, dass der Verf. nachher auf eine ganz ähnliche, und daher eben so nichtige Art bewei-

sen will, dass der Winkel MST nicht stumpf sein kann: allein hierbei ist doch ein wesentlicher Unterschied, weil in der That die Unmöglichkeit dieses Falles in aller Strenge bewiesen werden kann, welches weiter auszuführen aber hier nicht der Ort ist.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1822 October 28.

Theorie der Parallelen, von Carl Reinhard Müller, *Doctor der Philosophie, ausserordentlichem Professor der Mathematik u. s. w.* 40 S. in 4. Marburg 1822.

Rec. hat bereits vor sechs Jahren in diesen Blättern seine Überzeugung ausgesprochen, dass alle bisherigen Versuche, die Theorie der Parallellinien streng zu beweisen, oder die Lücke in der Euklidischen Geometrie auszufüllen, uns diesem Ziele nicht näher gebracht haben, und kann nicht anders, als dies Urtheil auch auf alle späteren ihm bekannt gewordenen Versuche ausdehnen. Inzwischen bleiben doch manche solche Versuche, obgleich der eigentliche Hauptzweck verfehlt ist, wegen des darin bewiesenen Scharfsinns den Freunden der Geometrie lesenswerth, und. Rec. glaubt in dieser Rücksicht die vorliegende bei Gelegenheit einer Schulprüfung bekannt gemachte kleine Schrift besonders auszeichnen zu müssen. Den ganzen sinnreichen Ideengang des Verf. hier ausführlich darzulegen, wäre für unsere Blätter zu weitläuftig und auch überflüssig, da die Schrift selbst gelesen zu werden verdient: aber sie hat ihre schwache Stelle, wie alle übrigen Versuche, und diese herauszuheben, ist der Zweck dieser Anzeige. Wir finden diese schwache Stelle S. 15 in dem Beweise des Lehrsatzes des 15. Artikels. Dieser Lehrsatz ist der wahre Nerv der ganzen Theorie, welche fällt, sobald jener nicht streng bewiesen werden kann. Wir führen daher zuvörderst diesen Lehrsatz hier auf; die dazu gehörige Figur wird jeder leicht selbst zeichnen können.

Wenn jeder Winkel an der Grundlinie ON eines gleichschenkligen Dreiecks grösser ist, als der Winkel an der Spitze A, und man setzt in O an die Seite OA einen Winkel von der Grösse des Winkels A, dessen anderer Schenkel OL die AN in dem Punkte L zwischen A und N trifft, schneidet alsdann

von AO ein Stück $OM = NL$ ab und zieht ML; wenn man ferner in M an MA abermals einen Winkel von der Grösse des Winkels A setzt, dessen anderer Schenkel MC die AN in dem Punkte C zwischen A und L trifft, hierauf von AM ein Stück $MB = LC$ abschneidet und BC ziehet, und sodann diese Construction auf ähnliche Art fortsetzt, so dass auf der Linie OA die Punkte O, M, B, E, G, K u. s. w., auf der Linie NA hingegen die Punkte N, L, C, D, F, H u. s. w. liegen, so wird behauptet, dass die Stücke OM, MB, BE, EG, GK u.s.w. oder die ihnen resp. gleichen NL, LC, CD, DF, FH u.s.w. eine abweichende Progression bilden.

Den Beweis dieses Lehrsatzes sucht der Verf. apagogisch so zu führen, dass er die übrigen möglichen Fälle, wenn der Lehrsatz nicht wahr wäre, aufzählt, und die Unstatthaftigkeit eines jeden zu erweisen versucht. Der Verf. behauptet nemlich, dass unter jener Voraussetzung einer von folgenden fünf Fällen Statt finden müsste. Die auf einander folgenden Stücke, von OM an gerechnet, wären

1) alle einander gleich, oder

2) jedes nachfolgende grösser als das vorhergehende, oder

3) einige einander gleich und das darauf folgende grösser oder kleiner, oder

4) einige auf einander folgende nähmen fortschreitend ab, und die darauf folgenden fortschreitend zu oder

5) sie würden abwechselnd grösser und kleiner.

In dieser Aufzählung ist der mögliche Fall übergangen, dass die Stücke anfangs fortschreitend zu und dann fortschreitend abnähmen, und nach Rec. eigener Überzeugung (deren tiefer liegende Gründe hier aber nicht angeführt werden können) wäre dessen Erledigung gerade die Hauptsache und die eigentliche Auflösung des Gordischen Knotens. Inzwischen kann man zugeben, dass diese Auslassung hier in so fern wenig auf sich hat, als die Beweisart des Verf. für die Unstatthaftigkeit des dritten Falles, wenn sie zulässig wäre, auch auf diesen Fall von selbst erstreckt werden könnte. Allein eben diesem angeblichen Beweise der Unstatthaftigkeit des dritten Falls können wir keine Gültigkeit zugestehen. Der Verf. stellt die Sache so vor. Wenn z. B. in dem dritten Falle angenommen wird, die beiden ersten Stücke seien gleich, das dritte aber grösser, so wäre DC also grösser als CL. Da nun aber AML gleichfalls ein gleichschenkliges Dreieck ist, dem dieselbe Grundbedingung zukommt, wie dem ursprünglichen Dreieck AON, so müsste, wenn jener dritte Fall mit seiner angenommenen Unterabthei-

lung der gültige wäre, $DC = CL$ sein, in Widerspruch mit den vorher gefundenen. Wir haben, wie wir glauben, bei diesem Moment des Beweises, das worauf es ankommt, noch etwas klarer und bestimmter nach der Ansicht des Verf. angedeutet, als er es selbst gethan hat, wodurch dann aber auch die Schwäche desselben, wie uns scheint, leichter erkannt wird. Denn offenbar ist hier ganz willkürlich angenommen, dass bei allen gleichschenkligen Dreiecken mit dem Winkel A an der Spitze und grössern Winkel an der Basis, wenn mit ihnen die im Lehrsatz angezeigte Construction vorgenommen wird, die Folge der abgeschnittenen Stücke in Rücksicht auf ihr Gleichbleiben, Grösser oder Kleinerwerden, allemal, unabhängig von der Grösse der Seiten, nothwendig dieselbe sein müsse, eine Annahme, die doch unmöglich als von selbst evident betrachtet werden darf. Da sich nun aber hierauf allein der versuchte Beweis der Unstatthaftigkeit des dritten (wie auch vierten und fünften) Falls stützt, und der ganze Artikel auch keine andere Ressourcen zum Beweise der Unstatthaftigkeit des übergangenen Falls darbietet, so glauben wir hierdurch das oben ausgesprochene Urtheil hinlänglich gerechtfertigt zu haben, wobei wir aber gern der ganzen übrigen sinnreichen Durchführung in den folgenden Artikeln volle Gerechtigkeit widerfahren lassen.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1830 Februar 27.

Opérations géodésiques et astronomiques pour la mesure d'un arc du parallèle moyen, exécutées en Piémont et en Savoie par une commission composée d'officiers de l'état major général et d'astronomes Piémontais et Autrichiens en 1821, 1822, 1823. *Milan, de l'imprimerie impériale et royale: Tome premier* 1825. 238 S. *Tome second* 1827. 412 S. in 4. Nebst einem Heft mit Figuren, Karten und sechs Rundsichten.

Die Idee der grossen Längengradmessung, von welcher die im vorliegenden Werke bekannt gemachten Operationen einen Hauptbestandtheil ausmachen, ist ursprünglich von Laplace ausgegangen. Seit dem Jahre 1802 waren in Oberitalien ausgedehnte Dreiecksmessungen, zunächst für topographisch-militärische

Zwecke, durch französische Ingenieurs ausgeführt. Um das Jahr 1811 war ein Dreiecksnetz von Fiume bis Turin vollendet, welches mithin in der Richtung eines Parallelkreises des 45sten Breitengrades sich über sieben Längengrade erstreckte. Um diese Arbeiten auch in höherer wissenschaftlicher Beziehung für die Kenntniss der Gestalt der Erde nützlich zu machen, beschloss das damalige französische Gouvernement, auf LAPLACE's Antrag, dieses Dreiecksnetz im Westen bis zum atlantischen Meere erweitern und die zu einer Längengradmessung erforderlichen Operationen damit verbinden zu lassen. Die sofort mit Eifer angefangene, nachher durch die Zeitereignisse eine Zeitlang unterbrochene, bald aber wieder mit gleicher Thätigkeit fortgesetzte Arbeit war im J. 1818 so weit gediehen, dass das Dreiecksnetz über das französische Gebiet vom atlantischen Meere bei Bordeaux bis an die Grenze von Savoyen gemessen war. Es fehlte also, zur Vollendung des geodaetischen Theils, nur noch das in den Staaten des Königs von Sardinien liegende Stück. Das dortige und das Oesterreichische Gouvernement, beide die wissenschaftliche Wichtigkeit dieser grossartigen Unternehmung lebhaft anerkennend, beschlossen, durch eine aus Astronomen und Officieren beider Staaten zusammengesetzte Commission sowohl die noch fehlenden geodaetischen, als die in Italien erforderlichen astronomischen Operationen ausführen zu lassen. Diese Arbeiten machen den Inhalt des vorliegenden, wie es scheint von den Astronomen CARLINI und PLANA gemeinschaftlich redigirten Werks aus.

Der erste Theil ist ausschliesslich den geodaetischen Operationen gewidmet. Die beiden östlichen Endpunkte des Dreiecksnetzes in Frankreich, der Mont Colombier und der Mont Granier (unweit Chambery) bilden die Seite, von welcher die neue Messung ausgehen und bis zur westlichsten Seite des Netzes in der Lombardei, Massé — Superga (bei Turin) fortgeführt werden musste. Man hätte erwarten sollen, dass in diesem Terrain, wo sich die höchsten Gebirge von Europa befinden, die Bildung grossartiger Dreiecke leicht, und eine sehr kleine Anzahl von Zwischenpunkten — die Entfernung des Mont Granier von Superga beträgt nur 150000 Meter — zur Verbindung hinreichend gewesen wäre. Allein gerade umgekehrt hatte man auf dieser mässigen Strecke mit den grössten Schwierigkeiten zu kämpfen, insofern die Spitzen der höheren Berge gar nicht oder schwer zugänglich sind, die Baumaterialien für die Signale nur mit grösster Anstrengung hinaufgeschafft werden können, und die heftigen Stürme sowohl diese Sig-

nale bedrohen, als die Beobachtungen selbst in hohem Grade erschweren. Man fand sich durch diese Umstände bewogen, eine verhältnissmässig grosse Anzahl ziemlich kleiner Dreiecke zu bilden: es sind sechszehn, und die kleinste Verbindungsseite ist nur 18671 Meter lang. Wir dürfen jedoch nicht unbemerkt lassen, dass die Heliotrope, welche alle Signale ganz entbehrlich, und die Messung der Winkel in den allergrössten Dreiecken eben so leicht und scharf, wie bei den kleinsten, machen, damals in Italien noch nicht bekannt waren.

Zur Messung der Winkel dienten achtzollige Theodolithen von Reichenbach. Die Piemontesischen und Oesterreichischen Officiere theilten sich nicht in die Arbeit, sondern jene und diese bestimmten sämmtliche Winkel des Systems unabhängig für sich. Man erhielt also von jedem einzelnen Winkel zwei Bestimmungen, aus denen nach Massgabe der Anzahl der Serien, die dazu concurrirt hatten, das Mittel als Definitivwerth angenommen wurde. Meistens beruhen die Resultate der Piemontesischen Officiere auf sechs Serien, jede zu 10 Repetitionen; die der Oesterreichischen grösstentheils auf zwei, einige auf drei oder vier Serien. Alle Messungen sind im grössten Detail abgedruckt, doch ohne Nennung der Beobachter, von denen jede einzeln herrührt.

Bei einer so ausgedehnten Operation hat die Kenntniss der bei den Winkelbestimmungen erreichten Genauigkeit ein grosses Interesse. Die Winkelsummen in den einzelnen Dreiecken bieten ein Mittel dazu dar, welches freilich nach Umständen etwas trüglich sein kann. Darf man die vorliegenden danach beurtheilen, so haben sie allerdings eine bewunderungswürdige Genauigkeit. Der grösste Fehler der Winkelsumme bei den 16 Dreiecken ist nur 1"16; der mittlere Fehler findet sich 0"70, und der mittlere Fehler einzelner Winkel würde folglich nur 0"40 sein. Prüfungsmittel durch Diagonalrichtungen oder Polygonbildungen sind gar nicht vorhanden. Allein die Vergleichung der doppelten Bestimmungen der 48 Winkel unter sich deutet ganz entschieden auf eine bei weitem grössere Ungenauigkeit der Resultate hin; wir finden hier 13 wo der Unterschied über 3", und darunter 5 wo er über 5" steigt, ja bei einer, gleich in dem ersten Dreiecke, weicht die auf 80 Repetitionen gegründete Bestimmung der Piemontesischen Officiere von der auf 48 Repetitionen beruhenden der Oesterreichischen um 9"2 ab.. Bei so grossen Differenzen kann man sich der Vermuthung nicht erwehren, dass die richtige Würdigung der eigentlichen Genauigkeit der Messungen noch von Nebenumständen abhängt, von welchen das Werk uns keine Kenntniss gibt.

Noch ein paar Bemerkungen glauben wir beifügen zu müssen. Wir finden bei sämmtlichen Messungen, dass man beim Anfange jeder Serie immer den Index auf 0 zurückbrachte, ein Verfahren, welches wir nicht billigen können, weil dadurch, wie sehr man auch die Anzahl der Serien vervielfältigt, immer derselbe vom Theilungsfehler abhängige constante Fehler im Resultate zurückbleiben muss. — Bei den Messungen der Piemontesischen Officiere ist jedesmal der Zustand der Luft angezeigt. Unter 414 Messungsreihen zählen wir 320, wo Windstille, und 94, wo Wind angezeigt ist: ein so günstiges Verhältniss hätte man an so hochliegenden Standpunkten (die Höhe des höchsten über der Meeresfläche beträgt 3534 Meter) kaum erwartet.

Der zweite Band enthält in zehn Abschnitten die Arbeiten der Astronomen. In den beiden ersten Abschnitten finden wir die auf die Längengradmessung Beziehung habenden Bestimmungen von Längenunterschieden durch Pulversignale. Die ersten Versuche dieser Art wurden im September 1821 gemacht; die Pulversignale wurden auf der Rocca Melone gegeben, und auf der 170,000 Meter entfernten Sternwarte von Mailand und auf dem nahen Mont Cenis beobachtet. Für die Zeitbestimmung an letzterm Platze war in dem Garten des Hospizes eine kleine Sternwarte errichtet und ein Mittagsfernrohr von Fortin darin aufgestellt, welches jedoch nicht von ausgezeichneter Güte gewesen zu sein scheint, wie in Beziehung auf die Zapfen, einen wesentlichen Theil, ausdrücklich bemerkt wird. Die Rocca Melone war hier nicht sichtbar; man musste sich, um die Signale zu sehen, an eine etwas entfernte Stelle begeben, wohin man die Zeit mit einem Chronometer von Earnshaw übertrug. Auch die Beobachtungen am Mittagsfernrohre wurden meistens an diesem Chronometer notirt, aber nicht vom Beobachter selbst, sondern nach einem von diesem gegebenen Zeichen, durch einen Gehülfen. Alle diese Umstände vereinigen sich freilich, das Zutrauen zu der Genauigkeit des Endresultats zu verringern, wenn gleich die drei partiellen Resultate von den drei Beobachtungstagen sehr gut übereinstimmen. Es kommt dazu, dass man hier die Zeitbestimmung aus Sternen, in Mailand aus Sonnendurchgängen erhielt, und endlich, dass, wie es scheint, die Rechtwinkligkeit der optischen Axe des Fortinschen Mittagsfernrohrs zu dessen Drehungsaxe gar nicht berichtigt wurde, wenigstens wird dieses wichtigen Umstandes bei diesen Beobachtungen gar nicht erwähnt.

Bei den Operationen ähnlicher Art im Jahr 1822 ging man in jeder Bezie-

hung mit mehr Vorsicht zu Werke. Sie dienten, durch Pulversignale auf dem Mont Tabor den Mont Cenis mit dem Mont Colombier, und durch Pulversignale auf dem Berge Pierre sur autre den Mont Colombier mit dem französischen Dreieckspunkte Puy d'Usson zu verbinden; zugleich wurden noch auf dem Mont Colombier selbst Signale gegeben, die zur Verknüpfung dieses Platzes mit der Sternwarte von Genf dienten. Die Zeitbestimmung auf dem Mont Cenis und dem Mont-Colombier war auf Beobachtungen an Mittagsfernröhren von Lenoir*) und Grindel, die für den französischen Standpunkt auf absolute mit einem Repetitionskreise gemessene Sternhöhen gegründet (vgl. *Conn. des tems* 1829 und unsere Anz. 1828 Jan. 10). Auf dem Mont Cenis war man genöthigt, sich drei Stunden Weges von dem Hospiz jedesmal zu entfernen, um die Signale sehen zu können. Endlich finden wir hier noch die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Turin und Mailand durch Pulversignale auf dem S. Bernardo di Fenera zu drei verschiedenen Zeiten 1823...1824, wobei alle Umstände so günstig waren, wie sie nur bei Operationen dieser Art sein können.

Der dritte Abschnitt enthält die Breitenbestimmungen der Sternwarten auf dem Mont Cenis, dem Mont Colombier und in Turin, die beiden ersteren mit Repetitionskreisen von Troughton und Reichenbach, die letzte mit dem Reichenbachschen Meridiankreise. Die letztern Beobachtungen zeigen nicht ganz den Grad von Uebereinstimmung, an welchen man sonst bei diesen Instrumenten gewöhnt ist. Die Verf. haben dies selbst bemerklich gemacht, und lassen es auf sich beruhen, ob solche Anomalien Realität haben, oder von irgend einem Fehler in der Behandlung des Instruments abhangen, der sich in Zukunft aufklären lassen werde. Ref. bescheidet sich, dass bei der Mannigfaltigkeit der Aufmerksamkeiten, welche dieses Instrument erfordert, niemand, ohne an Ort und Stelle zu sein, auch nur eine plausible Vermuthung darüber aufstellen könne, findet aber in der Art, wie die Verf. sich über jene Anomalien geäussert haben, eine Aufforderung, aus seiner eigenen Erfahrung ein Beispiel anzuführen, wie geringfügige Umstände zuweilen den Beobachtungen nachtheilig werden können. Während einer Reihe von Jahren war die schöne Harmonie in den Beobachtungen an einem dem Turiner ganz gleichen Meridiankreise nur ein einzigesmal eine Zeit-

*) Nach einigen Umständen zu schliessen, scheint 1821 und 1822 dasselbe Mittagsfernrohr auf dem Mont Cenis gebraucht zu sein, obgleich hier ein anderer Verfertiger genannt ist.

lang gestört, und eine vorher *nie* vorgekommene bedeutende Wandelbarkeit des Collimationsfehlers bemerklich. Die Quelle davon fand sich, nachdem sie vorher vergeblich in mancherlei andern Umständen gesucht war, in einem Knötchen des Fadens, welcher um die den Verschluss der Libelle sichernde Blasenhaut gebunden war, und, ein klein wenig zu dick, die innere Fläche der Hülse berührte: nachdem dieses Knötchen weggeschnitten war, so dass die Glasröhre bloss die nur wenig vortretenden Schraubenspitzen berührte, war die Beständigkeit des Collimationsfehlers, und die frühere schöne Harmonie aller Beobachtungen sogleich wieder hergestellt. Auch bei den in Frage stehenden Turiner Beobachtungen bemerken wir bedeutende Wandelbarkeit in dem Collimationsfehler, wir meinen nicht die grösseren Veränderungen von mehreren Minuten, die ohne Zweifel ihren guten dem Astronomen bekannten, obwohl bei den Beobachtungen nicht angeführten Grund gehabt haben, sondern die kleinern, welche zufällig scheinen. Gegenwärtig, wo man ein so vortreffliches Mittel hat, den Collimationsfehler jeden Augenblick ohne Umlegen zu bestimmen, wird die Auffindung der Ursache von ähnlichen Anomalien um so mehr erleichtert.

Im vierten Abschnitt wird der Anschluss des Mont Cenis an das Dreieckssystem vermittelst einer besondern Triangulirung und einer kleinen auf dem Plateau des Berges gemessenen Grundlinie, wie auch die astronomische Bestimmung des Azimuths der Verbindungslinie Mont Cenis — Bellecombe mitgetheilt. Letztere ist zweimal gemacht; die Resultate der Jahre 1821, 1822, mit Repetitionskreisen von Throughton und Reichenbach, weichen 8″6 von einander ab, und man nahm, obgleich die spätere Bestimmung bei weitem zuverlässiger scheint, aus beiden das Mittel.

Eben so enthalten die beiden folgenden Abschnitte die astronomischen Bestimmungen der Azimuthe der Richtungslinien Mont Colombier — Mont Granier und Turin neue Sternwarte — Superga. In allen drei Fällen dienten die Meridianzeichen der resp. Mittagsfernröhre zur Grundlage dieser Bestimmungen. Endlich finden sich noch im sechsten Abschnitt die Operationen, durch welche eine früher von Oriani auf der Mailänder Sternwarte gemachte astronomische Azimuthalbestimmung auf die Orientirung der Seite in dem französischen Dreieckssystem Mailand Domthurm — Busto übertragen wurde.

Im siebenten Abschnitte werden nun aus diesen ausgedehnten Operationen die Resultate für die Längengradmessung abgeleitet. Man bezog die Messungen

auf den Parallelkreis, in welchem der Krümmungshalbmesser des Meridians dem Halbmesser eines Kreises gleich ist, dessen Umfang dem ganzen elliptischen Meridian gleich wird: die Breite dieses Parallelkreises findet sich, für die zum Grunde gelegte Abplattung 0,00324. 45°3′29″2. Die geodaetischen Messungen ergeben den ganzen Bogen dieses Parallelkreises zwischen den Meridianen von Mailand (Sternwarte) und von Usson zu 475121,06 Meter, während die Beobachtungen der Pulversignale für den Längenunterschied 6°1′41″7 gegeben haben. Man kann diese Zahlen als das Hauptresultat der Messungen betrachten. Die Vergleichung eines solchen Längengradbogens mit dem Resultat einer Breitengradmessung kann, theoretisch genommen, die Bestimmung der Erdabplattung geben: die Verf. finden aus einer solchen Vergleichung ihres Resultats mit dem Bogen von Greenwich bis Formentera die Abplattung $\frac{1}{211}$. Wie wenig Zuverlässigkeit aber auf diese Weise erreicht werden kann, zeigt sich am auffallendsten, wenn man anstatt des ganzen Bogens die einzelnen Stücke auf ähnliche Art behandelt. Ref. findet so aus der Vergleichung desselben Meridianbogens mit dem Stück d'Usson — Colombier die Abplattung $\frac{1}{168}$, mit dem zweiten Stück Colombier — Mont Cenis $\frac{1}{218}$, mit dem vierten Turin — Mailand $\frac{1}{150}$, mit dem dritten Stück Mont Cenis — Turin hingegen eine Allongation $\frac{1}{32}$. In dieser Beziehung ist also hiervon für die schärfere Bestimmung der Erddimensionen wenig zu erwarten: allein desto wichtiger sind die Resultate, indem sie eine neue Bestätigung der Unregelmässigkeit der Erdfigur liefern, die sich gerade in Oberitalien im grössten Massstabe zeigt. Am deutlichsten treten diese Unregelmässigkeiten hervor, wenn man die astronomisch bestimmten Längenunterschiede mit den aus den geodaetischen Messungen, nach einer plausibeln Hypothese über die Erdfigur im Grossen, berechneten vergleicht. Die Verf. haben diese Rechnung mit der Abplattung 0,00324 und dem Aequatorshalbmesser 6376986 Meter geführt: auf diese Weise ergeben sich die westlichen Längenunterschiede mit Mailand in Zeit

	astronomisch	geodaetisch	Unterschied
Turin	5′ 58″ 85	6′ 0″ 93	— 2″ 08
Mont Cenis	9 0, 20	8 59, 49	+ 0, 71
Colombier	13 44, 23	13 43, 84	+ 0, 39
D'Usson	24 6, 78	24 8, 02	— 1, 24

Je weniger sich hier der anomalische Gang verkennen lässt, desto interessanter wird die Frage, ob die astronomisch bestimmten Azimuthe der Dreiecksseiten ähnliche Anomalien zeigen. In der That steht, nach einem von LAPLACE zwar unter speciellen Beschränkungen aufgestellten, aber einer grossen Generalisirung fähigen Theorem, die Convergenz der Meridiane in einem nothwendigen und von der Gestalt der Erde unabhängigen Zusammenhange mit dem Längenunterschiede, so dass die Ungleichförmigkeiten der einen sich aus denen der andern, beim Fortschreiten in einer Kette von geodaetischen Linien, *a priori* berechnen lassen. Da, wie wir berichtet haben, die astronomischen Azimuthalbestimmungen an den vier Hauptplätzen, Mailand, Turin, Mont Cenis und Colombier mit vieler Sorgfalt gemacht waren, so haben die Verf. mit diesen Orientirungen an den drei letzten Plätzen diejenigen verglichen, welche die Übertragung der Orientirung in Mailand vermittelst der geodaetischen Messungen ergibt, und dabei dieselben vorhin angezeigten Dimensionen des Erdsphäroids zum Grunde gelegt. Die Differenzen sind

für Turin	— 5″ 5
Mont Cenis	— 51, 2
Colombier	— 25, 2

Auch hier erkennt man also ungemein grosse Anomalien. Allein wenn man nach dem erwähnten Theorem daraus die Anomalien der Längenunterschiede berechnet (was durch Division mit dem funfzehnfachen Sinus der Breite von Mailand und Veränderung des Zeichens geschieht), so ergeben sich Werthe, die von den unmittelbar gefundenen ganz verschieden sind, nemlich

	berechnete Anomalie	Unterschied von der beobacht. Anomalie
Turin	+ 0″ 52	+ 2″ 60
Mont Cenis	+ 4, 81	+ 4, 11
Colombier	+ 2, 34	+ 1, 95

Die Verf. bemerken über *diese* Unterschiede bloss, dass sie zu gross seien, um der Anhäufung der Fehler bei den Winkelmessungen zur Last gelegt werden zu können, und lassen uns also im Dunkeln darüber, was wir von ihnen denken sollen. Nach unserer Ansicht sind diese drei Zahlen insofern von grösster Wich-

tigkeit, als sie uns einen nicht zurückweisbaren Maassstab für die Genauigkeit der Operationen selbst geben, da sie (Rechnungsfehler bei Seite gesetzt) bis auf unmerkliche Kleinigkeiten nichts anderes sein können, als die Aggregate der Fehler, die bei den astronomischen Längenbestimmungen, den Azimuthalbestimmungen, und den Messungen der Winkel im Dreiecksnetze begangen sind. Man kann freilich diese Einflüsse nicht trennen, allein das Dasein des Gesammtfehlers, unabhängig von den Irregularitäten der Erdfigur, ist eine unleugbare Thatsache, wenn auch die Meinung, die man sonst wohl von der *absoluten*, bei allen drei Geschäften erreichten Genauigkeit gehabt hat, merklich herabgestimmt werden muss. Vermuthlich hat jedes seinen Antheil beigetragen, obwohl wir geneigt sind, die grössere Hälfte den gemessenen Dreieckswinkeln zuzuschreiben. Die meisten Operationen, welche Bestandtheile dieser Vergleichungen sind, finden wir zwar in diesem Werke, aber die Winkelmessungen zwischen Mailand und Superga, die in frühern Jahren von französischen Ingenieurs ausgeführt waren, nur in abgekürzter Form, und schon ausgeglichen, so dass man über den Grad ihrer Genauigkeit gar nicht urtheilen kann; inzwischen finden wir in der *Connaissance des tems* 1829 S. 288, dass Fehler in den Winkelsummen bis zu 6"8 dabei vorkommen. Auch das bei Verbindung der Sternwarten von Mailand nach Turin, in Beziehung auf die Übertragung der Orientirung sehr wesentliche Dreieck, Superga, alte und neue Sternwarte von Turin (S. 254) scheint nicht ganz mit der erforderlichen Genauigkeit gemessen zu sein. Es wäre sehr zu wünschen, dass zur Aufklärung dieses so wichtigen Gegenstandes, wenigstens so weit von den beiden Sternwarten die Rede ist, eine neue geodaetische Verbindung derselben von den dortigen Astronomen ausgeführt werden möchte, was unter Anwendung von zwei Heliotropen und Benutzung des von beiden Sternwarten sichtbaren Platzes S. Bernardo di Fenera äusserst leicht sein würde; insofern dort, wie wohl nicht zu zweifeln ist, auch nur einer der übrigen frühern Zwischenpunkte sichtbar ist, würde die ganze Arbeit bloss die Messung von vier Winkeln nöthig machen.

Eine sehr interessante und verdienstliche Arbeit erhalten wir im achten Abschnitt, eine vollständige Wiederholung der von Beccaria 1762...1764 ausgeführten Breitengradmessung. Bekanntlich liess sich das Resultat dieser Messung mit den in andern Ländern gemessenen Graden gar nicht in Übereinstimmung bringen; die Krümmung des Bogens zwischen den Endpunkten Mondovi und An-

drate war viel geringer, als sie bei regelmässig vorausgesetzter Erdfigur sein sollte. Die neue Messung hat gezeigt, dass Beccaria bei der astronomischen Bestimmung dieser Krümmung allerdings einen Fehler von 13″41 begangen hat (der bei der Unvollkommenheit seiner Instrumente sehr verzeihlich ist); allein das Zeichen dieses Fehlers ist das entgegengesetzte von dem vermutheten, und die Anomalie wird also noch um so viel vergrössert. Die nach obigen Elementen aus den geodaetischen Messungen berechnete Amplitudo ist nemlich (auf Beccarias Endpunkte reducirt) 1° 8′ 18″91; die aus Beccarias astronomischen Beobachtungen sich ergebende 1°7′44″30, und die neue Bestimmung 1°7′31″07. Die neue Messung ist mit so guten Hülfsmitteln und mit so ausgezeichneter Sorgfalt ausgeführt, dass man gezwungen ist, diesen grossen Unterschied von 47″84 fast ganz als eine Unregelmässigkeit der Erdfigur zu betrachten, die merkwürdigste Thatsache dieser Art, die bisher in den Annalen der höhern Geodaesie vorgekommen ist. Höchst wahrscheinlich ist die Attraction der diese Messung in Norden und Süden begrenzenden Alpenketten eine Hauptursache dieses Phänomens, allein eben so wahrscheinlich hat die ungleiche Dichtigkeit der untern Erdschichten, vielleicht bis zu grosser Tiefe hinab, nicht minder Antheil daran. Wenigstens lassen sich ähnliche bei ganz in der Ebene liegenden Punkten vorgekommene Unterschiede von sehr bedeutender Grösse (z. B. eine Anomalie von 21″9 zwischen Mailand und Parma) nicht wohl anders erklären. Wir setzen hinzu, dass je mehr die sorgfältig ausgeführten Gradmessungen vervielfältigt werden, desto mehr die Ueberzeugung Platz gewinnt, dass solche Abweichungen nur in Rücksicht auf ihre Grösse, aber nicht an sich als Ausnahmen betrachtet werden dürfen, und dass sich solche nach grösserm oder kleinerm Massstabe überall zeigen. Die Verf. haben eine interessante vergleichende Übersicht der durch astronomische Beobachtungen bestimmten und der durch geodaetische Messungen berechneten Polhöhen von 34 über halb Europa zerstreueten und durch Dreiecke unter sich verbundenen Punkten gegeben. Freilich hat man dieselbe nur wie einen unvollkommenen Versuch zu betrachten, da sie grossentheils nur auf unbeglaubigten fragmentarischen Notizen von den Resultaten der geodaetische Messungen beruht: denn leider sind die meisten dieser Messungen in Frankreich, Italien, Oesterreich und Baiern noch immer nicht bekannt gemacht.

Derselbe Abschnitt enthält ausserdem noch die neue Messung einer kleinen Grundlinie bei Turin, wodurch einige Umstände, welche die von Hrn. von

Zach im Jahre 1809 dort ausgeführte Triangulirung betreffen, noch mehr ins Licht gesetzt werden.

Im folgenden Abschnitt findet man verschiedene mit dem Zustande der Atmosphäre im Zusammenhange stehende interessante Beobachtungen und Untersuchungen, nemlich gleichzeitige meteorologische Beobachtungen im Hospiz des Mont Cenis und in Mailand; barometrische Höhenbestimmung des ersteren Punktes und des Mont Colombier; trigonometrische Höhenbestimmung des Montblanc (4802,7 Meter) und des Monte Rosa (4619,6 Meter); endlich Untersuchungen über die terrestrische Refraction. Letztere wird aus den an drei Punkten (Mailand, Turin, Mondovi) beobachteten Elevationen dreier Berge Rocca Melone, Monte Viso und Monte Rosa bestimmt, wobei die absoluten Höhen der drei Standpunkte vorausgesetzt, und die Höhen der beobachteten Punkte eliminirt werden, ein Verfahren, welches wenig Sicherheit geben kann, und wie eine genauere Prüfung zeigt, auch wenig Übereinstimmung gegeben hat. Wir möchten also auf das Endresultat für das Verhältniss der Erdkrümmung zur *ganzen* Refraction (5,28 zu 1) wenig Gewicht legen: die Berechnung von sechs Paaren reciproker Zenithdistanzen zwischen Hauptdreieckspunkten gibt uns dieses Verhältniss im Mittel weit kleiner, nemlich 1 zu 0,1235, sehr nahe übereinstimmend mit den bei der Hannoverschen und Liefländischen Gradmessung gefundenen Resultaten.

Der zehnte Abschnitt beschäftigt sich mit der vielbehandelten Aufgabe, aus der Breite eines Endpunktes einer gegebenen Dreiecksseite und deren Azimuth in jenem Endpunkte, dieselben Dinge für den andern Endpunkt, und den Längenunterschied auf dem elliptischen Sphäroid zu finden. Die Entwickelung enthält nur eine Umformung der Legendreschen Formeln, um anstatt der sogenannten reducirten Breite die wahre einzuführen. Die Formeln sind bis zu den Grössen der dritten Ordnung genau, insofern man die Abplattung und die Dreiecksseite (den Erdradius als Einheit angenommen) wie Grössen der ersten Ordnung betrachtet. Bei der Anwendung auf die gegenwärtigen Messungen hat man die Grössen der dritten Ordnung weggelassen, weil diess für die Ausübung genau genug sei. Diess ist jedoch nur insofern zuzugeben, als man die Resultate bloss zur Vergleichung mit den astonomischen Bestimmungen gebrauchen will, wo es allerdings unnöthig ist, in die Berechnung von jenen eine viel grössere Schärfe zu legen, als diese zulassen. Geht man aber von einem andern Gesichtspunkte aus, nemlich die geodaetischen Resultate so genau zu berechnen, wie es die Mes-

sungen selbst verstatten, so dass man rückwärts aus jenen (den geodaetischen Längen und Breiten) die Winkelmessungen wieder wenigstens mit derselben Genauigkeit soll berechnen können, mit der sie angestellt sind, so sind jene abgekürzten Formeln bei weitem nicht zureichend, und bei sehr grossen Dreiecken muss man dann sogar wünschen, auch noch die Glieder der vierten Ordnung berücksichtigen zu können. Bei einer andern Form der Rechnung lässt sich diess durch sehr geschmeidige Methoden erreichen: es kann hier aber nicht der Ort sein, diess weiter zu entwickeln, und wir begnügen uns, diess Bedürfniss der höheren Geodaesie hier angedeutet zu haben. Das Werk selbst bietet verschiedene Fälle dar, wo die grossen Vortheile einer solchen Behandlungsweise fühlbar werden: so sind z. B. die auf der Turiner Sternwarte bei Gelegenheit der Azimuthalbestimmungen gemachten Einschneidungen der Dreieckspunkte Masse, Monte Soglio und Rocca Melone gar nicht benutzt, die unter jener Voraussetzung eine sehr schätzbare Controlle und Vergrösserung der Genauigkeit mit Leichtigkeit gegeben haben würden.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1830 April 29.

Mémorial du dépôt général de la guerre, imprimé par ordre du ministre. T. I, 1829 (für 1802—1803), 696 S. T. III, 1826 (für 1825), 466 S. T. IV, 1828 (für 1826), 494 S. T. V, 1829 (für 1827—1828), 490 S. in 4. Nebst vielen Karten und Planen. Paris bei Picquet.

Die militärische Zeitschrift unter obigem Titel nahm im Jahre 1802, auf Veranlassung des Generals Andreossy, damaligen Directors des Depot, ihren Anfang. Man wollte nach und nach einen Theil der Schätze dieses grossartigen, während der Revolutionskriege ins unermessliche bereicherten Instituts, für die Kriegswissenschaft und die Hülfskenntnisse, Geschichte, Topographie, Geodaesie, Statistik u. s. w. gemeinnützig machen, und dazu die Musse des damals eingetretenen Friedens benutzen. So erschienen rasch nach einander die ersten Nummern dieser Zeitschrift; als jedoch der Krieg bald wieder ausbrach, gerieth der Fortgang derselben allmählich wieder ins Stocken, und mit der siebenten

Nummer (1810) hörte sie ganz auf. Von dem General Guilleminot, welcher im Jahr 1822 die Direction des Depot übernahm, wurde zuerst die Idee einer regelmässigen Fortsetzung der Zeitschrift gefasst, und von dessen interimistischem Stellvertreter, dem General Delachasse de Verigny zur Reife gebracht. Man beschloss zugleich einige Abänderung in der Form eintreten, und in dem für die Fortsetzung gewählten Quartformat auch die sieben ältern Stücke, wovon die Exemplare vergriffen waren, von neuem abdrucken zu lassen. Zu diesem neuen Abdruck der früheren Stücke sind die beiden ersten Bände der neuen Ausgabe bestimmt, wovon der erste nebst drei Bänden der Fortsetzung vor uns liegt; der zweite soll nächstens nachgeliefert werden.

Das *Dépôt de la guerre* wurde zuerst 1688 unter Ludwig XIV. Regierung durch den Minister Louvois gestiftet: es war jedoch Anfangs nur ein Archiv, in welchem die gesammte officielle Armee-Correspondenz hinterlegt wurde. Zu seiner gegenwärtigen Einrichtung ist es erst nach und nach durch Erweiterung seines Umfangs und Consolidirung seiner Organisation gelangt, und seinen eigenthümlich grossartigen Character hat es erst erhalten, seitdem es der Mittelpunkt geworden ist, wo sich alle Früchte der Arbeiten eines selbstständigen Corps, der Ingenieurs-Geographen, vereinigen. Einen Begriff von dem Umfange der Thätigkeit des Instituts gibt der Umstand, dass die jährlichen Kosten im Jahr 1801 auf 110000 Franken angeschlagen wurden, worin die Gehalte des Personals nicht mit begriffen waren; letztere betrugen 1793 die Summe von 231100 Franken.

An eine Zeitschrift, welche aus einer so überschwenglich reichen Quelle schöpfen kann, darf man grosse Ansprüche machen, und diese werden um so vollkommner befriedigt werden, je mehr die Herausgeber ihr Hauptaugenmerk auf die Bekanntmachung wichtiger, dem Publicum bisher verschlossener Materialien richten, und dasjenige, wodurch die Wissenschaft nicht weiter gebracht wird, ausschliessen werden.

Von diesem Ideal finden wir die ältern Artikel viel weiter entfernt, als die neuere Fortsetzung. In der That sind die Artikel des ersten Bandes, wenn wir einen Aufsatz über die Hydrographie eines Theils von Frankreich und eine Notiz über die Geschichte des *Dépôt de la guerre* ausnehmen, von der Art, dass sie eben so gut hätten geschrieben werden können, wenn auch das *Dépôt* gar nicht vorhanden gewesen wäre, und ohne das Interesse zu leugnen, welches mehrere Aufsätze vor dreissig Jahren haben konnten und zum Theil noch jetzt haben, kann

man doch einen grossen Theil des Inhalts nur für Dissertationen erkennen, in denen elementarische Gegenstände mit mehr Breite als Tiefe abgehandelt werden. Es würde jedoch unpassend sein, diese Arbeiten, die einer längst vergangenen Zeit angehören, jetzt noch einer speciellen Kritik zu unterwerfen.

Weit gehaltvoller erscheint dagegen die neue Fortsetzung, worin der Militär, der Geschichtsforscher, der Geograph reichen Stoff zur Belehrung antreffen. Wir nennen hier nur die Darstellung der Schlacht bei Marengo, die Geschichte des Feldzugs in Deutschland im Jahre 1800 (welche beinahe den ganzen fünften Band ausfüllt), die militärische Beschreibung des Flussgebiets der Donau, alles durch eine grosse Menge von Karten und Planen erläutert; die Verhandlungen einer besonders dazu niedergesetzten Commission über die zweckmässigste Art der Terraindarstellung, worin dieser Gegenstand vielseitig erwogen und durch eine beträchtliche Anzahl von Probezeichnungen nach verschiedenen Methoden versinnlicht wird. Nicht ohne Interresse wird man in der Correspondenz des Grafen de Gisors mit seinem Vater dem Herzog de Belle-Isle die Unterredungen lesen, welche ersterer mit Friedrich dem Zweiten ein Jahr vor dem Ausbruche des siebenjährigen Krieges über militärische Gegenstände hatte; imgleichen eine Reihe von bisher ungedruckten zum Theil eigenhändigen, auch mit einem Facsimile begleiteten Briefen Ludwig XIV., wenn gleich nicht alle Leser sie von dem Standpunkt betrachten können, auf welchen die Herausgeber die französischen Leser stellen wollen, indem sie in der Einleitung dazu bemerken: Montesquieu *regarde comme le devoir de tout écrivain homme de bien de contribuer, autant qu'il est en lui, à donner à ses concitoyens des raisons d'aimer ceux à qui ils doivent obéir. Rien n'entre mieux dans cette noble pensée de* Montesquieu, *que la publication de ces lettres et de celles qui pourront les suivre, et tout le monde reconnoîtra dans les successeurs du grand roi tout ce que son coeur avait de paternel et son âme d'héroïque.* Endlich dürfen wir nicht mit Stillschweigen übergehen die Nachrichten, welche im 3. und 4. Bande über die neue grosse Karte von Frankreich gegeben werden, deren Ausführung durch eine königliche Ordonnanz vom 6. August 1817 befohlen wurde. Man wollte Anfangs die Aufnahme in dem Maassstabe von 1 zu 10000 und den Stich in dem Maassstabe von 1 zu 50000 ausführen, wobei die Anzahl aller Blätter auf 611, jedes 800 Millimeter breit und 500 Millimeter hoch, angeschlagen wurde, und glaubte die ganze Arbeit in 20 Jahren vollenden zu können. Man liess jedoch diesen Plan bald fahren, und beschränkte den Maassstab für die Auf-

nahme auf das Verhältniss 1 zu 40000, und für den Stich auf das Verhältniss 1 zu 80000, wonach die Anzahl der Blätter (von derselben Grösse wie oben) auf 208, die erforderliche Zeit auf 15 Jahr, die Kosten für die Arbeit, den Stich und den Abdruck von 3000 Exemplaren auf 4232000 Franken, endlich der Verkaufspreis jedes Blattes auf 7 Franken 50 Centimen, oder der ganzen Karte auf 1560 Franken veranschlagt werden. Die ganze Arbeit gehört zum Ressort des Depot, allein es ist dabei auf die Mitwirkung des Katasters gerechnet, obwohl aus dem Bericht nicht recht klar ist, in welchem Maasse: wie es scheint wird von dieser (von einem andern Ministerium abhängigen) Behörde das ganze Detail erwartet, so dass den Ingenieurs-Geographen bei der Aufnahme nur die trigonometrischen Arbeiten und die Höhenbestimmungen anheim fallen. Diese Abhängigkeit von einer andern Behörde, mit welcher kein recht harmonisches Zusammenwirken Statt zu finden scheint, (der nicht hinlänglichen Unterstützung von Seiten des Katasters wird das Fehlschlagen des ersten Plans beigemessen), könnte vielleicht dem gehofften raschen Fortgange dieser grossartigen Unternehmung sehr nachtheilig werden. Nach Vollendung der Arbeit soll noch ein grosses Repertorium geliefert werden, worin nicht bloss die numerischen Resultate für die Lage und Höhe der trigonometrischen Punkte, sondern auch alle Messungen auf welchen jene beruhen, bekannt gemacht werden sollen. Dadurch werden dann freilich alle Wünsche erfüllt werden. Allein so wie theils zu besorgen ist, dass dieser Zeitpunkt noch sehr weit entfernt sein möchte, theils auch in höhern wissenschaftlichen Beziehungen hauptsächlich nur die Dreiecke und Dreieckspunkte erster Ordnung das grösste Interesse darbieten, so können wir den lebhaften Wunsch nicht unterdrücken, dass man mit der vollständigen Bekanntmachung der Dreiecke erster Ordnung (welche bereits jetzt alle gemessen sind) nicht so lange zögern, sondern diese zum Besten der Wissenschaft sogleich liefern möchte. Die Freunde der höhern Geodaesie würden es um so dankbarer erkennen, wenn die künftigen Bände des Memorial diese Wünsche erfüllten, als sie, bei den bisher erschienenen Bänden, die in anderer Beziehung so gehaltreich sind, am wenigsten berücksichtigt worden sind, und in den wenigen theoretischen Dissertationen und Hülfstabellen keine Entschädigung für den Mangel an *Thatsachen* finden, welche doch das Depot in so reichem Maasse zu geben im Stande wäre.

VERSCHIEDENE AUFSÄTZE.

v. Zach. Monatliche Correspondenz für Erd- und Himmelskunde. 1810 August.

BESTIMMUNG DER GRÖSSTEN ELLIPSE

WELCHE DIE VIER SEITEN EINES GEGEBENEN VIERECKS BERÜHRT.

Die Lage aller Punkte in der Ebne, in welcher das Viereck liegt, bestimme ich durch Abscissen und Ordinaten, indem ich vorerst die Abscissen-Linie und den Anfangspunkt der Abscissen ganz nach Willkür annehme. Das Viereck bestimme ich nicht durch die Winkelpunkte, sondern durch die Punkte, wo jenes Seiten von den aus dem Anfangspunkte der Abscissen auf diese gefällten Perpendikeln geschnitten werden. Diese Perpendikel seien a, a', a'', a''', und ihre Neigungen gegen die Abscissen-Linie A, A', A'', A''', folglich die Coordinaten der erwähnten vier Durchschnittspunkte

$$\begin{array}{ll} a\cos A, & a\sin A \\ a'\cos A', & a'\sin A' \\ a''\cos A'', & a''\sin A'' \\ a'''\cos A''', & a'''\sin A''' \end{array}$$

Es sei ferner r der Abstand des Mittelpunkts der gesuchten Ellipse von dem Anfangspunkte der Abscissen, und φ die Neigung der von letzterm zu erstern gezogenen geraden Linie gegen die Abscissen-Linie, oder $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$ die Coordinaten des Mittelpunkts der Ellipse. Man findet hieraus leicht, dass das Perpendikel von diesem Mittelpunkte auf die erste Seite des Vierecks

$$= a - r\cos(A-\varphi)$$

sein werde; auf ähnliche Art werden die Perpendikel auf die drei andern Seiten ausgedrückt.

Bezeichnet man die halbe grosse Axe der Ellipse mit α, die halbe kleine Axe mit б, die Neigung der letztern gegen die Abscissen-Linie mit ψ, so ist offenbar $A-\psi$ die Neigung des Perpendikels aus dem Mittelpunkte auf die erste Seite des Vierecks gegen die kleine Axe, welches, wenn jene die Ellipse berühren soll, nach bekannten Gründen durch

$$\sqrt{[\alpha\alpha\sin(A-\psi)^2 + \text{бб}\cos(A-\psi)^2]}$$

ausgedrückt wird. Man hat also die Gleichung

$$a - r\cos(A-\varphi) = \sqrt{[\alpha\alpha\sin(A-\psi)^2 + \text{бб}\cos(A-\psi)^2]}$$

und eben so drei andere ganz ähnliche, wenn man statt a und A die sich auf die andern Seiten beziehenden Zeichen substituirt. Schafft man also die Irrationalität weg, und setzt Kürze halber

$$\begin{aligned} rr - \alpha\alpha - \text{бб} &= t \\ \alpha\alpha - \text{бб} &= u \end{aligned}$$

so sind unsere vier Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 2aa + t - 4ar\cos(A-\varphi) + rr\cos 2(A-\varphi) - u\cos 2(A-\psi) = 0 \\ \text{II.} & 2a'a' + t - 4a'r\cos(A'-\varphi) + rr\cos 2(A'-\varphi) - u\cos 2(A'-\psi) = 0 \\ \text{III.} & 2a''a'' + t - 4a''r\cos(A''-\varphi) + rr\cos 2(A''-\varphi) - u\cos 2(A''-\psi) = 0 \\ \text{IV.} & 2a'''a''' + t - 4a'''r\cos(A'''-\varphi) + rr\cos 2(A'''-\varphi) - u\cos 2(A'''-\psi) = 0 \end{array}$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\sin 2(A''-A')$, die zweite mit $\sin 2(A-A'')$, die dritte mit $\sin 2(A'-A)$, und addirt die Producte, so wird (m. s. Art. 78 meiner *Theoria motus corporum coelestium*)

$$\text{V.} \quad \begin{aligned} & 2aa\sin 2(A''-A')+2a'a'\sin 2(A-A'')+2a''a''\sin 2(A'-A) \\ & +t[\sin 2(A''-A')+\sin 2(A-A'')+\sin 2(A'-A)] \\ & -4ar\cos(A-\varphi)\sin 2(A''-A') \\ & -4a'r\cos(A'-\varphi)\sin 2(A-A'') \\ & -4a''r\cos(A''-\varphi)\sin 2(A'-A)=0 \end{aligned}$$

Das Aggregat, worin hier t multiplicirt erscheint, kann auch durch

$$4\sin(A''-A')\sin(A''-A)\sin(A'-A)$$

ausgedrückt werden.

Behandelt man auf eine ähnliche Art die Gleichungen I, II, IV, so bekommt man eine ähnliche Gleichung VI, die sich von V nur durch die Vertauschung der Buchstaben a'', A'' gegen a''', A''' unterscheidet. Eliminirt man aus den beiden Gleichungen V und VI die Grösse t, so sieht man leicht, dass daraus eine Gleichung von der Form

$$\text{VII.} \qquad B+Cr\cos\varphi+Dr\sin\varphi=0$$

hervorgehen wird, wo B, C, D bekannte Grössen bedeuten. Man kann ihre Werthe leicht darstellen, wir werden indess bald zeigen, wie man dieser Entwickelung überhoben sein kann. Aus der Gleichung VII ist klar, dass der Mittelpunkt jeder die vier Seiten unsers Vierecks berührenden Ellipse in einer geraden Linie liegt, welche gegen die Abscissen-Linie unter einem Winkel, dessen Tangente $=-\frac{C}{D}$, geneigt ist, und dass der Durchschnitts-Punkt die Abscisse $-\frac{B}{C}$ hat. Die Lage dieser geraden Linie kann man aber viel leichter durch folgende Betrachtungen bestimmen. Eine Diagonale des Vierecks kann als eine verschwindende, die Seiten des Vierecks berührende Ellipse betrachtet werden, deren Mittelpunkt dann offenbar in der Mitte der Diagonale liegt. Hieraus folgt leicht, dass die obige gerade Linie, welche der geometrische Ort der Mittelpunkte aller die vier Seiten des Vierecks berührenden Ellipsen ist, keine andere sein könne, als die, welche die Halbirungspunkte der beiden Diagonalen verbindet, und welche demnach leicht gefunden werden kann. Hierüber füge ich noch zwei Bemerkungen hinzu:

1) Fielen beide Halbirungs-Punkte in Einen zusammen (in welchem Falle das Viereck ein Parallelogramm sein wird), so fällt freilich diese Bestimmung der

geraden Linie weg; allein in diesem Fall ist leicht zu zeigen, dass nothwendig dieser gemeinschaftliche Halbirungspunkt zugleich der Mittelpunkt der Ellipse selbst sein wird.

2) Verlängert man zwei einander gegenüber liegende Seiten des Vierecks bis zu ihrem Durchschnitt und eben so die beiden andern, so darf man auch die zwischen diesen beiden Durchschnitts-Punkten enthaltene gerade Linie, als eine verschwindende die vier Seiten des Vierecks berührende Ellipse ansehen. Der Halbirungspunkt derselben muss also in eben der geraden Linie liegen, welche die Halbirungspunkte der beiden Diagonalen verbindet. Diese allgemeine Eigenschaft eines jeden Vierecks ist meines Wissens bisher noch nicht bemerkt; ich werde davon unten einen einfachen directen Beweis geben.

Um die Rechnungen noch mehr abzukürzen, will ich jetzt annehmen, dass man diese gerade Linie selbst zur Abscissen-Linie gewählt habe, und folglich $\varphi = 0$ sei. Der Anfangspunkt der Abscissen bleibt wie vorher willkürlich. Eben diese Bestimmung $\varphi = 0$ macht nun eine der vier Fundamental-Gleichungen entbehrlich, und wir haben also zur Bestimmung der vier unbekannten Grössen t, u, r, ψ theils die drei Gleichungen

$$2aa + t - 4ar\cos A + rr\cos 2A - u\cos 2(A-\psi) = 0$$
$$2a'a' + t - 4a'r\cos A' + rr\cos 2A' - u\cos 2(A'-\psi) = 0$$
$$2a''a'' + t - 4a''r\cos A'' + rr\cos 2A'' - u\cos 2(A''-\psi) = 0$$

theils die Bedingung, dass der Inhalt der Ellipse, welchem offenbar das Product $\alpha\beta$ proportional ist, und folglich auch $4\alpha\alpha\beta\beta$ oder $(rr-t)^2 - uu$ ein Maximum sein soll.

Setzt man Kürze halber $rr - t = \theta$ und

$$b = 2(a - r\cos A)^2$$
$$b' = 2(a' - r\cos A')^2$$
$$b'' = 2(a'' - r\cos A'')^2$$

so werden obige Gleichungen

$$\theta + u\cos 2(A-\psi) = b$$
$$\theta + u\cos 2(A'-\psi) = b'$$
$$\theta + u\cos 2(A''-\psi) = b''$$

woraus nach den gehörigen Entwickelungen leicht folgt

$$4\theta \sin(A''-A')\sin(A-A'')\sin(A'-A)$$
$$= b\sin 2(A''-A') + b'\sin 2(A-A'') + b''\sin 2(A'-A)$$

$$4uu\sin(A''-A')^2\sin(A-A'')^2\sin(A'-A)^2$$
$$= bb\sin(A''-A')^2$$
$$+ b'b'\sin(A-A'')^2$$
$$+ b''b''\sin(A'-A)^2$$
$$+ 2b'b''\cos(A''-A')\sin(A-A'')\sin(A'-A)$$
$$+ 2bb''\sin(A''-A')\cos(A-A'')\sin(A'-A)$$
$$+ 2bb'\sin(A''-A')\sin(A-A'')\cos(A'-A)$$

und hieraus

$$4(\theta\theta-uu)\sin(A''-A')^2\sin(A-A'')^2\sin(A'-A)^2$$
$$= -bb\sin(A''-A')^4$$
$$- b'b'\sin(A-A'')^4$$
$$- b''b''\sin(A'-A)^4$$
$$+ 2b'b''\sin(A-A'')^2\sin(A'-A)^2$$
$$+ 2bb''\sin(A''-A')^2\sin(A'-A)^2$$
$$+ 2bb'\sin(A''-A')^2\sin(A''-A)^2$$

Ich habe diese Formeln hierher gesetzt, weil sie auch in andern Fällen zuweilen mit Nutzen zu gebrauchen sind. Man sieht leicht, dass das, was auf der rechten Seite steht, das Product aus den vier Factoren sei.

$$+\sqrt{b}.\sin(A''-A') + \sqrt{b'}.\sin(A-A'') + \sqrt{b''}.\sin(A'-A)$$
$$-\sqrt{b}.\sin(A''-A') + \sqrt{b'}.\sin(A-A'') + \sqrt{b''}.\sin(A'-A)$$
$$+\sqrt{b}.\sin(A''-A') - \sqrt{b'}.\sin(A-A'') + \sqrt{b''}.\sin(A'-A)$$
$$+\sqrt{b}.\sin(A''-A') + \sqrt{b'}.\sin(A-A'') - \sqrt{b''}.\sin(A'-A)$$

Substituirt man hier für b, b', b'' ihre Werthe und setzt Kürze halber

$$a\sin(A''-A') + a'\sin(A-A'') + a''\sin(A'-A) = M$$

so wird

$$(\theta\theta-uu)\sin(A''-A')^2\sin(A-A'')^2\sin(A'-A)^2$$

gleich dem Producte aus den vier Factoren

$$M$$
$$M - 2(a - r\cos A)\sin(A'' - A')$$
$$M - 2(a' - r\cos A')\sin(A - A'')$$
$$M - 2(a'' - r\cos A'')\sin(A' - A)$$

Man hat also offenbar eine Gleichung von der Form

$$\gamma + \delta r + \varepsilon rr + \zeta r^3 = \theta\theta - uu = 4\alpha\alpha\mathfrak{b}\mathfrak{b}$$

wo $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ gegebene Grössen sind, und dann wird r durch die Bedingung des Maximums offenbar aus folgender quadratischen Gleichung zu bestimmen sein

$$\delta + 2\varepsilon r + 3\zeta rr = 0$$

Noch leichter findet man die Coëfficienten dieser Gleichung durch folgende Betrachtung. Da das vierfache Product aus den Quadraten der halben grossen und der halben kleinen Axe einer jeden Ellipse, welche die vier Seiten des Vierecks berührt und deren Mittelpunkt zur Abscisse r hat, allgemein

$$= \gamma + \delta r + \varepsilon rr + \zeta r^3$$

wird. so muss dieser Ausdruck nothwendig $= 0$ werden, wenn man für r einen Werth substituirt, welcher einer der drei oben betrachteten verschwindenden Ellipsen entspricht. Diese drei Werthe sind die Abstände der beiden Halbirungspunkte der Diagonalen des Vierecks und des Halbirungspunktes der geraden Linie, welche die Durchschnitte der beiden Seiten-Paare des Vierecks verbinden, von dem Anfangspunkte der Abscissen. Ich bezeichne diese drei Punkte durch C, D, E, und ihre Abscissen durch c, d, e, so muss offenbar

$$r^3 + \frac{\varepsilon}{\zeta} rr + \frac{\delta}{\zeta} r + \frac{\gamma}{\zeta}$$

mit dem Producte $(r-c)(r-d)(r-e)$ identisch sein; folglich ist die obige quadratische Gleichung

$$3rr - 2r(c+d+e) + cd + ce + de = 0$$

deren Wurzeln

$$\frac{c+d+e}{3} \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{(cc+dd+ee-cd-ce-de)}$$

und

$$\frac{c+d+e}{3} - \tfrac{1}{3}\sqrt{(cc+dd+ee+cd+ce+de)}$$

sind.

Die Wurzelgrösse $\sqrt{(cc+dd+ee+cd+ce+de)}$ lässt sich auch in die Form setzen

$$\sqrt{[(d-c)^2+(d-c)(e-d)+(e-d)^2]}$$

sie ist folglich die dritte Seite eines Dreiecks, in welchem zwei Seiten $d-c$ und $e-d$ sind, und der eingeschlossene Winkel $= 120^0$. Beschreibt man also über CD ein gleichseitiges Dreieck, dessen Spitze F, so ist EF jener Wurzelgrösse gleich, wonach sich also die beiden Werthe von r leicht construiren lassen. Man kann leicht zeigen, dass der eine dieser Werthe zwischen c und d, der andere zwischen d und e fallen muss, und dass nur dem erstern der Mittelpunkt der grössten Ellipse wirklich entspricht; für den andern wird nemlich

$$\gamma+\delta r+\varepsilon rr+\zeta r^3$$

nicht ein grösstes, sondern ein kleinstes werden, oder vielmehr den grössten *negativen* Werth erhalten, dem also nur ein imaginärer Werth von $\alpha\,6$ entsprechen kann. Man sieht leicht, dass dieser sich auf eine Hyperbel beziehen muss.

Sobald übrigens der Mittelpunkt der verlangten Ellipse gefunden ist, hat die Bestimmung der übrigen unbekannten Grössen keine Schwierigkeit. Aus θ und r findet man t; aus t und u dann ferner α und 6, und dann aus einer oder einigen der obigen Gleichungen ψ. Dadurch sind also sowohl die Dimensionen der Ellipse, als ihre Lage vollkommen bestimmt.

Ich muss übrigens noch bemerken, dass das hier aufgelöste Problem mit dem neulich in der *Monatl. Corresp.* aufgegebenen nicht ganz einerlei ist. Es gibt nemlich Fälle, wo die grösste *innerhalb* eines Vierecks zu beschreibende Ellipse eine der vier Seiten des Vierecks nicht berührt. Die nähere Betrachtung dieser Fälle gehört aber hier nicht zu meiner Absicht.

Directer Beweis des obigen Theorems die Vierecke betreffend.

Es seien A, B, C, D die vier Winkelpunkte des Vierecks; E der Durchschnitt von AB und DC; F der Durchschnitt von BC und AD; G, H und I

in der Mitte von AC, BD und EF. Die Coordinaten dieser neun Punkte, Abscissen-Linie und Anfangspunkt ganz willkürlich gewählt, bezeichne ich mit a, a' b, b' c, c' d, d' u. s. w. Da nun die drei Punkte A, B, E in einer geraden Linie liegen, so findet zwischen ihren Coordinaten folgende Bedingungsgleichung statt:

$$a(e'-b')+b(a'-e')+e(b'-a')=0$$

und eben so hat man, da ADF, BCF, DCE gerade Linien sind

$$a(f'-d')+d(a'-f')+f(d'-a')=0$$
$$b(c'-f')+c(f'-b')+f(b'-c')=0$$
$$c(e'-d')+d(c'-e')+e(d'-e')=0$$

Addirt man diese vier Gleichungen zusammen, so erhält man

$$(a+c)(e'+f'-b'-d')+(b+d)(a'+c'-e'-f')+(e+f)(b'+d'-a'-c')=0$$

oder da offenbar

$$\tfrac{1}{2}(a+c)=g,\quad \tfrac{1}{2}(b+d)=h,\quad \tfrac{1}{2}(e+f)=i$$
$$\tfrac{1}{2}(a'+c')=g',\quad \tfrac{1}{2}(b'+d')=h',\quad \tfrac{1}{2}(e'+f')=i'$$

ist,

$$g(i'-h')+h(g'-i')+i(h'-g')=0$$

welches die Bedingungs-Gleichung ist, dass G, H, I in Einer geraden Linie liegen.

ZUSÄTZE.

ZUR GEOMETRIE DER STELLUNG VON CARNOT

ÜBERSETZT VON SCHUMACHER. 1810.

I.

{Folgende analytische Behandlung der merkwürdigen Punkte eines Dreiecks verdanke ich der Güte des Herrn Professor GAUSS. SCHUMACHER.}

Es seien A, A', A'' die drei Winkelpunkte eines Dreiecks und deren Coordinaten respective

$$\begin{array}{ll} x, & y \\ x', & y' \\ x'', & y'' \end{array}$$

Die Coordinaten der Punkte B, B', B'', welche die Seiten $A'A''$, $A''A$, AA' halbiren, werden offenbar sein

$$\begin{array}{ll} \tfrac{1}{2}(x'+x''), & \tfrac{1}{2}(y'+y'') \\ \tfrac{1}{2}(x''+x), & \tfrac{1}{2}(y''+y) \\ \tfrac{1}{2}(x+x'), & \tfrac{1}{2}(y+y'). \end{array}$$

Man nehme auf den Linien AB, $A'B'$, $A''B''$ (vorwärts oder rückwärts verlängert, wenn es nöthig ist), von A, A', A'' ab gezählt, Stücke, welche jenen respective proportional sind, und sich dazu wie $n:1$ verhalten. Falls man die Stücke rückwärts nimmt, hat man n als negativ anzusehen. Dieser Stücke Endpunkte heissen C, C', C'', so sind ihre Coordinaten

$$x + n\tfrac{1}{2}(x' + x'' - 2x), \quad y + n\tfrac{1}{2}(y' + y'' - 2y)$$
$$x' + n\tfrac{1}{2}(x'' + x - 2x'), \quad y' + n\tfrac{1}{2}(y'' + y - 2y')$$
$$x'' + n\tfrac{1}{2}(x + x' - 2x''), \quad y'' + n\tfrac{1}{2}(y + y' - 2y'')$$

oder wenn man

$$1 - n = \alpha$$
$$\tfrac{1}{2}n = \delta$$

setzt

$$\alpha x + \delta(x' + x''), \quad \alpha y + \delta(y' + y'')$$
$$\alpha x' + \delta(x'' + x), \quad \alpha y' + \delta(y'' + y)$$
$$\alpha x'' + \delta(x + x'), \quad \alpha y'' + \delta(y + y')$$

Von den Punkten C, C', C'' werden Perpendikel auf $A'A''$, $A''A$, AA', gefällt, man sucht die Lage der drei Durchschnittspunkte dieser Perpendikel. Es seien die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden letzten Perpendikel

$$\xi, \quad \eta$$

welche man mit Hülfe des folgenden Lehrsatzes bestimmen wird.

Wenn

$$a, \quad b$$
$$a', \quad b'$$
$$a'', \quad b''$$
$$a''', \quad b'''$$

die Coordinaten von vier Punkten sind, und die graden Linien durch den ersten und zweiten Punkt auf der Linie durch den dritten und vierten senkrecht sind, so hat man

$\dfrac{b'-b}{a'-a}$ = tang. der Neigung der ersten Linie gegen die Abscissenlinie

$\dfrac{b'''-b''}{a'''-a''}$ = tang. der Neigung der zweiten Linie gegen die Abscissenlinie

und folglich, da die eine Neigung um 90^0 grösser ist als die andere, das Product der beiden Tangenten $= -1$, also

$$\frac{b'-b}{a'-a} \cdot \frac{b'''-b''}{a'''-a''} = -1$$

In unserm Falle hat man also

$$\frac{\alpha y'+\beta(y''+y)-\eta}{\alpha x'+\beta(x''+x)-\xi}\cdot\frac{y''-y}{x''-x}=-1$$
$$\frac{\alpha y''+\beta(y+y')-\eta}{\alpha x''+\beta(x+x')-\xi}\cdot\frac{y-y'}{x-x'}=-1$$

Hieraus folgt leicht durch Elimination

$$\xi=\frac{(y-y')(y'-y'')(y''-y)(\alpha-\beta)}{y(x''-x')+y'(x-x'')+y''(x'-x)}$$
$$+\alpha\cdot\frac{xy(x''-x')+x'y'(x-x'')+x'y''(x'-x)}{y(x''-x')+y'(x-x'')+y''(x'-x)}$$
$$+\beta\cdot\frac{y(x''x''-x'x')+y'(xx-x''x'')+y''(x'x'-xx)}{y(x''-x')+y'(x-x'')+y''(x'-x)}$$

Der Werth von η folgt aus dem Werthe von ξ, wenn man in diesem alle x, x', x'' mit den entsprechenden y, y', y'' vertauscht, wie man auch a priori leicht voraus sehen kann.

Die Coordinaten des Durchschnitts des ersten und letzten Perpendikels folgen, wie man leicht sieht, aus ξ und η, wenn man x mit x', und y mit y' vertauscht, da aber dadurch ξ und η ihre Werthe nicht ändern, indem in beiden offenbar die Coordinaten der Punkte A, A', A'' auf gleiche Art entriren, so ist klar, dass dieser zweite Durchschnittspunkt mit dem ersten zusammenfällt, und eben deshalb fällt der dritte Durchschnittspunkt mit den beiden ersten von selbst gleichfalls zusammen.

Für den Schwerpunkt ist übrigens offenbar

$$n=\tfrac{1}{2}$$

also

$$\alpha=\beta=\tfrac{1}{3}$$

und daher

$$\xi=\tfrac{1}{3}(x+x'+x'')$$
$$\eta=\tfrac{1}{3}(y+y'+y'')$$

Für den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ist

$$n=1$$

also

$$\alpha=0,\quad \beta=\tfrac{1}{2}$$

Für den Durchschnittspunkt des Perpendikels aus A u. s. w. selbst ist

$$n=0$$

oder

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0$$

Der Nenner in dem Werthe von ξ, η ist der doppelte Inhalt des Dreiecks.

II.

Dass die Perpendikel in einem Dreiecke, aus den Spitzen auf die gegenüberstehenden Seiten sich in einem Punkte schneiden, kann man sehr einfach so zeigen.

Das gegebene Dreieck sei BDF, und die erwähnten Perpendikel $\overline{BI}, \overline{DG}, \overline{FH}$.

Man ziehe durch jeden Scheitelpunkt des Dreiecks Parallelen mit der gegenüberstehenden Seite, die sich in den Punkten A, C, E, schneiden, es steht folglich $\overline{FH}$ auch auf $\overline{AE}$, $\overline{GD}$ auf $\overline{CE}$, $\overline{BI}$ auf $\overline{AC}$ senkrecht, und zwar ist

$$\overline{AB} = \overline{BC}$$
$$\overline{ED} = \overline{DC}$$
$$\overline{AF} = \overline{FE}$$

Beschreibt man nun um das Dreieck ACE einen Kreis, so liegt sein Mittelpunkt sowohl in $\overline{BI}$, als in $\overline{DG}$, als in $\overline{FH}$, diese drei Linien müssen sich also in einem Punkte schneiden.

Puissant gibt in seinem Recueil des propositions de Géométrie einen zierlichen analytischen Beweis, und fügt einen geometrischen bei, der nicht dasselbe Verdienst hat.

[*Erste handschriftliche Bemerkung.*]

Sind α, β, γ die complexen Zahlen, die sich in natürlicher Ordnung auf die drei Winkelpunkte eines Dreiecks beziehen; A, B, C die drei Winkel, u die complexe Zahl für den Mittelpunkt des [umschriebenen] Kreises, so hat man

$$\begin{aligned} 2u = \alpha + \beta + (\beta - \alpha)\operatorname{cotg} C . i &= \alpha(1 - i\operatorname{cotg} C) + \beta(1 + i\operatorname{cotg} C) \\ &= \beta(1 - i\operatorname{cotg} A) + \gamma(1 + i\operatorname{cotg} A) \\ &= \gamma(1 - i\operatorname{cotg} B) + \alpha(1 + i\operatorname{cotg} B) \end{aligned}$$

Ist t die complexe Zahl für den Schwerpunkt, so ist $3t = \alpha + \beta + \gamma$, also

$$\begin{aligned} 3t - 2u &= \alpha + (\beta - \gamma)\operatorname{cotg} A \,.\, i \\ &= \beta + (\gamma - \alpha)\operatorname{cotg} B \,.\, i \\ &= \gamma + (\alpha - \beta)\operatorname{cotg} C \,.\, i \end{aligned}$$

Dies $3t - 2u$ ist die complexe Zahl für den Punkt, wo die drei Perpendikel aus den Winkelpunkten auf die gegenüber liegenden Seiten einander schneiden.

Daraus also durch Subtraction

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha - \beta + \{\alpha \operatorname{cotg} B + \beta \operatorname{cotg} A - \gamma(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B)\} \,.\, i \\ 0 &= \beta - \gamma + \{\beta \operatorname{cotg} C + \gamma \operatorname{cotg} B - \alpha(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)\} \,.\, i \\ 0 &= \gamma - \alpha + \{\gamma \operatorname{cotg} A + \alpha \operatorname{cotg} C - \beta(\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A)\} \,.\, i \end{aligned}$$

[*Zweite handschriftliche Bemerkung.*]

Sind a, b, c, d vier Punkte im Umfange eines Kreises vom Halbmesser 1, und zugleich die complexen Zahlen, die diesen Punkten entsprechen [wobei die dem Mittelpunkte entsprechende complexe Zahl gleich 0 angenommen wird], p, q, r die Durchschnittspunkte der Geraden $\frac{ab}{cd}, \frac{ac}{bd}, \frac{ad}{bc}$, endlich p^* die Mitte der Kreissehne, an deren Endpunkten Tangenten sich in p schneiden, und ebenso q^*, r^*, so hat man, indem accentuirte Buchstaben sich immer auf die resp. Adjuncten beziehen,

$$\begin{aligned} p &= \frac{abc + abd - acd - bcd}{ab - cd} = a - \frac{b(a-c)(a-d)}{ab - cd} \\ q &= \frac{abc + acd - abd - bcd}{ac - bd} = a - \frac{c(a-b)(a-d)}{ac - bd} \\ r &= \frac{acd + abd - abc - bcd}{ad - bc} = a - \frac{d(a-b)(a-c)}{ad - bc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p - q &= (a-d)(b-c)\frac{abd + acd - abc - bcd}{(ab-cd)(ac-bd)} = \frac{(a-d)(b-c)(ad-bc)r}{(ab-cd)(ac-bd} \\ p^* &= \frac{1}{p'} = \frac{ab - cd}{a + b - c - d} = a - \frac{(a-c)(a-d)}{a+b-c-d} \\ p^* - q &= \frac{(a-d)(b-c)(ad-bc)}{(ac-bd)(a+b-c-d)} = p^* . \frac{(a-d)(b-c)(ad-bc)}{(ab-cd)(ac-bd)} = p^* . \frac{p-q}{r} \end{aligned}$$

oder $p^*(q + r - p) = qr$, ebenso $q^*(p + r - q) = pr$, und $r^*(p + q - r) = pq$

$$\left.\begin{aligned}\frac{r-q}{p^0-q} &= \frac{(a-b)(d-c)(ab-cd)^2}{(a-d)(b-c)(ad-bc)^2}\cdot pp' \\ \frac{r-q}{p^0-r} &= \frac{(a-b)(d-c)(ab-cd)^2}{(a-c)(b-d)(ac-bd)^2}\cdot pp' \\ \frac{p^0-r}{p^0-q} &= \frac{(a-c)(b-d)(ac-bd)^2}{(a-d)(b-c)(ad-bc)^2}\end{aligned}\right\}\text{ sind reelle Zahlen}$$

oder p^0, q, r liegen in einer geraden Linie normal gegen $0p^0p$

V.

{In einem gegebenen Kreise ein Vieleck zu beschreiben, dessen Seiten durch eben so viel gegebene Punkte gehen. SCHUMACHER.}

Es sei der Halbmesser des Kreises, r, die Coordinaten der Winkelpunkte des Polygons

$$\begin{matrix} r\cos\varphi, & r\cos\varphi', & r\cos\varphi'' \text{ etc.} \\ r\sin\varphi, & r\sin\varphi', & r\sin\varphi'' \text{ etc.} \end{matrix}$$

endlich die Coordinaten der gegebnen Punkte, durch welche die verlängerten Seiten des Polygons gehn, (welche respective den ersten und zweiten Winkelpunkt, den zweiten und dritten u. s. w. verbinden)

$$\begin{matrix} a\cos A, & a'\cos A', & a''\cos A'' \text{ etc.} \\ a\sin A, & a'\sin A', & a''\sin A'' \text{ etc.} \end{matrix}$$

Dann ist nach dem Grundsatze, dass, wenn drei Punkte, deren Coordinaten $x, y;\ x', y';\ x'', y''$ sind, in einer geraden Linie liegen, die Bedingungsgleichung

$$xy' + x'y'' + x''y - x'y - x''y' - xy'' = 0$$

Statt hat,

$$\left.\begin{aligned} rr\cos\varphi\sin\varphi' + ra\cos\varphi'\sin A + ar\cos A\sin\varphi \\ -rr\cos\varphi'\sin\varphi - ar\cos A\sin\varphi' - ra\cos\varphi\sin A \end{aligned}\right\} = 0$$

oder

$$r\sin(\varphi' - \varphi) - a\sin(\varphi' - A) + a\sin(\varphi - A) = 0$$

oder

$$r\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = a\cos\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi - 2A)$$

Entwickelt man diese beiden Cosinus, dividirt dann mit $\cos\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi'$, und bezeichnet $\tang\frac{1}{2}\varphi$ mit t, $\tang\frac{1}{2}\varphi'$ mit t',

$$\text{und}\quad \frac{a\sin A}{r-a\cos A}=\alpha,\quad \frac{r+a\cos A}{r-a\cos A}=6,\quad \text{so wird}$$

I.
$$t=\frac{1-\alpha t'}{\alpha-6t'}$$

Ganz auf ähnliche Art wird, wenn man

$$\tang\tfrac{1}{2}\varphi''=t''\quad \frac{a'\sin A'}{r'-a'\cos A'}=\alpha',\quad \frac{r+a'\cos A'}{r-a'\cos A'}=6'$$

setzt,

II.
$$t'=\frac{1-\alpha' t''}{\alpha'-6't''}\ \text{u. s. w.}$$

Man sieht hieraus, dass man so viele Gleichungen erhält, als das Polygon Seiten hat, und dass man durch Verbindung derselben zuletzt auf eine quadratische Gleichung für t kommt.

VI.

Aufgabe. Es sind drei Kreise der Lage und Grösse nach gegeben, man soll einen vierten beschreiben, der sie alle berührt.

Auflösung. Man lege durch den Mittelpunkt des einen Kreises die senkrechten Axen, und nenne die Abstände von diesen Linien

des Mittelpunkts des zweiten Kreises . . . . . . a, b
des dritten Kreises . . . . . . a', b'
des gesuchten . . . . . . x, y

Die Entfernung des Mittelpunkts des ersten Kreises, vom Mittelpunkte des gesuchten heisse $=z$, so ist

$z-c$ die Entfernung des Mittelpunkts des zweiten vom Mittelpunkte des gesuchten,
$z-c'$ die Entfernung des Mittelpunkts des dritten vom Mittelpunkte des gesuchten;

wo c den Unterschied der Halbmesser des ersten und zweiten, und c' den Unterschied der Halbmesser des ersten und dritten Kreises bedeutet.

Wir haben folgende Gleichungen:

$$xx + yy = zz$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (z-c)^2$$
$$(x-a')^2 + (y-b')^2 = (z-c')^2.$$

Setzt man

$$x = z\cos\varphi$$
$$y = z\sin\varphi$$

so erhält man aus den vorigen Gleichungen

$$aa + bb - cc = 2az\cos\varphi + 2bz\sin\varphi - 2cz$$
$$a'a' + b'b' - c'c' = 2a'z\cos\varphi + 2b'z\sin\varphi - 2c'z$$

Dividirt man die erste Gleichung mit $a\cos\varphi + b\sin\varphi - c$, die zweite mit $a'\cos\varphi + b'\sin\varphi - c'$, und zieht sie dann von einander ab, so erhält man

$$\frac{a'a' + b'b' - c'c'}{a'\cos\varphi + b'\sin\varphi - c'} - \frac{aa + bb - cc}{a\cos\varphi + b\sin\varphi - c} = 0$$

oder wenn wir bezeichnen

$$a'a' + b'b' - c'c' = A'$$
$$aa + bb - cc = A$$
$$(A'a - Aa')\cos\varphi + (A'b - Ab')\sin\varphi = A'c - Ac'$$

Setzen wir nun

$$A'a - Aa' = R\cos M$$
$$A'b - Ab' = R\sin M$$
$$A'c - Ac' = N$$

so verwandelt sich unsere Gleichung in

$$R\cos(\varphi - M) = N$$

worin ausser φ alles gegeben ist. Man erhält daraus zwei Werthe für φ, unter denen man nach der Art, wie der gesuchte Kreis berühren soll, zu wählen hat.

VII.

Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie.

Sind a, b, c die Seiten: A, B, C die gegenüberstehenden Winkel eines sphärischen Dreiecks, so ist

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A$$

wie Lagrange für den Fall, dass sowohl b als c kleiner wie 90^0, elegant bewiesen hat. Indessen lässt sich der Beweis leicht auf alle andere Fälle ausdehnen.

Es können folgende Fälle eintreten:

I. . . . . $b < 90^0, \quad c < 90^0$

Hier gilt der Beweis unmittelbar.

II. . . . . $b > 90^0, \quad c > 90^0$

Man verlängere die Seiten b und c über die Punkte B und C hinaus bis zum Durchschnitte A', und bestimme den Werth von a aus der Betrachtung des Dreiecks $A'BC$.

III. . . . . $b > 90^0, \quad c < 90^0$

Man verlängere die Seiten b und a über die Punkte A und B hinaus bis zum Durchschnitte C', in dem Dreieck $C'AB$ ist sodann aus Fall I

$$\cos(180^0 - a) = \cos c . \cos(180^0 - b) + \sin c . \sin(180^0 - b) . \cos(180^0 - A)$$

welches mit der Grundformel identisch ist.

Mit diesem Falle ist $b < 90^0$ und $c > 90^0$ wesentlich einerlei.

IV. . . . . $b = 90^0, \quad A = 90^0$

Hier ist C der Pol von AB, also nothwendig auch $a = 90^0$. Folglich ist die Formel

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A$$

von selbst evident. Mit diesem Falle ist $c = 90^0$, $A = 90^0$ wesentlich einerlei.

V. . . . . $b = 90^0, \quad A \gtrless 90^0$

1) $c = 90^0$. Dann wird A der Pol von c, also $b = 90^0$, und $a = A$. Die Gleichung

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A$$

ist von selbst evident.

2) $c < 90^0$. Hier wird c über B hinaus bis zur Länge von 90^0 fortgesetzt. Aus der Betrachtung des Dreiecks folgt dann

$$\cos a = \cos (90^0 - c) . \cos A + \sin (90^0 - c) . \sin A . \cos 90^0$$

oder

$$\cos a = \sin c . \cos A$$

daher die Formel auch in diesem Falle richtig ist.

3) $c > 90^0$. Hier wird von c der Bogen 90^0 in dem Punkte R abgeschnitten, dann folgt aus Betrachtung des Dreiecks BRC

$$\cos a = \cos (c - 90^0) . \cos A + \sin (c - 90^0) . \sin A . \cos 90^0$$

oder

$$\cos a = \sin c . \cos A \ .$$

wie im vorigen Fall.

Die Fälle, wo $b < 90^0$ oder $b > 90^0$, und zugleich $c = 90^0$, sind mit den beiden vorigen wesentlich einerlei.

Zählt man also alle möglichen Fälle auf, so folgt der Beweis, wenn

Beide Seiten kleiner als 90^0	aus I
Beide Seiten grösser als 90^0	aus II
Eine grösser, die andere kleiner als 90^0	aus III
Beide $= 90^0$	aus IV und V. 1.
Eine $= 90^0$, die andere kleiner	aus IV und V. 2.
Eine $= 90^0$, die andere grösser	aus IV und V. 3.

Wir können also allgemein annehmen:

(A) . . . . . . $\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A$

und ebenso

(2) . . . . . . $\cos b = \cos a . \cos c + \sin a . \sin c . \cos B$

dividirt man (A) mit $\sin c$, und multiplicirt (2) mit $\operatorname{cotg} c$, und addirt, so erhält man

$$\frac{\cos a}{\sin c} = \frac{\cos a \cos c^2}{\sin c} + \sin b . \cos A + \sin a . \cos c . \cos B$$

also

(3) . . . $\cos a . \sin c = \sin b . \cos A + \sin a . \cos c . \cos B$

ebenso

(4) . . . $\cos c . \sin a = \sin b . \cos C + \sin c . \cos a . \cos B$

Multiplicirt man (4) mit $\cos B$, und addirt (3)

(5) . . $\cos a . \sin c . \sin B^2 = \sin b . \cos A + \sin b . \cos B . \cos C$

ebenso

(6) . . $\cos a . \sin b . \sin C^2 = \sin c . \cos A + \sin c . \cos B . \cos C$

Multiplicirt man (5) mit $\frac{\sin c}{\cos a}$ und zieht davon (6) mit $\frac{\sin b}{\cos a}$ multiplicirt ab, so erhalten wir

(7) . . . . . . $\sin c^2 . \sin B^2 - \sin b^2 . \sin C^2 = 0$

oder

(B) . . . . $\sin c . \sin B = \sin b . \sin C$

und wenn man (A, 5) mit $\sin b$ dividirt, und davon (B) mit $\frac{\cos a \sin B}{\sin b}$ multiplicirt abzieht

(C) . . . . . $\cos A = -\cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos a$

endlich wenn man (A, 4) mit $\sin c$ dividirt, und (B) mit $\frac{\operatorname{cotg} C}{\sin c}$ multiplicirt davon abzieht

(D) . . . . . $\operatorname{cotg} c . \sin a - \operatorname{cotg} C . \sin B = \cos a . \cos B$

Aus diesen vier Grundformeln folgen die sogenannten Neperschen Analogien, und die Abkürzungen, welche durch die Bedingung, dass das sphärische Dreieck rechtwinklig sein soll, angebracht werden können, von selbst.

{Man vergleiche mit dieser Entwickelung die von Lagrange im sechsten Heft des *Journal de l'Ecole Polytechnique.*}

[Handschriftliche Bemerkung über die Zurückführung der Relationen zwischen den Elementen eines sphärischen Dreieckes auf die Relationen zwischen den Elementen ebener Dreiecke:]

Sphärisches Dreieck

Winkel	Seiten
A	a
B	b
C	c

Ebene Dreiecke

A	$\sin\frac{1}{2}a$
$90^0-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$	$\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c$
$90^0-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C$	$\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}b$
180^0-A	$\cos\frac{1}{2}a$
$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C-90^0$	$\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c$
$90^0+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$	$\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c$
B	$\sin\frac{1}{2}b$
$90^0-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C$	$\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a$
$90^0+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$	$\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c$
180^0-B	$\cos\frac{1}{2}b$
$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C-90^0$	$\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c$
$90^0-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$	$\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c$
C	$\sin\frac{1}{2}c$
$90^0-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$	$\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}a$
$90^0+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$	$\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$
180^0-C	$\cos\frac{1}{2}c$
$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C-90^0$	$\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b$
$90^0-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C$	$\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$

Man kann dieses auch durch folgende sechs Gleichungen ausdrücken:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = -\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{2\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}b\,.\,\sin\frac{1}{2}c}$$
$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(-A+B+C)}{2\sin\frac{1}{2}a\,.\,\cos\frac{1}{2}b\,.\,\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B+C)}{2\cos\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}b\,.\,\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{2\cos\frac{1}{2}a\,.\,\cos\frac{1}{2}b\,.\,\sin\frac{1}{2}c}$$

oder durch folgende

$$\begin{aligned} \sin A \sin b \sin c &= \sin B \sin a \sin c = \sin C \sin a \sin b \\ &= -4\cos\tfrac{1}{2}(+A+B+C)\,.\cos\tfrac{1}{2}a\,.\cos\tfrac{1}{2}b\,.\cos\tfrac{1}{2}c \\ &= 4\cos\tfrac{1}{2}(-A+B+C)\,.\cos\tfrac{1}{2}a\,.\sin\tfrac{1}{2}b\,.\sin\tfrac{1}{2}c \\ &= 4\cos\tfrac{1}{2}(+A-B+C)\,.\sin\tfrac{1}{2}a\,.\cos\tfrac{1}{2}b\,.\sin\tfrac{1}{2}c \\ &= 4\cos\tfrac{1}{2}(+A+B-C)\,.\sin\tfrac{1}{2}a\,.\sin\tfrac{1}{2}b\,.\cos\tfrac{1}{2}c \end{aligned}$$

Diese Grösse bedeutet den sechsfachen Inhalt der Pyramide, deren Ecken die drei Winkelpunkte des sphärischen Dreiecks und der Mittelpunkt der Kugel bilden, Halbmesser der Kugel $= 1$ gesetzt. Ferner ist diese Grösse

$$= 4\,\text{cotang}\, r\,.\sin\tfrac{1}{2}a\,.\sin\tfrac{1}{2}b\,.\sin\tfrac{1}{2}c$$

wo r den sphärischen Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises bedeutet. Auch ist dieselbe

$$= 4\cos r\,.\sin\alpha\,.\sin\tfrac{1}{2}b\,.\sin\tfrac{1}{2}c$$

wo [2α, 2β, 2γ die Winkel bedeuten, welche zwischen je zwei der nach den Eckpunkten A, B, C gezogenen sphärischen Halbmesser und gegenüber den Seiten a, b, c liegen, oder] α, β, γ die Winkel des ebenen Dreiecks ABC sind, weil $2\sin\frac{1}{2}a$, $2\sin\frac{1}{2}b$, $2\sin\frac{1}{2}c$ dessen Seiten, mithin $4\sin\alpha\,.\sin\frac{1}{2}b\,.\sin\frac{1}{2}c$ dessen doppelter Inhalt; während dasselbe zugleich als Grundfläche obiger Pyramide mit Höhe $\cos r$ betrachtet werden kann, woraus die Richtigkeit von selbst erhellt. [Aus der obigen sechsfachen Gleichung leitet Gauss an einer andern Stelle die von ihm so vielfach angewandten Formeln her:]

$$\begin{aligned} \cos\tfrac{1}{2}A\,.\sin\tfrac{1}{2}(b-c) &= \sin\tfrac{1}{2}(B-C)\,.\sin\tfrac{1}{2}a \\ \sin\tfrac{1}{2}A\,.\sin\tfrac{1}{2}(b+c) &= \cos\tfrac{1}{2}(B-C)\,.\sin\tfrac{1}{2}a \\ \cos\tfrac{1}{2}A\,.\cos\tfrac{1}{2}(b-c) &= \sin\tfrac{1}{2}(B+C)\,.\cos\tfrac{1}{2}a \\ \sin\tfrac{1}{2}A\,.\cos\tfrac{1}{2}(b+c) &= \cos\tfrac{1}{2}(B+C)\,.\cos\tfrac{1}{2}a \end{aligned}$$

Astronomische Nachrichten. Nr. 42. 1823 November.

Auflösung einer geometrischen Aufgabe.

{In des Herrn Professors Möbius Beschreibung der Leipziger Sternwarte kommt S. 61 eine kleine geometrische Aufgabe vor, nemlich:

Beliebige 5 Punkte A, B, C, D, E einer Ebene sind, je zwei, durch gerade Linien verbunden. Man kennt die somit entstehenden 5 Dreiecke EAB, ABC, BCD, CDE, DEA ihrem Inhalte nach, und verlangt daraus den Inhalt des Fünfecks $ABCDE$.

Herr Hofrath Gauss, der einige Wochen diesen Sommer bei mir verlebte, schrieb, wie er das Buch sah, folgende Auflösung hinein:

Man bezeichne die 5 Punkte mit 1, 2 3, 4, 5, die

Winkel	213	mit	p
	214	—	q
	215	—	r
Seiten	12	—	t
	13	—	u
	14	—	v
	15	—	w
Dreiecke	123	—	a
	234	—	b
	345	—	c
	451	—	d
	512	—	e
	124	—	x
	134	—	y
	135	—	z
Fünfeck	12345	—	ω

So hat man folgende Relationen

$$\left.\begin{aligned} tu.\sin p &= 2a \\ tv.\sin q &= 2x \\ tw.\sin r &= 2e \\ vw.\sin(r-q) &= 2d \\ uw.\sin(r-p) &= 2z \\ uv.\sin(q-p) &= 2y \end{aligned}\right\}$$

daraus vermittelst des Lemma der *Th.M.C.C.*

$$ad - xz + ey = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} b+d+x &= \omega \\ a+d+y &= \omega \\ a+c+z &= \omega \end{aligned}\right\}$$

die Werthe von x, y, z hieraus in (I) substituirt geben

$$ad - (\omega - b - d)(\omega - a - c) + e(\omega - a - d) = 0$$

oder entwickelt

$$\omega\omega - (a+b+c+d+e)\omega + (ab+bc+cd+de+ea) = 0$$

SCHUMACHER.

Handbuch der Schiffahrtskunde von C. RÜMKER. 1850. Seite 78.

Auflösung einer geometrischen Aufgabe.

An drei Punkten (1), (2), (3), welche in einer geraden Linie (I) und in bekannten Abständen von einander, A von (1) nach (2), B von (2) nach (3), liegen, sind die Winkel ϑ, ϑ', ϑ'' zwischen zwei andern Punkten (4), (5), deren gegenseitiger Abstand $= 2c$ ebenfalls bekannt ist, gemessen; man verlangt die Lage der drei ersteren Punkte gegen die beiden letzteren. Um nichts unbestimmt zu lassen, setze ich voraus, dass die drei Winkel alle von (4) nach (5) in einerlei Sinn wachsend gemessen sind, dass auf der Linie (I) die Abstände in einem bestimmten Sinne positiv gezählt werden (so dass, wenn man aus irgend welchem Grunde nicht den zwischen den beiden andern liegenden Punkt mit (2) bezeichnete, A und B ungleiche Zeichen erhalten würden) und c positiv genommen werden soll.

Ich wähle zur Abscissen-Linie die Gerade (II), welche (4),(5) in ihrer Mitte (6) unter rechten Winkeln schneidet, und zähle die Abscissen von (6) an positiv auf der Seite von (4),(5), wo der Winkel von (4) nach (5) unter 180° erscheint, d. i. auf der rechten, wenn man die Winkel von der Linken nach der Rechten wachsen lässt; die Ordinaten mögen in dem Sinne von (6) nach (5) positiv gezählt werden. Auf (II) bezeichne ich die Punkte, deren Abscissen

$$c.\text{cotang}\,\vartheta = n-a, \quad c.\text{cotang}\,\vartheta' = n, \quad c.\text{cotang}\,\vartheta'' = n+b$$

sind, mit (1*), (2*), (3*); sie sind die Mittelpunkte der drei Kreise, welche beziehungsweise durch (1), (2), (3) und zugleich alle durch (4) und (5) gehen. Die Halbmesser dieser Kreise sind

$$\frac{c}{\sin\vartheta} = \sqrt{(cc+(n-a)^2)}, \quad \frac{c}{\sin\vartheta'} = \sqrt{(cc+nn)}, \quad \frac{c}{\sin\vartheta''} = \sqrt{(cc+(n+b)^2)}$$

oder wenn man $\frac{c}{\sin\vartheta'} = r$ setzt, so werden die beiden andern $\sqrt{(rr-2an+aa)}$, $\sqrt{(rr+2bn+bb)}$. Endlich sei (7) der Durchschnittspunkt von (I) und (II), T und t die Abstände der Punkte (2) und (2*) von (7), φ der Winkel zwischen gleichnamigen Armen jener Linien, und zwar von (I) nach (II) in dem gewählten Sinn positiv gemessen. Es ist also die Abscisse von (7) $= n-t$, und folglich sind die Coordinaten der drei Beobachtungsplätze

$$\begin{array}{lll} (1) \ldots\ldots & n-t+(T-A).\cos\varphi, & (T-A).\sin\varphi \\ (2) \ldots\ldots & n-t+T.\cos\varphi, & T.\sin\varphi \\ (3) \ldots\ldots & n-t+(T+B)\cos\varphi, & (T+B).\sin\varphi \end{array}$$

Die drei unbekannten Grössen t, T, φ werden aber aus folgenden Gleichungen zu bestimmen sein, wenn zur Abkürzung x für $\cos\varphi$ geschrieben ist:

$$tt+TT-2tTx = rr \quad \ldots\ldots \quad [1]$$
$$(t-a)^2+(T-A)^2-2(t-a)(T-A)x = rr-2an+aa$$
$$(t+b)^2+(T+B)^2-2(t+b)(T+B)x = rr+2bn+bb$$

Anstatt der beiden letzteren gebrauche ich die folgenden, die aus ihrer Subtraction von der ersten hervorgehen

$$2at+2AT-2an-AA = (2At+2aT-2aA)x \quad \ldots \quad [2]$$
$$2bt+2BT-2bn+BB = (2Bt+2bT+2bB)x \quad \ldots \quad [3]$$

aus $-\frac{1}{2}b[2]+\frac{1}{2}a[3]$ und $\frac{1}{2}B[2]-\frac{1}{2}A[3]$ folgt, wenn man zur Abkürzung

$$aB-bA=\lambda,\quad ab(A+B)=f,\quad \tfrac{1}{2}AB(A+B)+\lambda n=g$$
$$AB(a+b)=F,\quad \tfrac{1}{2}aBB+\tfrac{1}{2}bAA=G$$

schreibt

$$\lambda T+G=\lambda(t+f)x,\quad \lambda t-g=(\lambda T-F)x \text{ oder } \lambda(t-Tx)=g-Fx$$

und folglich

$$\lambda t=\frac{+g-(F+G)x+fxx}{1-xx} \quad \dots\dots\dots\dots [4]$$
$$\lambda T=\frac{-G+(f+g)x-Fxx}{1-xx} \quad \dots\dots\dots\dots [5]$$

Die Gleichung [1] in der Form $(t-Tx)^2+TT(1-xx)=rr$ gibt

$$\lambda\lambda rr-(g-Fx)^2=\lambda\lambda TT(1-xx) \quad \dots\dots\dots [6]$$

Substituirt man darin den Werth von λT aus [5], so erhält man die cubische Gleichung

$$2fFx^3-(ff+2fg+FF+2FG+\lambda\lambda rr)xx$$
$$+(2fG+2gF+2gG)x+\lambda\lambda rr-gg-GG=0 \quad \dots [7]$$

Nachdem dadurch x bestimmt ist, findet man die Coordinaten des Punktes (2) aus obigen Ausdrücken, die, wenn man darin für $t-Tx$ und T die vorhin gegebenen Werthe substituirt, folgende Gestalt annehmen

$$n-\frac{g-Fx}{\lambda},\qquad \frac{-G+(f+g)x-Fxx}{\lambda\sqrt{(1-xx)}}$$

und die beiden anderen Punkte (1) und (3), indem man zu diesen Werthen $-Ax$, $-A\sqrt{(1-xx)}$ und $+Bx$, $+B\sqrt{(1-xx)}$ beziehungsweise hinzufügt.

Da jedem Cosinus zwei Werthe des Winkels angehören, oder was dasselbe ist, da die Radical-Grösse $\sqrt{(1-xx)}$ sowol positiv wie negativ genommen werden kann, so gibt jede zulässige Wurzel der Gleichung zwei Auflösungen; nemlich zwei gegen die Linie (II) symmetrische Lagen der Punkte (1), (2), (3), was auch schon für sich klar ist. Für den Fall, dass $+1$ oder -1 eine Wurzel der Gleichung [7] wird, ist übrigens die obige Formel für die Ordinate nicht brauchbar, weil dann Zähler und Nenner null werden, und man muss anstatt

derselben folgende anwenden nach [6]

$$\sqrt{\left\{rr - \left(\frac{g \mp F}{\lambda}\right)^2\right\}}$$

Wir haben also auch hier zu einer Wurzel zwei Auflösungen, nemlich durch die symmetrischen Lagen der Punkte (1), (2), (3) von (II) auf entgegengesetzten Seiten gleich weit abstehend; für $x = +1$ ist der Sinn der positiven Richtung in (I) derselbe wie in (II), für $x = -1$ verkehrt. Nur der einzige Fall, wo ohne Rücksicht auf das Zeichen $\lambda r = g - F$ (für $x = +1$) oder $= g + F$ (für $x = -1$) ist, muss ausgenommen werden, indem dann beide symmetrische Lagen von (I) in Eine, nemlich mit der Linie (II) selbst, zusammenfallen.

Auszuschliessen sind offenbar von den Wurzeln der Gleichung [7] nicht blos die imaginären, sondern auch die ausserhalb der Grenzen -1 und $+1$ liegenden reellen, und die Wurzel $+1$ oder -1 selbst, wenn λr ohne Rücksicht auf das Zeichen beziehungsweise kleiner ist als $g - F$ oder $g + F$. Es lässt sich übrigens beweisen, dass allemal, wenigstens eine der drei Wurzeln in die Kategorie der auszuschliessenden gehört, und also überhaupt niemals mehr als vier verschiedene Auflösungen durch reelle Coordinaten statt haben können. Genau genommen, bildet zwar *ein ganz singulärer* Fall in so fern eine Ausnahme des ersteren Satzes, als dabei keine Wurzel ausgeschlossen wird. Der singuläre Fall ist nemlich der schon oben erwähnte, wo für $x = \pm 1$ die Ordinate $= 0$ wird, und wo (wie sich leicht beweisen lässt) die betreffende Wurzel zweimal gilt, d. i. wo das Glied linkerseits des Gleichheitszeichens in der Gleichung [7] den Factor $(x \mp 1)^2$ enthält; die Gleichung hat dann also nur zwei ungleiche Wurzeln, von denen die zweite allerdings auch eine zulässige sein kann. Der Schlussfolge selbst thut demnach dieser Ausnahmefall keinen Eintrag.

Endlich muss noch bemerkt werden, dass auch unter den Auflösungen in reellen Zahlen physisch unzulässige sein können. Es ist nemlich nicht der ganze Kreis, welcher aus dem Mittelpunkte (1) durch (4) und (5) beschrieben ist, der geometrische Ort des Punktes (1), sondern nur der auf der positiven Seite von (4), (5) liegende Bogen, wenn ϑ unter 180^0, und der auf der negativen Seite liegende, wenn ϑ überstumpf ist; dasselbe gilt von den beiden anderen Kreisen. Diese physische Bedingung ist aber in unserer Auflösung noch nicht berücksichtigt. Unter den verschiedenen, in reellen Zahlen gefundenen Auflösungen sind also nur diejenigen zulässig, wo die für die Abscissen der drei Punkte (1), (2), (3)

sich ergebenden Werthe alle dieselben Zeichen haben, wie respective die Sinus von $\vartheta, \vartheta', \vartheta''$.

Mit Stillschweigen darf ich auch nicht übergehen, dass die gegebene allgemeine Auflösung der Aufgabe in singulären Fällen entweder ihre Anwendbarkeit ganz verliert, oder doch einiger Modification bedarf, beschränke mich hier aber nur auf eine Andeutung der erheblichsten Punkte:

I. Ist einer der beobachteten Winkel gleich $= 0$ oder $= 180°$, so ist vortheilhaft, den betreffenden Beobachtungsplatz, auch wenn er zwischen den beiden andern liegen sollte, als (1) oder (3) anzunehmen. Wählet man das Letztere, so bleiben alle Theile der allgemeinen Auflösung gültig, indem man nur b als unendlich gross betrachtet, und als Zeichen in den Rechnungen beibehält, welches hernach in allen Resultaten aber von selbst wegfällt. An mehr als Einem Punkte darf aber offenbar der Winkel nicht 0 oder 180° sein, weil dies nur stattfindet, wenn alle drei in der Linie (4), (5) liegen, wo die Aufgabe unbestimmt wäre.

II. Sind unter den beobachteten Winkeln zwei gleiche, so fallen von den Punkten (1*), (2*), (3*) zwei zusammen, oder eine der Grössen a, b, $a+b$ wird $= 0$, daher auch $fF = 0$; in diesem Falle geht demnach die cubische Gleichung in eine quadratische über. Übrigens sieht man leicht, dass das Verschwinden des ersten Coëfficienten der cubischen Gleichung *nur* in dem Falle der Gleichheit zweier Winkel eintritt.

III. Die gegebene Auflösung ist nicht anzuwenden, wenn die Grössen A, B den a, b proportional sind, also $\lambda = 0$ wird. In diesem Falle ist die cubische Gleichung mit Unrecht herangezogen und enthält eine der Sache fremde Wurzel, die richtige aber zweimal. Es ist nemlich klar, dass dann die beiden Combinationen, durch welche aus [2] und [3] die Gleichungen [4] und [5] abgeleitet wurden, *nicht verschieden* sind; diese Gleichungen werden daher identisch, und jede für sich gibt $x = \frac{A}{2a} = \frac{B}{2b}$. Offenbar muss dann aber eine der beiden Gleichungen [2], [3] noch ferner gebraucht werden, aus deren Combination mit [1] sich leicht ergibt: $cx = (t-n)\sqrt{(1-xx)}$. Es erhellt daraus, dass die Linie (I) entweder durch den Punkt (4) oder durch (5) geht, und es gibt

in der That für den in Rede stehenden singulären Fall immer vier Auflösungen, indem man entweder durch (4) oder durch (5) eine der beiden geraden Linien legt, deren Winkel mit der Abscissen-Linie die Grösse $\frac{A}{2a} = \frac{B}{2b}$ zum Cosinus hat. Die Realität dieser Auflösungen hängt davon ab, dass diese Grösse nicht grösser als 1 ist, für welchen Werth selbst die vier Auflösungen sich auf zwei reduciren.

ALLGEMEINES

COORDINATEN-VERZEICHNISS

ZUSAMMENGETRAGEN

AUS FOLGENDEN PARTIELLEN VERZEICHNISSEN

Nr. 1) Generalverzeichniss von 1828. [Gradmessung 1821. 1822. 1823 und deren Fortsetzung bis Jever 1824. 1825 ausgeführt von C. F. Gauss.]
2) Eichsfeld 1828. [Messungen des Hauptmann Müller und des Lieutenant Gauss.]
3) Hildesheim 1828. [Messungen des Lieutenant Hartmann.]
4) Hildesheim 1829. [Messungen des Lieutenant Hartmann.]
5) Westphalen 1829. Messungen des Lieutenant Gauss und Lieutenant Hartmann.]
6) Westphalen 1830. [Messungen des Lieutenant Hartmann.]
6*) Hartmanns Messungen von 1831, so weit sie nicht durch 12 ersetzt werden.
7) Lüneburg. [Messungen des Hauptmann Müller im Jahre 1830 und des Lieutenant Gauss in den Jahren 1830 und 1831.]
8) Harz 1833. [Messungen des Lieutenant Hartmann.]
9) Mittelweser 1833. 1834. [Messungen des Hauptmann Müller und des Lieutenant Gauss.]
10) Oberweser (Göttingen) 1836. Messungen des Hauptmann Müller.]
11) Aller 1838. Messungen des Hauptmann Müller.]
12) Ostfriesland 1841. [Messungen des Hauptmann Müller.]
13) Bremen 1839. [Messungen des Hauptmann Müller.]
14) Bremen 1843. 1844. [Messungen des Lieutenant Gauss.]

1844. Dec. 13.

[NACHLASS.]

COORDINATEN-VERZEICHNISS.

+ südlich	+ westlich		Nr.
+ 75241.297	— 36876.103	Inselsberg Haus	1
+ 75233.714	— 36849.867	*Inselsberg hessischer Dreieckspunkt*	1
+ 65882.780	— 55230.212	Seeberg, Passagein-strument	1
+ 56432.370	— 92153.140	Ettersberg	1
+ 34030.275	— 25362.271	Struth	1
+ 33664.655	+ 6065.145	*Meisner*	1
+ 22702.9	+ 46588.2	Burghasungen	10
+ 21058.1	+ 182.1	Hanstein	10 (2)
+ 20806.6	+ 5987.8	Witzenhausen Rath-haus	10
+ 20730.1	— 63790.8	Posse	2
+ 20708.0	— 63788.8	Posse	8
+ 20708.0	+ 5903.4	Witzenhausen Kirch-thurm	10
+ 19447.5	+ 24390.4	Landwehrhagen	10
+ 18580.578	— 169314.554	Leipzig Sternwarte	
+ 17783.447	+ 17094.498	Steinberg, Signal	10
+ 17782.597	+ 17095.067	*Steinberg Postam.*	10
+ 17414.8	+ 22655.4	Lutternberg Thurm	10
+ 16676.9	— 15519.4	Dünwarte	2
+ 16609.262	+ 22268.678	*Lutternberg*	10
+ 16108.813	+ 23881.506	Lutternberg Neben-platz	10
+ 15842.6	— 4326.7	Rusteberg	10 (2)
+ 15550.9	+ 12308.9	Hedemünden	10
+ 15180.2	— 59183.8	Gross Furra	8
+ 15062.887	+ 17995.559	*Cattenbühl* 1.	10
+ 15061.0	— 1120.1	Brennerei, Schorstein	10
+ 14871.104	+ 18863.402	*Cattenbühl* 2.	10
+ 14744.0	+ 7691.2	Berlepsch	10
+ 13800.5	+ 5748.8	Hermanrode	10
+ 13324.4	+ 6941.7	Mollenfelde	10
+ 12713.539	+ 5002.747	Gieseberg Signal	10
+ 12712.662	+ 5002.234	*Gieseberg Postam.*	10
+ 12398.0	+ 14962.4	Lippoldshausen	10
+ 12396.1	+ 20306.9	Münden	10
+ 12134.6	+ 8961.05	Atzenhausen	10
+ 12103.347	+ 16773.704	*Wiershausen* 1.	10
+ 12068.459	+ 16758.233	*Wiershausen* 3	10
+ 11821.6	— 15595.1	Günderode	2
+ 11820.9	+ 5521.9	Deiderode	10
+ 11590.2	+ 15845.9	Wiershausen Thurm	10
+ 11413.4	— 10545.5	Bischhagen	2
+ 10799.4	— 20605.6	Mittlerer Baum	2
+ 10678.2	— 9297.0	Vogelsang	2
+ 10622.194	+ 16288.698	Wiershausen Signal	10
+ 10621.837	+ 16288.015	*Wiershausen 2. Theo-dolithplatz*	10
+ 10104.7	+ 1077.3	Gross Schneen	10 (2)
+ 10009.2	— 12965.2	Weissenborn	2
+ 9737.9	— 43660.25	Bleicherode	8
+ 9709.8	+ 12690.1	Meensen	10
+ 9382.441	+ 13339.153	*Meenserberg*	10
+ 9127.086	— 31527.867	Kälberberg Pfahl	2
+ 9126.7	— 31527.0	*Kälberberg Theodo-lithplatz*	2
+ 9081.9	— 9731.4	Bischhausen	2
+ 8761.9	— 17298.7	Neuendorf Wind-mühle	2
+ 8524.6	— 64937.3	Hospital bei Heringen	8
+ 8195.3	— 475.7	Ballenhausen	10
+ 8180.3	— 27784.2	Schloss Bodenstein	2
+ 8135.6	+ 4189.4	Dramfeld	10
+ 7661.8	— 7491.9	*Eschenberg Theodo-lithplatz*	2
+ 7661.406	— 7492.385	Eschenberg Pfahl	2
+ 7635.8	+ 767.7	Stockhausen	10
+ 7602.2	— 9112.4	Sennikerode Südl. Schorstein	2
+ 7439.1	+ 1937.1	Oberjesa	10 (3)
+ 7247.0	+ 9924.8	Jühnde	10
+ 7242.3	+ 15746.3	Dankelhausen	10
+ 7213.7	— 28707.3	*Bornberg Theodolith-platz*	2

+ südlich	+ westlich		Nr.
+ 7213.2	− 28706.8	Bornberg Pfahl	2
+ 6851.3	− 12087.0	Beinrode	2
+ 6770.2	− 2812.9	Reinhausen	10
+ 6769.4	+ 6054.2	Volkerode	10
+ 6484.7	− 6756.1	*Nordl. Gleiche Theodolithplatz von 1828*	2
+ 6475.621	− 6768.874	Nordl. Gleiche Pfahl	2
+ 6475.564	− 6770.088	*Nordl. Gleiche Theodolithplatz von 1829*	2
+ 6468.0	+ 3812.8	Sieboldshausen	10 (1)
+ 6197.2	− 11333.9	Kerstlingerode	2
+ 6060.027	+ 12447.725	*Hohehagen Platz von 1836*	10
+ 6059.878	+ 12447.746	*Hohehagen Platz von 1821*	1
+ 5904.1	− 25567.9	Tastunger Warte	2
+ 5820.8	+ 1140.3	Niederjesa	10 (1)
+ 5734.2	− 10280.4	*Bei Ritmarshausen*	2
+ 5680.2	− 18048.2	Beseckendorf	2
+ 5246.2	− 22325.7	Teistungenburg	2
+ 5188.0	− 11168.3	Ritmarshausen	2
+ 5162.993	+ 13692.525	*Schottsberg*	10
+ 5091.0	− 25558.5	Wehnde	2
+ 4929.0	+ 5482.0	Lembshausen	10
+ 4909.4	− 29872.7	Brehmer Ohmberg	2
+ 4869.4	− 14817.6	Nesselroder Warte	2
+ 4866.8	+ 18318.0	Bühren	10
+ 4472.0	− 7627.8	Benniehausen	2
+ 4365.3	− 21020.8	Pferdbergs Warte	2
+ 4363.6	− 20999.9	Theodolithplatz daneben	2
+ 4308.2	− 20065.5	Immingerode	2
+ 4298.6	− 23474.4	Lindenberg	2
+ 4284.7	+ 10584.4	Bördel	10
+ 4236.4	+ 5292.2	Mengershausen	10 (2)
+ 3861.2	− 1806.9	Dimarder Warte	10
+ 3839.7	− 28927.3	Brehme	2
+ 3795.5	− 51853.6	Gross Wechsungen	8
+ 3755.3	− 22105.6	Gerblingerode	2
+ 3655.3	− 16722.7	Nesselrode	2
+ 3564.3	− 25042.7	Wehnder Warte	2
+ 3385.9	− 34674.3	Bischofsrode	2
+ 3331.220	− 30683.287	Sonnenstein Pfahl	2
+ 3330.905	− 30681.570	*Sonnenstein Pfahl von 1833*	8
+ 3330.629	− 30682.728	*Sonnenstein Theodolithplatz von 1828*	2
+ 3297.2	− 8468.3	Amt Niedeck	2
+ 3246.483	+ 10733.915	*Sesebühl*	10
+ 3177.2	− 20769.5	Tiftlingerode	2
+ 2943.1	+ 15861.4	Varlosen	10
+ 2786.6	+ 3050.0	Rossdorf	10 (1)
+ 2783.8	− 59292.1	Nordhausen	8
+ 2780.7	+ 12736.4	Dransfeld Kirchthurm vor dem Brande	10
+ 2701.3	− 44976.6	Gratzungen	8
+ 2662.8	− 10874.5	Sattenhausen	2
+ 2627.3	− 25513.8	Ecklingerode	2
+ 2586.105	− 19037.483	Euzenberg Pfahl	2
+ 2585.7	− 19036.8	*Euzenberg Theodolithplatz*	2
+ 2287.0	− 59387.6	Nordhausen Doppelthurm	2
+ 2208.65	− 42014.98	Trebra	8
+ 2150.7	− 13816.3	Himmigerode Giebel	2
+ 1986.5	− 933.4	Geismar	10
+ 1811.6	− 6268.5	Gross Lengden	2
+ 1771.9	− 21830.3	Duderstadt Untere Kirche	2
+ 1726.2	− 39601.8	Epschenrode	8
+ 1719.5	− 22257.6	Duderstadt O. Kirche	2
+ 1644.4	− 21749.3	Duderstadt W. Thurm	2
+ 1508.400	− 9266.532	Jacobsberg Pahl	2
+ 1507.5	− 9266.3	*Jacobsberg Theodolithplatz*	2
+ 1397.1	− 16937.0	Werkshausen	2
+ 891.318	− 25971.380	Rothe Warte, Centrum des Thurms	2
+ 890.3	+ 5429.2	Ellershausen	10
+ 884.3	− 25983.8	Rothe Warte N. O. Eckpfeiler	2
+ 883.804	− 25984.408	*Rothe Warte, Theodolithplatz*	2
+ 862.8	− 10867.1	Falkenhagen	2
+ 852.6	+ 16470.8	Lewenhagen	10
+ 780.8	+ 14919.8	Imssen	10
+ 670.2	+ 1977.5	Backhaus Pavillon	1
+ 549.8	− 20958.7	Sülberg Warte	2
+ 461.4	− 47059.9	Pützlingen	8
+ 371.1	− 16590.7	Desingerode	2
+ 220.895	− 1883.547	*Kleper*	10
+ 167.7	− 25721.8	Herbigshagen Pfahl	2
+ 167.657	− 25721.050	*Herbigshagen Theodolithplatz*	2
+ 2.998	− 6.528	*Sternwarte, Platz auf dem Dache von 1836*	10
+ 0	0	*Sternwarte Mitte der Achse des Reichenbachschen Meridian-Kreises*	
− 5.507	0	*Sternwarte Theodolith 1823*	1
− 186.9	− 8461.4	Mackenrode	2
− 427.8	+ 5813.5	Hetgershausen	10
− 442.17	+ 902.34	Göttingen Mariae	10
− 469.5	+ 553.8	Göttingen Rathhaus	10
− 486.2	+ 645.5	Göttingen Johannis Südlicher Th.	10
− 500.8	+ 644.9	Göttingen Johannis Nordlicher Th.	10 (2)
− 556.5	+ 127.95	Göttingen Albanus	10
− 710.702	+ 500.493	Göttingen Jacobi	10 (2)
− 753.3	+ 3357.9	Gronde	10 (2)
− 766.5	− 38848.7	Stöckei	8
− 823.029	− 26665.059	S. Antonio di Padova	2
− 823.8	− 26664.7	*S. Antonio di Padova Theodolithplatz*	2
− 908.0	+ 14147.9	Güntersen	10

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 1173.3	— 11317.5	Landolfshausen	2
— 1198.9	— 26411.9	Langenhagen Schorstein	2
— 1483.1	— 13249.8	Seulingerwarte	2
— 1503.6	— 15101.7	Seulingen	2
— 1550.8	— 45839.7	Holbach	8
— 1621.8	— 27467.7	*Apfelbaum Theodolithplatz*	2
— 1622.846	— 27469.008	Apfelbaum bei Langenhagen	2
— 2047.2	— 23897.4	Breitenberg	2
— 2160.609	— 26487.321	Buche bei Hilkerode	2
— 2164.4	— 26486.9	*Buche Theodolithplatz*	2
— 2358.5	+ 11641.1	Barterode	10
— 2649.0	+ 4982.8	Ellichausen	10 (2)
— 2885.9	— 23406.8	Hübenthal Tanne	2
— 2923.7	— 32820.3	Ellerburg	2
— 2953.262	+ 2228.054	Kleine Hagen	2
— 3053.0	— 20148.8	Obernfelde	2
— 3283.0	— 68056.6	Jagdschloss	2
— 3314.2	— 4406.2	Roringen	10
— 3497.0	+ 355.8	Weende	10 (2)
— 3667.8	— 2418.5	Clausberg	10 (2)
— 3746.65	+ 3698.7	Holtensen	10
— 3868.9	— 14409.4	Seeburg	2
— 3908.9	— 42364.4	Tettenborn	8 (2)
— 3976.3	— 17301.0	Germershausen	2
— 3991.8	— 74780.3	Schwende	2
— 4031.6	+ 6818.9	Esebeck	10
— 4047.715	+ 11071.465	*Kuhberg Nebenplatz 1.*	10
— 4244.7	+ 35922.1	Trendelburg runder Thurm	9
— 4263.0	— 16091.7	Berenshausen	2
— 4356.782	+ 11845.836	*Kuhberg*	10
— 4807.8	— 11445.6	Ebergötzen	2
— 5019.756	— 0.133	*Meridianzeichen*	1(10)
— 5085.8	— 21007.9	*Hellberg*	2
— 5156.8	+ 36185.5	Trendelburg Laternenthurm	9
— 5267.1	— 18643.7	Rollshagen	2
— 5444.0	+ 13449.9	Adelepsen Schloss	10
— 5452.7	+ 13468.7	Adelepsen Burg	10
— 5556.2	+ 13380.9	Adelepsen Kirchthurm	10
— 5630.5	— 7399.5	Baum am Hünenstollen	2
— 5634.099	— 7421.465	Hünenstollen Pfahl	2
— 5634.100	— 7420.4	*Hünenstollen Theodolithplatz*	2
— 5898.6	— 22821.3	Rüdershausen	2
— 6069.2	+ 5072.2	Lenglern	10 (2)
— 6106.5	— 24538.0	Ruhmspringe	2
— 6116.3	— 6993.1	Nebenplatz am Hünenstollen	2
— 6284.6	— 46874.3	Walkenried	8
— 6316.5	— 73679.7	Auersberg	8
— 6334.675	— 9698.349	Lauseberg Pfahl	2
— 6335.1	— 9699.0	*Lauseberg Theodolithplatz*	2
— 6418.7	— 15025.4	Wollbrandshausen	2
— 6551.6	— 7374.4	Mäusethurm	2
— 6610.8	— 12471.1	Krebeck	2
— 6753.8	+ 1541.0	Bovenden	10 (2)
— 6982.3	— 61156.9	Poppenberg	8
— 7052.9	— 20631.6	Nebenplatz bei Hellberg	2
— 7101.5	— 37370.8	Osterhagen	8
— 7184.6	+ 18436.6	Offensen	10
— 7349.7	— 8399.8	Holzerode, Struthkrug	2
— 7527.3	— 21764.2	Wollershausen	2
— 7577.8	+ 11101.0	Lödingen	10
— 7579.7	— 8321.9	Holzerode Thurm	2
— 7624.725	+ 2249.419	Baum bei Bovenden	2
— 7625.9	+ 2248.2	*Baum Theodolithplatz*	2
— 7661.845	— 35709.258	Bartholfelde	8
— 7666.8	— 1552.2	Plesse, dünner Thurm	10 (2)
— 7696.8	— 1607.4	Plesse dicker Thurm	10 (2)
— 8033.6	+ 5838.1	Harste	10 (2)
— 8396.7	— 11175.3	Renshausen	2
— 8481.6	— 13192.9	Bodensee	2
— 8619.776	+ 11952.497	*Kuhberg Nebenplatz* 2	10
— 8716.1	— 38640.44	Ahrensberg	8
— 8718.8	— 10248.1	Nebenplatz 2 bei Renshausen	2
— 8854.7	— 10279.4	Nebenplatz 1 bei Renshausen	2
— 8920.1	— 6956.8	Spanbeck	2
— 9113.6	— 18782.4	Gieboldehausen	2
— 9267.916	+ 224.426	*Grebenberg*	10 (2)
— 9472.301	— 139301.772	Petersberg	1
— 9474.2	— 25369.7	Pöhlde	2
— 9485.0	+ 18999.8	Vorliehausen	10
— 9541.1	— 33228.2	Barbis	8
— 9594.5	+ 20334.8	Albershausen	10
— 9629.4	— 31666.9	Barbiswarte	2
— 9678.5	+ 2664.5	Parensen	10
— 9691.6	+ 10691.8	Hettensen	10
— 9887.2	+ 614.0	Angerstein	10 (2)
— 9949.5	— 10974.6	Tuerhausen	2
— 10181.6	+ 6326.6	Gladebeck	10 (2)
— 10456.3	— 66018.4	Harzhöhe	8
— 10471.3	— 40403.046	Rabenskopf	8
— 10857.9	+ 780.9	Kloster Stein	10 (2)
— 11136.0	— 15774.7	Bilshäuser Clus	2
— 11214.148	— 30285.81	Scharzfeld Kirchth.	8
— 11226.089	— 37531.015	Scholm, Signal im Baume	8
— 11328.0	+ 19573.2	Schoningen	10
— 11451.4	— 23219.3	Aukrug	2
— 11507.5	+ 9501.8	Elligerode	10
— 11526.0	— 14953.1	Bilshausen	2
— 11532.556	— 36038.443	Hausberg	8
— 11559.2	+ 4026.5	Wollbrechtshausen	10 (2)
— 11672.502	— 66284.731	*Schalliethe*	8

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 11765.0	+ 440.2	Nörten	10 (2)
— 11977.187	41915.437	Stephansecke	8
— 12107.5	— 13210.7	Nebenplatz 2 bei Bilshausen	2
12183.213	+ 7792.143	*Gladeberg Theodolithplatz*	10
— 12183.453	+ 7792.303	Gladeberg Signal	10
12233.8	— 13196.8	Nebenplatz 1 bei Bilshausen	2
— 12241.1	— 82626.5	Dampfmaschine Albertine	8
12279.2	+ 4922.8	Hevensen	10 (2)
12372.2	— 15199.4	Strohkrug	2
12493.537	+ 18762.239	*Sommerling*	10
12591.1	— 5442.4	Nebenplatz bei Sudershausen	2
— 12650.61	— 36537.55	Kummel, Signal im Baume	8
— 12979.832	30778.248	Gretchenradsbleck	8
— 13244.4	83102.8	Harzgerode	8
13647.0	+ 7916.8	Hardegsen Kirchthurm	10
13708.0	+ 8031.1	Hardegsen Magazin	10
— 13808.354	+ 20900.304	*Eichhagen*	10
— 13870.8	+ 18170.0	Hollensen	10
— 13888.6	— 20309.2	Hattorf	2
13900.994	— 32337.378	Liethberg	8
13963.3	12586.3	Lindau	2
— 14085.7	— 27493.7	Herzberg Kirchthurm	2
— 14174.9	— 41419.9	Jagdkopf Signal im Baume	8
— 14206.620	+ 7328.687	*Weper Nebenplatz 1*	10
14207.2	— 26902.1	Herzberg Schloss	8 (2)
— 14230.1	+ 2749.4	Behrensen	10
— 14271.2	+ 16565.0	Gierswald	10
14397.360	— 42340.224	*Langeecke*	8
14470.678	+ 21426.920	Uslar Kirchthurm	10
— 14514.420	+ 19919.692	*Galgenfeld*	10
— 14544.393	+ 21329.106	Uslar Rathhaus	10
— 14684.3	— 31271.2	Eickelnkopf	8
— 14833.9	+ 6614.7	Lutterhausen	10 (2)
— 14939.2	— 4064.9	*Torkenberg*	2
— 15108.4	— 15990.2	Wulften Thurm	2
— 15186.429	— 50327.104	Hohegeiss	8
— 15203.3	+ 18294.4	Dinkelhausen	10
— 15242.6	— 4102.7	Nebenplatz auf Wieterberg	2
— 15348.043	+ 7590.451	*Weper*	10
15496.8	+ 5211.5	Thüdinghausen	10
— 15543.9	33697.6	Grosse Knollen Signal im Baum	8
— 15548.4	— 33734.0	Grosse Knollen Baumspitze	8
— 15686.5	+ 2375.8	Grossenrode	10
— 15720.0	53780.9	Bonnekenstein	8
15741.3	2238.6	Sudheim	2
— 15751.5	— 65456.5	Stiege	8
— 15855.3	— 31164.2	Rothe Soole	8
— 15910.2	16381.6	Nebenplatz b Wulften	2
— 16187.933	+ 19596.646	Fahle	10
— 16284.1	+ 48876.2	Bruchhausen	9
— 16338.1	+ 22516.0	Forsthaus am Knobben	10
— 16442.670	— 46910.145	*Eversberg*	8
— 16530.3	+ 21220.4	Eschershausen	10
— 16553.8	— 10882.7	Catlenburg	2
— 16714.5	+ 8914.2	Trögen	10
— 16756.059	+ 22338.780	*Knobben Nebenplatz*	10
— 16826.3	— 9622.7	Nebenplatz bei Suterode	2
— 16833.7	— 16382.2	*Wulften Theodolithplatz*	2
— 16834.496	— 16381.887	Wulften Pfahl	2
— 16887.185	+ 22136.990	*Knobben*	10
— 17039.1	— 18756.6	Schwiegershausen	2
— 17500.2	— 740.0	Hillersen	2
— 17584.8	— 11553.2	Berka	2
— 17854.543	— 37470.334	Kobalt-thals-Kopf	8
— 17869.8	+ 26462.7	Schönhagen	10
— 17950.6	+ 8564.0	*Weper Nebenplatz 2*	10
— 18169.1	— 78903.0	Victorshöhe	8
— 18366.7	— 75666.7	Friedrichsbrunnen	8
— 18415.3	— 63048.0	Hasselfelde	8
— 18501.058	+ 19090.605	*Fahlerstollen Postament*	10
— 18502.084	+ 19091.158	Fahlerstollen Brett	10
— 18577.6	— 7565.2	Hammenstedt	2
— 18903.3	+ 4992.5	Moringen	10
— 19091.4	+ 10983.2	Espol	10
— 19102.1	— 53807.7	Tanne	8
— 19107.0	— 10845.4	Nebenplatz 2 bei Elvershausen	2
— 19192.8	— 1527.1	Höckelheim	2
— 19217.9	— 14471.6	Dorste	2
— 19246.1	— 10506.5	Nebenplatz 1 bei Elvershausen	2
— 19268.640	+ 19054.094	Wolfsstrang	10
— 19282.0	+ 5767.3	Ober Moringen	10
— 19421.288	— 189500.165	Wurzelberg	1
— 19653.2	— 4143.2	Nordheim Kirchthurm	10 (3)
— 19704.9	— 3980.6	Nordheim Rathhaus	3
— 19866.0	— 10604.9	Elvershausen	2
— 19930.7	— 22824.1	bei der niedrigen Warte	8
— 20001.816	— 34250.040	Lilienberg	8
— 20014.9	— 39500.2	Glockenhaus	8
— 20019.3	— 39483.2	Thürmchen bei Andreasberg	8
— 20287.2	— 39835.3	Andreasberg Kirche	8
— 20351.449	— 53682.875	Eiserne Pfähle, Pfahl	8
— 20693.3	— 51001.6	Wiedfeld Haus	8
— 20738.34	— 28075.2	Bärengarten	8
— 21016.2	— 50929.1	Wiedfeld Signal	8
— 21026.8	— 55141.4	Hösekenhay Stange 2	8
— 21045.7	— 25360.7	Katzenkopf	8
— 21057.088	— 53876.002	Eiserne Pfähle, Signalstange	8

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 21436.6	— 12958.9	Nebenplatz bei Marke	2
— 21446.2	— 27159.5	Schindelnkopf	8
— 21467.0	— 30088.7	bei dem Haspelkopf	8
— 21487.255	— 29438.938	Haspelkopf	8
— 21534.8	— 20728.9	Warte bei Osterode	2
— 21537.2	— 20720.6	Nebenplatz 1 bei Osterode	2
— 21538.6	— 20743.6	Nebenplatz bei der Warte 1833	8
— 21614.1	— 40090.8	Sandhügel bei Andreasberg	8
— 21738.138	— 56148.803	Höeckenhay Stange 1	8
— 21804.2	— 21514.0	Osterode Schloss	8 (2)
— 21807.0	— 20391.5	Zehentscheuer	8
— 21950.38	— 52542.6	Signal im Baume	8
22209.5	— 21367.6	Osterode Marktthurm	8
22217.1	— 20924.0	Osterode Vorstadtkirche	8 (2)
— 22267.8	— 48562.7	Signal bei Braunlage	8
— 22351.9	— 21613.1	Osterode Todtenthurm	2
— 22503.363	— 32244.871	Hanskuhnenburg	8
— 22524.3	— 23825.0	Scherenberg	2
— 22550.6	— 19836.4	Nebenplatz 2 bei Osterode von 1828	2
— 22605.8	— 26260.6	Steilewand	8
— 22640.7	— 27593.1	Wienthalskopf	8
— 22691.6	+ 37649.0	Fürstenberg	9
— 22715.6	— 8861.6	Brunsteinbaum	2
— 22785.3	— 31101.2	Grosse Breitenberg	8
— 22901.256	— 19526.96	bei Lasfelde	8
— 22946.5	— 1554.3	Edesheimer Warte	2
— 23019.5	— 32589.4	Bösenberg	8
— 23036.6	— 25706.1	Sösekopf	8
— 23212.68	— 52488.6	Lindlah (d)	8
— 23389.7	— 47.5	Hollenstedt	2
— 23399.9	— 24580.7	Scherenberg Signal	8
— 23509.8	+ 4232.7	Iber	3
— 23645.0	— 53068.2	Lindlah (c)	8
— 23682.4	— 40910.3	Rehberg	8
— 23793.9	— 55008.0	Lindlah (a)	8
— 23912.6	— 54784.2	Lindlah (b)	8
— 24059.9	— 29922.9	Eichelnberg	8
— 24185.2	— 15415.6	Nienstedt	8
24364.6	+ 38569.7	Bofzen	9
— 24371.9	— 40343.5	kl. Sonnenberg	8
— 24430.8	— 58729.7	Susenberg	8
— 24483.0	+ 984.7	Stöckheim	2
— 24504.3	+ 27468.0	Moosberg Haus	9
— 24520.3	— 57702.9	Wegweiser auf Katzenberg	8
— 24591.2	— 59083.9	Eiche	8
— 24747.3	— 40318.4	Sonnenberg Signal im Baume	8
— 24787.7	— 52751.8	Entfernter Wegweiser (s. g.)	8
— 24852.5	— 2126.5	Edesheim	2
— 25052.1	— 59107.2	Kleinschmidtskopf	8
— 25124.2	— 55200.3	Bastekopf	8
— 25131.8	— 25230.0	Schönenberg	8
— 25141.1	— 28710.4	Steinberg	8
— 25237.9	— 27192.9	Blockköthenkopf	8
— 25293.9	— 50288.8	Bahrenberg	8
— 25315.1	— 51071.3	Feuersteine bei Elend	8
— 25406.0	— 39407.3	Sonnenberg Pfahl	8
— 25497.0	— 32422.8	Allerberg	8
— 25509.2	— 47772.1	Kleiner Winterberg	8
— 25523.68	— 57785.67	Wegweiser zur Rothenhütte	8
— 25570.5	— 46684.7	Wormberg Pfahl	8
— 25572.7	— 46676.1	Wormberg Stange	8
— 25707.2	— 57185.4	Grosses Horn	8
— 25748.408	— 55691.076	Wegweiser vor dem Steinbach	8
— 25842.5	+ 41741.0	Knillwarte	9
— 26023.7	— 43251.5	Achtermannshöhe	8
— 26033.4	— 23968.7	Schieferecke	8
— 26141.1	— 1069.6	Hohnstedt	2
— 26153.8	+ 3791.5	Strothagen	3
— 26260.757	— 26436.710	Clausberg Signal	8
— 26275.3	+ 8678.3	Grubenhagen Centrum	3
— 26277.0	+ 8675.9	Grubenhagen Theodolith	3
— 26283.4	+ 19034.8	Friedrichshausen	3
26533.8	— 25212.9	Heiligenstock	8
— 26619.9	— 12689.5	Lauenberge	3
— 26655.422	— 58616.108	Kleines Horn	8
— 26678.2	— 35849.5	Hochliegende Signalstange	8
— 26723.3	+ 19516.9	Sievershausen	3
— 26745.8	+ 131327.7	Beckum	5
— 26759.6	— 39586.3	Sonnenkopf	8
— 26775.350	— 62257.835	Kalte Thal	8
— 26804.02	— 22196.66	Bornsberg	8
— 26866.9	— 26983.3	Grube Neue Weinschenke	8
— 26872.3	— 35052.9	Vosshay	8
— 26908.304	— 58162.233	Wegweiser vor dem Westerwinkel	8
— 26920.6	+ 7989.1	Rotenkirchen	3
— 26995.932	— 58042.166	Westerwinkel Signal	8
— 27005.5	— 33630.55	Ifenkopf	8
— 27019.5	— 18323.64	Badenhausen	8
— 27067.1	+ 1656.7	Sülbeck grosser Thurm	3
— 27181.8	— 66452.7	Hüttenrode	8
— 27189.9	+ 1725.6	Sülbeck kleiner Thurm	3
— 27291.1	+ 15328.3	Hilwartshausen	3
— 27297.1	— 59313.6	Elbingerode	8
— 27298.1	— 36646.3	Stieglitzecke	8
— 27476.7	+ 38638.9	Höxter Kilian erster Thurm	9
— 27489.2	+ 38641.2	Höxter Kilian zweiter Thurm	9
— 27500.8	— 60001.43	Wegweiser nach Blankenburg	8

+ südlich	— westlich		Nr.
27568.1	+ 38760.7	Höxter katholische Kirche	9
— 27609.1	— 60324.4	Galgenberg	8
— 27636.3	— 56840.4	Prinzenhay	8
27784.3	— 43350.1	Düstern Tannen	8
— 27874.3	+ 43094.4	Obenhausen Capelle	9
— 27943.6	— 33069.9	Sperberdamm	8
— 27978.34	— 58850.1	Ortberg Signal	8
— 28050.1	— 35780.0	auf dem Brande	8
— 28096.9	+ 15931.5	Scharfenberg	5
— 28128.4	— 51950.7	Hohneklippe	8
— 28381.7	+ 9615.1	Dassensen	3
— 28438.2	— 37961.9	auf dem Kurstberge	8
28486.5	— 31040.7	Schwarzenberg	8
— 28491.1	+ 4954.3	Odagsen	2
— 28602.6	— 61396.1	Hühnerbleek	8
28641.9	— 43718.2	Oderhay	8
— 28670.5	— 18560.6	Windhausen	8
28677.3	16073.1	bei Gittelde	8
28695.9	22014.8	Knöppelweg	8
28714.4	— 42441.7	Schwarzen Tannen	8
28733.5	— 1225.8	Kreieberg	3
28782.6	39792.5	auf dem kleinen Bruchberge	8
28861.224	— 59292.409	Ortberg Signal im Baume	8
— 28862.3	— 31289.8	Nebenplatz bei Schwarzenberg	8
— 28933.4	34606.2	unten am Brande	8
— 28943.9	59778.56	Unort	8
— 29254.4	29987.8	Harterweg	8
— 29262.584	38649.072	Wolfswarte Tanne	8
— 29284.1	— 32063.6	Münsterhay	8
— 29335.9	45028.0	Hirschhörner	8
— 29336.8	42925.6	Alte Stange auf einer Klippe	8
— 29363.4	— 11147.3	Wellersen	3
— 29385.5	— 26451.1	Signal bei Clausthal	8
— 29411.7	— 31335.5	Polsterberg	8
— 29653.157	— 38611.900	*Reuschenberge*	9
— 29864.9	+ 2056.6	Salzderhelden	3
— 29911.4	— 16822.4	Gittelde untere Kirche	8
— 29947.3	— 28915.4	Grube Dorothea Zechenhaus	8
— 30010.4	43147.3	Tanne auf einer Klippe	8
30021.3	26733.1	Clausthal, Schützenhaus	8
— 30179.2	— 24914.2	bei Frankenscharner Hütte	8
— 30232.4	— 16451.0	Gittelde obere Kirche	8
— 30310.087	46418.626	*Brocken*	1 (8)
— 30394.3	+ 17244.1	Dassel Thurm auf der Stadtmauer	3
30424.7	+ 17444.1	Dassel Kirchthurm	3
— 30557.8	— 35413.4	kleiner Okerkopf	8
30578.7	+ 13848.1	Ellensen	3
30727.2	26965.7	Clausthal Marktkirche	8

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 30737.4	+ 16561.1	Bierberg	3
— 30836.54	— 45248.0	Signal zwischen Steinen	8
— 30872.0	— 27169.6	Clausthal Gottesackerkirche	8
— 31079.692	— 26761.621	Clausthal	8
— 31235.6	— 18838.3	Signal nahe bei Grund	8
— 31283.0	— 40839.0	Lerchenköpfe	8
— 31326.2	+ 11840.2	Markoldendorf kleine Spitze	3
— 31362.2	+ 8258.5	Hullersen	3
— 31381.2	+ 14447.8	Eilensen	3
— 31381.3	+ 9767.6	Holtensen	3
— 31606.7	+ 11899.6	Markoldendorf spitzer Thurm	3
— 31948.1	— 16192.9	Amt Staufenburg	8
— 32076.5	— 27141.3	Zellerfeld	8
— 32126.4	— 21899.1	Hasenberg	8
— 32248.3	+ 5276.3	Eimbeck	3
— 32408.8	— 14610.0	Fahrenberg Nebenplatz 1	8
— 32503.262	— 14534.999	*Fahrenberg*	8
— 32537.3	+ 19194.3	Mackensen	3
— 32589.8	— 15441.8	Staufenburg spitze Ruine	8
— 32714.6	+ 37313.1	Albaxen	9
— 32748.3	+ 15485.8	Erichsburg	3
— 32766.035	— 15103.932	Staufenburg Baum	8 (2)
— 32778.515	— 25216.839	Grube Johannis Zechenhaus	8
— 32831.3	— 14033.0	Holenberg	8
— 33174.936	— 23876.236	Platz in der Nähe der Prinzenlaube	8
— 33177.01	— 23842.8	in der Prinzenlaube	8
— 33213.4	— 20112.3	Winterberg Spitze der Hütte	8
— 33221.3	— 20120.7	Winterberg Signal	8
— 33262.469	— 23435.154	Wildemann	8
— 33365.9	+ 20396.7	Henkenberg	3
— 33441.2	— 21369.1	Teufelsthalerberg	8
— 33516.8	+ 34313.1	Holzminden	9
— 33618.2	— 18745.7	Heinrichsberg	8
— 33636.2	+ 42917.5	Fürstenau	9
— 33968.9	+ 10021.1	Vardeilsen	3
— 33987.1	+ 12545.6	Amelsen	3
— 34107.5	— 58533.0	Wernigerode Schloss	4 (3)
— 34176.05	+ 35383.0	Stael	9
— 34719.2	— 23217.9	Adlerberg	8
— 34949.4	— 37179.2	Ahrensberg	8
— 35177.8	+ 45816.1	Löwendorf	9
— 35209.5	— 29438.9	Kahleberg	8
— 35386.9	+ 15183.5	Lüthorst	3
— 35393.25	23500.0	Wöhlerberg	8
— 35442.5	— 20390.3	Gross Wulpke	8
— 35463.6	— 38611.7	Wildenplatz	8
— 35582.3	+ 10650.7	Avendshausen	3
— 35648.9	+ 42010.7	Telegraph 29	9
— 35820.004	— 30231.679	Krohnsfeld	8
— 35935.0	+ 132291.5	Ennigerloh	5

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 36173.4	— 31157.4	Riesenbachskopf	8
— 36182.0	+ 10275.4	Stukenberg	3
— 36450.0	— 14412.4	Kirchberg	4
— 36529.559	+ 42629.094	*Kötersberg*	9
— 36612.665	— 28544.522	Bocksberg	8
— 36669.0	+ 30947.5	Bevern	9
— 36750.1	+ 20434.226	Telegraph 27	9
— 37067.2	+ 24317.6	Deensen	9
— 37682.0	+ 25587.3	Aroldissen	9
— 37795.3	— 24596.4	Schulberg	8
— 37855.6	— 23849.1	Lautenthal	8
— 38316.3	— 21672.75	Schieferklippe	8
— 38472.6	— 11779.0	*Kleie*	4
— 38643.0	+ 13677.8	Telegraph 26	9
— 38821.8	— 13118.3	Engelade	4
— 38836.6	+ 28936.5	Telegraph 28	9
— 38921.443	— 28423.139	Langeweth	8
— 38937.704	+ 37708.540	*Wilmeroderberg*	9
— 39091.25	+ 17589.50	Wangelstedt	9
— 39123.9	+ 3238.5	Naensen	3
— 39348.37	— 24895.578	Riesberg	8
— 39370.6	— 4329.0	*Bei Clausberg*	4
— 39477.2	— 4516.9	Kloster Clausberg	4
— 39538.3	— 20909.1	Teufelsberg	8
— 39808.5::	+ 14728.7::	Vorwohle	9
— 39824.5	— 5689.5	*Bei Brunshausen*	4
— 40094.968	— 33653.130	Rammelsberg	8
— 40136.4	— 41619.4	Büntheim Kirche	4
— 40171.0	— 16074.1	Seesen Jacobsschule	4
— 40291.8	— 41618.2	Büntheim Amt	4
— 40437.7	+ 43816.8	Falkenhagen	9
— 40460.151	— 23896.671	*Ecksberg*	8
— 40471.2	— 33166.2	Thurm am Rammelsberge	4 (3)
— 40484.7	— 12638.7	Bilderlah	4
— 40518.2	— 15896.1	Seesen Obere Kirche	4
— 40755.3	— 40484.6	Schlevecke (ungewiss)	4
— 40860.2	+ 24002.5	Amelunxborn	9
— 40952.298	+ 7668.304	*Hils*	1 (9)
— 40961.9	+ 2611.4	Telegraph 25	9
— 41340.6	+ 27206.3	Golmbach	9
— 41354.0	— 4578.1	Dankelsheim	4
— 41482.47	+ 37007.07	Polle	9
— 41560.526	+ 20679.775	*Homburg*	9
— 41700.4	— 32963.2	Goslar Thurm am Clausthor	4 (3)
— 41753.7	— 33728.7	Goslar Zwinger	4 (3)
— 41774.464	— 32709.047	Goslar Frankenberg Centrum	4 (3)
— 41795.8	— 42636.3	Westerode	4
— 41904.75	— 15435.32	Schildberg	8 (4)
— 41999.1	— 6948.9	Alt Gandersheim	4
— 42000.1	— 50062.7	Stapelnburg (ungewiss)	4
— 42017.3	+ 3278.6	*Selter*	4
— 42038.8	— 33357.5	Goslar Marktthurm	4 (3)
— 42271.8	— 7821.4	Gremsheim	4
— 42288.2	— 33753.3	Goslar Stephani	4 (3)
— 42322.1	1703.5	Wetteborn	4

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 42333.8	— 33274.9	Goslar Jacobi südl. Thurm	4 (3)
— 42344.8	— 33275.3	Goslar Jacobi nordl. Thurm	4 (3)
— 42433.4	— 25894.0	Wolfshagen	8
— 42445.890	+ 37150.338	*Eckberg*	9
— 42476.2	— 33194.2	Goslar Neuwerk südl. Thurm	4 (3)
— 42487.8	— 33188.0	Goslar Neuwerk nordl. Thurm	4 (3)
— 42538.2	— 33509.2	Goslar Hagelthurm	4 (3)
— 42610.7	— 39621.7	Harlingerode	4
— 42824.6	+ 35484.0	Brevörde	9
— 42874.1	+ 33080.4	Grave	9
— 42879.0	— 34246.0	Goslar Siechhof	4 (3)
— 43001.8	— 21234.5	Gegenthalskopf	8
— 43104.5	— 43342.5	Bettingerode	4
— 43133.392	— 36105.680	Sutmerthurm Centrum	4 (1.3)
— 43140.770	— 36108.955	Sutmerthurm Pfahl daneben	4
— 43218.8	— 14430.0	Bornhausen	4
— 43230.3	+ 2402.7	Esbeck nordlicher Schorstein	4
— 43304.8	— 11540.1	Mechtshausen	4
— 43317.2	+ 19181.0	Wickensen	9
— 43830.4	+ 41410.9	Vahlbruch	9
— 43880.7	— 2308.4	Eierhausen	4
— 44074.1	+ 2715.9	Klein Freden	4
— 44352.6	+ 21060.1	Eschershausen	9
— 44538.8	+ 3446.2	Gross Freden	4
— 44584.7	+ 29846.9	Ruhle	9
— 44627.1	+ 25920.0	Vogler	9
— 44867.0	— 47036.3	Abbenrode (unsicher)	4 (3)
— 44868.1	— 45050.4	Lochtum	4 (3)
— 45036.8	— 4902.4	Gernrode	4
— 45191.1	+ 18957.0	Holtensen	9
— 45416.800	+ 18137.985	*Gretberg*	9
— 45616.2	+ 21332.1	Scharf. Oldendorf	9
— 45642.9	— 34760.2	Grauhof	4 (3)
— 45950.9	— 12735.3	Gross Rüden	4
— 46048.1	— 26833.3	Langelsheim	4 (3)
— 46456.6	+ 36528.0	Ottenstein	9
— 46802.6	— 42699.6	Vienenburg Ruine	4 (3)
— 46803.1	— 42801.1	Vienenburg lutherische Kirche	4 (3)
— 46959.2	+ 40990.4	Neersen Thurm	9
— 46998.9	— 42597.9	Vienenburg katholische Kirche (ungewiss)	3
— 47176.402	+ 19533.384	*Ith, Südlicher Punkt*	9
— 47188.3	— 42913.2	Vienenburg katholische Kirche (ungewiss)	4
— 47203.9	— 30238.6	Jerstedt	4
— 47217.7	+ 32923.1	Höhe	9
— 47224.6	+ 21812.7	Lüerdissen	9
— 47566.0	— 5201.9	*Heber Platz 1.*	4 (3)
— 47659.9	— 5206.0	*Heber Platz 2.*	4 (3)

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 47769.2	+ 42689.4	Neersen Windmühle	9
— 47826.5	— 33624.9	Hahndorf	4
— 48016.7	— 1626.2	Hornsen	4
— 48067.7	— 44430.4	Wiedelah Kirche	4
— 48095.5	— 44646.1	Wiedelah Amt	4
— 48103.8	— 40955.5	Wöltingerode	4 (3)
— 48128.6	— 37208.8	Immenrode	4 (3)
— 48362.8	+ 7079.1	Förste	4
— 48370.1	— 4943.7	Lamspringe Klosterkirche	4
— 48403.7	— 10569.0	Woldenhausen	4
— 48498.8	+ 9674.6	Gerzen	4
— 48547.071	+ 16779.146	Blosse Zelle	9
— 48573.4	— 4766.6	Lamspringe Thurm am Berge	4
— 48642.5	— 4974.3	Lamspringe lutherische Kirche	4 (3)
— 48664.1	+ 25224.7	Kirchbrack	9
— 48753.781	— 42307.428	*Harly's Berg*	4
— 49062.4	— 49733.1	Steterlingenburg	4
— 49150.9	— 2822.2	Graste	4 (3)
— 49181.8	— 15102.2	Jerse	4
— 49293.1	+ 41425.2	Hohe Linde	9
— 49359.7	+ 7171.1	Rollinghausen	4
— 49479.9	— 13202.2	Wilhelmshütte	4
— 49517.9	+ 29870.0	Hoppenberg	9
— 49541.8	— 28321.2	Bredelem	4 (3)
— 49558.8	— 1071.4	Woltershausen	4
— 49603.4	+ 118017.6	Harsewinkel	5
— 49733.0	— 37495.5	Weddige	4
— 49734.4	+ 8252.1	*Schlehberg*	4
— 49830.3	— 31334.9	Dörnten	4 (3)
— 49957.6	+ 29386.8	Bodenwerder Kirchthurm	9
— 49998.1	+ 1122.6	*Armenseul*	4 (3)
— 50073.5	+ 29388.8	Bodenwerder runder Thurm	9
— 50113.3	— 10449.1	*Knick*	4
— 50159.7	+ 9321.6	*Wahrberg*	4
— 50222.2	— 2097.2	Netze	4 (3)
— 50296.2	+ 29206.3	Bodenwerder viereckiger Thurm	9
— 50389.3	— 44889.4	Wülperode	4
— 50450.6	— 11838.7	Dalum	4
— 50560.3	+ 9038.3	Alfeld Armenkirche	4
— 50696.0	+ 256.5	Armenseul Thurm	4
— 50715.9	+ 29383.0	Kemnade	9
— 50725.6	— 41980.6	Lengde	4
— 50747.86	+ 39169.659	Lüntorf	9
— 50766.9	— 15319.2	Örtshausen	4
— 50781.5	+ 32529.775	Hehlen westlicher Kirchthurm	9
— 50791.7	+ 32515.9	Hehlen östl. Kirchth.	9
— 50855.063	+ 159064.091	Münster	5
— 50911.176	+ 28904.677	Eckberg	9
— 50939.0	— 39645.2	Beuchtum	4
— 50939.2	+ 8057.8	Alfeld	4 (1)
— 51150.0	+ 32145.1	Hehlen östlicher Schlossthurm	9
— 51158.2	+ 32206.4	Hehlen westlicher Schlossthurm	9
— 51173.3	— 13141.8	Königsthurm	4
— 51229.7	+ 5857.6	*Menteberg.*	4
— 51503.2	+ 123649.4	Greffen	5
— 51553.3	— 1177.8	Harbarnsen	4 (3)
— 51769.1	+ 6445.3	Langenholzen	4
— 51960.2	— 34878.3	Klein Dören	4
— 52060.0	— 31557.2	Heissum (ungenau)	4
— 52187.8	+ 15224.8	Rot	1
— 52288.6	+ 638.1	Adenstedt	4
— 52296.4	+ 9671.7	Limmer	4
— 52304.2	+ 5060.8	Zum Sack Thurm	4
— 52421.9	— 28787.7	Haringen	4 (3)
— 52452.9	+ 34732.065	Hajen	9
— 52457.4	+ 6845.1	*Rehberg*	4
— 52790.1	— 15459.7	Malum	4
— 53002.6	— 37980.0	Wehre	4 (3)
— 53034.4	+ 4705.5	Schulenkirche	4
— 53072.2	— 44028.6	Gödekenrode	4
— 53114.4	— 10275.6	Hary	4
— 53239.3	— 27479.6	Upen	4 (3)
— 53261.3	— 4170.5	Evensen	4 (1.3)
— 53277.2	+ 16845.5	Duingen Thurm	9
— 53371.549	+ 30204.3	Heyen	9
— 53383.4	— 12752.5	Bokenem lutherische Kirche	4 (1.3)
— 53391.2	+ 16676.2	Duingen Windmühle	9
— 53392.8	— 30827.7	Otfresen	4 (3)
— 53518.6	— 12758.9	Bokenem Rathhaus	4
— 53585.6	— 9671.3	Story	4 (1.3)
— 53621.6	— 6861.4	Gross Ilde	4 (3)
— 53633.127	+ 32830.430	Eichberg	9
— 53745.6	— 2148.0	Sehlen	4 (1.3)
— 54031.1	+ 611.2	Sellenstedt	4 (1.3)
— 54272.0	+ 9602.2	Wettensen	4 (1)
— 54304.7	— 11177.6	Bönnien	4 (1.3)
— 54382.754	+ 34051.433	Frenke	9
— 54420.9	+ 22112.6	Wallensen	9
— 54498.3	— 14332.2	Völkersheim spitzer Thurm	4 (1.3)
— 54603.6	— 14310.1	Völkershelm kuppelförmiger Thurm	4 (3)
— 54626.4	+ 35758.4	Grohnde	9
— 54658.6	— 24846.9	Alten Walmoden	4 (3)
— 54671.013	— 31192.351	Bärenkopf	4 (1.3)
— 54726.2	+ 3431.7	Wernershöhe Platz 2	4 (1)
— 54742.2	— 32917.3	Liebenburg Thurm	4 (1.3)
— 54859.8	— 32898.4	Liebenburg Ruine	4 (1.3)
— 54957.7	— 8325.2	Bültum	4 (1.3)
— 55074.5	+ 3284.5	Vorwerk Wernershöhe	1
— 55093.9	+ 100890.6	Hünenburg	5
— 55121.7	+ 2657.3	Wernershöhe Platz 1	4 (1)
— 55127.9	— 40846.8	Schladen Kirche	4
— 55271.3	— 41011.8	Schladen Amt	4
— 55428.4	— 4181.7	Bodenburg Kirche	4 (1.3)
— 55430.8	— 4477.6	Bodenburg Schloss	4 (1.3)
— 55553.2	+ 29534.0	Esperde	9

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 55694.2	— 4561.0	Bodenburg Kirche zum Schattenberg	4
— 55731.6	+ 96851.0	Bielefeld	5
— 55758.9	+ 41102.1	Hämelscheburg	9
— 55819.2	+ 33319.4	Niederbörrie	9
— 55883.5	— 2989.7	Breinum	4 (3)
— 56063.4	— 45480.9	Horneburg	4 (3)
— 56068.4	— 4030.6	Ostrum	4 (3)
— 56068.8	— 1399.2	Almenstedt	4 (3)
— 56197.3	+ 32850.9	Oberbörrie	9
— 56201.070	— 40982.761	Hoheweg	4
— 56231.4	+ 17636.2	Marienhagen	1
— 56249.8	+ 35150.8	Latferde	9
— 56319.0	— 8759.5	Upstedt	4 (3)
— 56378.1	+ 8627.8	Tafel	4
— 56404.9	— 173.8	Segeste	4 (3)
— 56412.5	— 25279.5	Ringelheim katholische Kirche	4 (3)
— 56515.3	— 37775.5	Gielde	4
— 56538.5	— 25298.6	Ringelheim lutherische Kirche	4 (3)
— 56569.6	— 27942.8	Gitter am Berge	4 (3)
— 56666.2	— 11906.9	Werder	4 (3)
— 56676.2	— 9653.2	Nette	4 (3)
— 56928.3	— 21974.3	Sehlde	4 (3)
— 57007.3	— 13372.3	Schlevecke	4
— 57013.7	+ 11128.4	Brüggen	1
— 57032.7	— 33717.7	Klein Mahnert	4
— 57257.0	— 4718.9	Webrstedt	4 (3)
— 57833.8	— 29489.8	Salzgitter	4
— 57941.7	+ 37790.9	Kirchohsen	9
— 58010.0	+ 14565.5	Külf erster Nebenplatz	1
— 58036.6	+ 46588.0	Aerzen	9
— 58142.4	— 31973.0	Gross Mahnert	4
— 58161.666	+ 40610.158	Bassberg	9
— 58253.9	— 40620.1	Burgdorf	4 (3)
— 58318.6	+ 37637.7	Hagenohsen	9
— 58353.4	— 18376.7	Haus am Heinberg	4
— 58363.5	— 29691.1	Kniestedt	4
— 58496.7	+ 2888.7	Sibbesen	1
— 58573.4	+ 811.1	Petze	4 (3)
— 58576.7	+ 14960.0	Külf Hauptplatz	1
— 58603.0	— 26502.8	Haberlah	4 (3)
— 58771.4	— 5677.7	Söhlberg	4
— 58844.7	+ 10524.8	Reden	1
— 58907.4	— 14418.3	Südlicher Platz bei Woldenberg	4
— 58911.7	— 14419.1	Südlicher Platz bei Woldenberg	3
— 58960.9	— 14464.9	Woldenberg Ruine	1
— 59022.6	— 14440.3	Woldenberg Thurm	4 (1)
— 59176.7	— 45800.8	Achim	4
— 59317.9	+ 17830.3	Deilmissen	1
— 59418.6	— 34645.4	Ohlendorf	4
— 59543.810	+ 40418.580	Ohr	9
— 59589.702	— 28419.915	*Hamberg*	4
— 59669.5	+ 131127.8	Füchtrup	5
— 59694.730	— 233408.667	Golmberg	1
— 59708.0	+ 38678.4	Tündern	9
— 59753.9	+ 15672.5	Külf zweiter Nebenplatz	1
— 59808.1	+ 24123.8	Salzhemmendorf	9
— 59831.9	+ 12802.1	Banteln	1
— 59847.8	+ 8110.9	Heinen	1
— 59862.6	— 20977.6	Gross Heerte	4 (3)
— 59877.6	+ 43380.1	Gross Berkel	9
— 59890.5	+ 9865.2	Wallenstedt	1
— 60028.3	+ 20412.9	Ahrenfelde	1
— 60261.3	— 20484.1	Klein Heerte	3
— 60506.3	+ 169915.8	Altenbergen	5
— 60557.2	+ 34200.3	Vorenberg	9
— 60573.9	— 42033.0	Kloster Heiningen	4(1.3)
— 60755.7	— 32297.5	Beinum	4(1.3)
— 60777.093	— 8729.738	Beinberg	1
— 60872.9	— 41100.0	Pavillon b. Heiningen	4
— 60883.4	— 8347.3	Platz des vormaligen Söderthurms	4
— 60909.3	— 11221.0	Hakenstedt	3
— 60928.3	— 26286.7	Steindlah	4 (3)
— 61048.7	+ 14967.0	Eime	1
— 61053.0	— 37325.2	Klein Flöthe	4 (3)
— 61067.9	— 21897.3	Klein Elbe	4 (3)
— 61082.8	— 14064.5	Sottrum lutherische Kirche	4 (3)
— 61117.7	+ 36057.9	Hastenbeck	9
— 61199.0	— 13766.4	Sottrum katholische Kirche	4 (3)
— 61258.4	+ 6473.3	Eizum	1
— 61380.5	+ 9380.7	Dötzum	1
— 61575.9	+ 34231.2	Ofensburg Pavillon	9
— 61592.1	+ 104841.6	Werther	5
— 61687.3	+ 17974.3	Esbeck	1
— 61731.305	— 38866.591	*Rolandsberg*	4
— 61768.6	— 19693.5	Badekenstedt	4 (3)
— 61785.6	+ 23361.8	Hemmendorf	1
— 61787.1	+ 11347.0	Gronau kleinerThurm	1
— 61797.8	— 26777.2	Hakelberg	3
— 61855.6	+ 11443.3	Gronau grosserThurm	1
— 61911.2	— 17242.5	Binder Dehne	3
— 62088.6	— 33994.6	Flach Stöckhein kleiner Thurm	4
— 62111.1	+ 30320.5	Bisperode	9
— 62177.3	— 34259.3	Flach Stöckheim spitzer Thurm	4
— 62218.2	— 36220.6	Gross Flöthe	4 (3)
— 62260.5	— 14582.6	Holle	3
— 62272.8	— 2634.0	Röderhof	3
— 62289.9	+ 12451.0	Leyherkirche	1
— 62382.969	+ 108965.145	*Lange Egge Theodolithplatz*	5
— 62383.022	+ 108964.367	Lange Egge Pfahl	5
— 62446.5	+ 20938.1	Oldendorf	1
— 62529.3	— 6081.0	Mordmühle	3
— 62534.0	— 22261.1	Gross Elbe	4 (3)
— 62541.4	+ 8067.9	Barfelde	1
— 62576.3	— 44676.9	Bornum	4
— 62646.2	— 29059.9	Calbechte	4

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 62658.220	+ 28818.762	*Ith Nordlicher Platz*	9
— 61755.7	+ 19998.3	Bentsdorf	1
— 61840.320	— 47591.248	*Vorberg.*	4
— 62893.6	— 17160.7	Binder spitzer Thurm	3 (1)
— 62946.7	— 42560.1	Dorstedt Dorf	4
— 62960.0	+ 112787.1	Ravensberg	5
— 63012.9	— 17264.2	Binder kleiner Thurm	4 (3)
— 63014.3	— 5264.7	Gross Düngen	3 (1)
— 63014.7	— 24571.0	Gustedt	4 (3)
— 63021.6	— 18221.4	Rehne	4 (3)
— 63026.2	— 6335.4	Klein Düngen	3 (1)
— 63096.3	— 13004.7	Derneburg	4 (1)
— 63127.2	— 18875.4	Rehner Höhe	3
— 63179.059	+ 41387.660	*Klütberg*	9
— 63280.2	+ 16935.5	Sehlde	1
— 63304.0	+ 133025.7	Glandorf	5
— 63487.8	— 42662.8	Kloster Dorstedt	4
— 63505.0	— 33074.3	Lobmachtersen	4
— 63510.9	+ 1305.0	Dickholzen	3 (1)
— 63515.1	— 6581.9	Heinde	3 (1)
— 63521.0	— 43593.6	Pavillon bei Hedwigsburg	4
— 63645.5	— 20731.2	Oelper	3
— 63696.4	— 1056.8	Söhre	3 (1)
— 63709.7	+ 32908.6	Diedersen	9
— 63753.0	— 8611.7	Listringen	3 (1)
— 63785.3	— 3505.4	Eggerstedt	3
— 63924.3	+ 40307.0	Hameln Bonifacius Laternenthurm	9
— 63926.0	+ 40338.1	Hameln Bonifacius Stumpferthurm	9
— 64001.3	+ 30216.1	Bessingen	9
— 64019.5	+ 36536.8	Afferde	9
— 64039.0	+ 24368.3	Voldagsen	9 (1)
— 64098.0	+ 97372.4	Jöllenbeck	5
— 64211.9	— 15621.6	Ohberg bei Grastorf	3
— 64273.2	— 28493.1	Gebhardshagen	4(1.3)
— 64289.1	+ 40155.0	Hameln Marktthurm	9
— 64297.7	— 17106.5	Wartgenstedt	4 (3)
— 64431.5	— 14829.3	Grastorf grosser Thurm	4 (3)
— 64499.3	— 4791.3	Walshausen	3
— 64501.064	+ 36102.471	Deutberg	9
— 64657.2	— 44716.0	Kissenbrück	4
— 64664.6	+ 53918.0	Goldbeck	9
— 64747.8	+ 31668.3	Behrensen	9
— 64830.5	— 3690.4	Itsum	3 (1)
— 64910.0	+ 10223.6	Betheln	1
— 64952.9	+ 36266.7	Rohrsen	9
— 64990.6	— 50246.1	Remlingen	4 (3)
— 65136.0	+ 1879.3	Marienrode	3 (1)
— 65168.2	— 34325.9	Cramme	4 (3)
— 65178.9	— 674.8	Barienrode	3 (1)
— 65183.1	— 2690.1	Marienburg	3
— 65212.2	— 5728.3	Leckstedt Schornstein 1	3 (1)
— 65218.2	— 5695.1	Leckstedt Schornstein 2	3
— 65317.8	+ 159791.6	Gräven	5
— 65327.7	+ 16995.5	Mehle	1
— 65377.5	+ 8361.1	Kloster Escherde	1
— 65480.191	+ 127023.635	Laer	5
— 65697.0	+ 14113.3	Elze	1
— 65920.3	+ 27054.3	Coppenbrügge 1833	9
— 65925.2	— 42597.1	Ohrum	4
— 65936.0	+ 27080.0	Coppenbrügge 1827	1
— 66001.353	— 23458.424	*Lichtenberg*	1
— 66018.2	— 32659.0	Bahrum Windfahne	4 (3)
— 66025.568	— 23659.472	Lichtenberg Ruine	1
— 66095.5	— 19335.6	Westerlinde	3
— 66176.4	+ 86918.3	Herford	5
— 66343.1	— 23396.4	Stuksberg	1
— 66358.1	+ 1635.0	Neuhof	3
— 66434.2	+ 34550.7	Hilligsfeld	9
— 66543.5	— 30524.8	Gross Heerte	4(1.3)
— 66568.8	— 16417.3	Luttern	4 (3)
— 66602.2	+ 119089.8	Dissen	5
— 66604.2	— 301.5	Ochtersum	3 (1)
— 66676.5	— 23571.3	Lichtenberg Kirchth.	1
— 66688.3	— 5867.4	Uppner Berg Oestl. Platz	3
— 66731.8	+ 43750.4	Wehrbergen	9
— 66769.684	+ 22564.898	*Osterwald*	9
— 66906.0	— 20982.7	Osterlinde	3
— 66977.7	— 4822.0	Uppner Berg	1
— 67012.4	+ 47787.8	Hehmeringen	9
— 67136.4	— 41847.1	Bungenstedter Thurm	4
— 67141.5	— 8490.9	Wendhausen	3
— 67485.3	— 34410.9	Leinde	4
— 67550.4	+ 2723.0	Finkenberg	1
— 67586.4	— 27092.2	Salder kleiner spitzer Thurm auf Schieferdach	3
— 67615.8	— 3295.4	Spitzhut	1
— 67641.6	— 27004.2	Salder Kuppelthurm	3
— 67696.536	— 115828.581	Magdeburg	1
— 67865.0	+ 15055.6	Sorsum	1
— 67883.7	+ 100.8	Lucienvörde	1
— 67897.1	— 26971.0	Salder Ziegelthurm	3 (1)
— 68007.2	— 25392.6	Bruchmachtersen	3
— 68045.838	+ 28422.105	Ruhbrink	9
— 68105.7	+ 7570.0	Escherderberg	1
— 68152.2	+ 45829.7	Lachem	9
— 68155.3	— 9886.9	Otbergen Platz 3	1
— 68200.3	+ 19023.7	Wülfinghausen	1
— 68312.3	+ 11399.4	Burgstemmen	1
— 68422.8	— 9950.0	Otbergen Platz 2	1
— 68444.5	— 9734.8	Otbergen Capelle	1
— 68450.8	+ 33079.173	Hasperde	9
— 68463.0	— 9717.4	Otbergen Platz 1	1
— 68479.3	+ 44196.1	Fischbeck	9
— 68538.7	— 18551.7	Burgdorf kleiner Thurm	3
— 68572.7	— 35471.8	Adersheim	4 (3)
— 68576.3	+ 31562.9	Hohnsen	9
— 68607.5	— 18815.5	Burgdorf grosser Thurm	3
— 68618.2	+ 38863.4	Holtensen	9
— 68634.7	— 447.3	Hildesheim Godehard 1	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 68644.0	— 494.6	Hildesheim Godehard 2	1
— 68648.5	— 448.2	Hildesheim Godehard 3	1
— 68662.5	+ 33900.6	Quatrebras	9
— 68764.2	— 12674.6	Wöhle	1
— 68818.7	+ 1112.5	Moritzberg	1
— 68825.9	+ 4268.8	Sorsum	1
— 68864.5	— 787.1	Hildesheim Lamberti	1
— 68891.2	+ 106297.2	Neuenkirchen	5
— 68904.4	+ 11958.0	Poppenburg	1
— 68975.2	+ 15396.4	Vinie	1
— 68978.6	— 31830.4	Watenstedt	4(1.3)
— 68991.6	+ 94604.5	Enger	5
— 69022.0	+ 28142.9	Brüningshausen	9
— 69025.9	— 4386.6	Achtum	1
— 69206.0	+ 10006.5	Malerten	1
— 69299.4	— 9741.9	Otbergen	3
— 69319.1	— 502.6	Hildesheim Andreas	1
— 69320.0	— 17099.6	Nordassel	3
— 69375.1	+ 13581.3	Wülfingen	1
— 69406.494	— 47208.618	*Festberg*	4
— 69462.9	— 66.7	Hildesheim Michael	1
— 69545.7	— 560.2	Hildesheim Jacobi	1
— 69579.1	+ 99906.853	Spenge	5
— 69624.5	+ 48111.4	Fuhlen	9
— 69750.5	+ 6568.4	Gross Escherde	1
— 69850.5	— 29933.2	Hallendorf	4(1.3)
— 70004.9	+ 34665.5	Flegessen	9
— 70068.0	+ 11399.9	Nordstemmen	1
— 70143.8	+ 102592.2	Wallenbrück	5
— 70311.1	+ 7275.9	Klein Escherde	1
— 70311.7	+ 2132.4	Himmelthür grosser Thurm	1
— 70358.3	— 14639.4	Nettlingen	3 (1)
— 70426.7	+ 44936.0	Weibeck	9
— 70458.7	— 21600.1	Lesse	3
— 70471.967	+ 129345.908	Glane	5
— 70627.8	— 40664.7	Wolfenbüttel Laternenthurm	4(1.3)
— 70637.2	— 40707.5	Wolfenbüttel kleiner Thurm	3
— 70638.570	+ 37482.488	Süntel	9
— 70644.1	+ 31814.77	Hachmühlen	9
— 70665.6	— 8437.1	Dinklar	1
— 70670.5	— 37106.7	Fümmelse	4 (3)
— 70691.8	— 4876.9	Einum	1
— 70713.3	— 40211.8	Wolfenbüttel Schlossthurm	3
— 70727.0	+ 16163.6	Alferde	1
— 70824.1	+ 1792.2	Himmelsthür kleiner Thurm	1
— 70850.1	+ 4930.8	Emmerke	1
— 70875.110	+ 27508.768	*Altenhagen*	9
— 70927.3	— 18659.0	Berne	3 (1)
— 71007.740	— 176238.296	Hagelsberg	1
— 71111.7	— 10184.5	Farmsen	1
— 71236.2	— 17510.0	Berelberg	3
— 71266.8	+ 1103.7	Steuerwald kl. Thurm	1
— 71279.6	+ 1032.7	Steuerwald grosser Thurm	1
— 71364.9	+ 45842.4	Krückeberg	9
— 71399.9	+ 47510.5	Oldendorf	9
— 71450.4	+ 114740.7	Wellingholthausen	5
— 71490.4	+ 19358.6	Eldagsen	1
— 71527.4	+ 62146.3	Möllenbeck südl.	9
— 71533.6	— 28339.2	Engelnstedt	3 (1)
— 71544.7	+ 62143.7	Möllenbeck westl.	9
— 71581.3	— 6608.2	Betmar	1
— 71591.122	+ 129889.158	Iburg Kirche	5
— 71642.9	+ 3292.1	Osterberg	1
— 71710.706	+ 130051.530	Iburg Schloss spitzer Thurm	5
— 71717.4	— 12878.5	Dingelbe grosser Thurm	1
— 71727.826	+ 130090.647	Iburg Schloss stumpfer Thurm	5
— 71770.1	— 3220.0	Bavenstedt	1
— 71779.4	+ 90749.0	Hiddenhausen	5
— 71814.7	+ 100875.6	Kirchhogel	5
— 71933.0	— 24984.3	Repner	1
— 71937.9	+ 51314.3	Wieden	9
— 72001.5	— 10821.0	Kleiner Thurm auf langem Gebäude	1
— 72027.3	+ 65446.9	Varenholz	9
— 72028.6	+ 54104.1	Hohenrode	9
— 72040.7	— 39288.3	Gross Stöckheim	3
— 72059.9	— 13064.5	Dingelbe kleiner Thurm	1
— 72143.7	+ 57680.2	Exten	9
— 72190.3	— 31646.3	Blekenstedt	4(1.3)
— 72207.4	+ 14602.0	Adensen	1
— 72218.9	— 15442.4	Bettrum	3 (1)
— 72520.6	— 20148.7	bei der Söhlder Windmühle	3
— 72626.9	— 8966.8	Kemme	1
— 72752.2	— 10839.0	Schellerten	1
— 72840.4	+ 8997.4	Rössing	1
— 72905.5	— 16896.7	Klein Himstedt	3 (1)
— 73024.7	— 32599.2	Beddingen	3 (1)
— 73198.6	— 4226.2	Hönersum	1
— 73276.6	— 19840.1	Sehlde	1
— 73288.8	— 23308.4	Barbke	3 (1)
— 73412.7	— 17524.9	Gross Himstedt	3 (1)
— 73509.5	+ 47103.8	Segelhorst	9
— 73513.5	— 26150.2	Broistedt	3
— 73622.6	+ 58910.7	Rinteln	9
— 73683.667	+ 129245.777	*Dörenberg Centrum*	6 (5)
— 73683.735	+ 129245.868	*Dörenberg Platz 1 Junius* 1829	6 (5)
— 73683.920	+ 129245.965	*Dörenberg Platz 2 August* 1829	6 (5)
— 73706.736	+ 104419.963	Riemsloh	5
— 73811.4	— 32115.8	Sauingen	4(1.3)
— 73906.356	+ 129809.92	Dörnberg Nebenplatz	5
— 73999.8	+ 11179.7	Schulenburg	1
— 74050.2	— 1752.6	Asel	1
— 74079.0	— 6110.4	Machtsum	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 74122.9	— 36281.0	Steterburg	3
— 74290.8	+ 2584.3	Klein Giesen	1
— 74309.5	+ 1716.4	Hasede	1
— 74531.8	+ 32780.3	Münder	9
— 74544.2	+ 3330.0	Gross Giesen	1
— 74665.8	— 13855.2	Feldbergen	1
— 74984.3	— 31993.5	Ufingen	3 (1)
— 75025.8	— 24882.1	Lengde	3 (1)
— 75041.7	+ 8600.0	Barnte	1
— 75092.2	+ 50649.4	Schaumburg südl.	9
— 75103.4	+ 120233.1	Borgloh	5
— 75178.3	+ 50685.5	Schaumburg nordl.	9
— 75255.0	— 11535.5	Garmsen	1
— 75270.2	+ 53063.4	Deckbergen	9
— 75312.4	+ 93099.9	Bünde	5
— 75340.6	+ 56192.1	Steinbergen	9
— 75408.9	+ 89021.5	Kirchlehningen	5
— 75416.8	— 15522.4	Platz bei Hoheneggelsen	3
— 75417.2	— 4706.6	Borsum	1
— 75427.470	+ 50454.707	*Pagenburg*	9
— 75428.8	— 21854.8	Woltwiese	1
— 75431.0	— 1420.7	Harsum	1
— 75445.3	— 50970.1	Lucklum	4 (3)
— 75491.9	+ 2273.7	Gross Förste	1
— 75613.5	+ 26544.0	Springe	1
— 75654.5	— 15818.4	Hoheneggelsen	1
— 75928.6	+ 37830.6	Backede	9
— 75965.7	— 35812.0	Geitelde	3 (1)
— 76057.0	— 8663.2	Adlum	1
— 76187.6	+ 109702.4	Melle lutherische Kirche langer Thurm	5
— 76213.1	+ 109793.9	Melle katholische Kirche dicker Thurm	5
— 76333.0	+ 7489.8	Giften	1
— 76336.5	+ 10274.3	Jeinsen	1
— 76356.0	+ 1082.2	Klein Förste	1
— 76400.8	+ 125081.1	Kloster Oesede	5
— 76416.4	+ 16239.4	Gestorf	1
— 76487.6	— 18838.8	Steinbrück	1
— 76532.6	— 28880.8	Fallstedt	3 (1)
— 76591.4	+ 33402.2	Nettelrode	9
— 76817.2	— 52489.6	Pavillon bei Lucklum	4 (1.3)
— 76942.0	+ 5079.5	Ahrbergen	1
— 76979.0	— 6210.1	Rutenberg	1
— 77114.3	— 23977.8	Klein Lafferde	3 (1)
— 77119.2	+ 128344.5	Oesede	5
— 77199.9	+ 114167.6	Gesmold	5
— 77337.4	+ 61028.8	Luhdener Klippe Baum 1	9
— 77402.1	+ 61163.8	Luhdener Klippe Baum 2	9
— 77442.6	— 20680.3	Gross Lafferde	1
— 77495.9	+ 38437.5	Beber	9
— 77498.1	— 38360.4	Rüningen	3
— 77621.8	— 12508.5	Oedlum	1
— 77629.4	+ 131491.2	Weisser Thurm	5
— 77699.9	— 35174.0	Stidium	3 (1)
— 77818.2	— 26843.0	Boenstedt	3 (1)
— 78080.8	— 52065.0	Heinkenrode	3
— 78237.8	+ 101244.2	Westkilver	5
— 78374.7	+ 6059.1	Sarstedt	1
— 78478.377	+ 23444.173	*Deister* 1822	1
— 78519.4	+ 35493.5	Einbeckhausen	9
— 78594.4	+ 120057.5	Holte	5
— 78688.3	— 36631.0	Broizen	3 (1)
— 78737.6	+ 20872.0	Deister Glashütte	1
— 78810.5	+ 8400.7	Schliekum	1
— 78897.0	+ 18699.9	Bennigsen	1
— 78928.0	+ 45201.3	Hattendorf	9
— 78939.5	+ 50270.6	Katharinenhagen	9
— 79006.5	— 31898.1	Sonnenberg	3 (1)
— 79068.1	— 34799.2	Timmerlah	3 (1)
— 79075.6	+ 145546.5	Teklenburg	5
— 79354.0	+ 5113.8	Kiphut	1
— 79388.5	— 7926.3	Sosmar	1
— 79402.1	+ 188264.2	Ochtrup	5
— 79471.5	+ 14310.3	Hüpeden	1
— 79525.6	— 11756.4	Bierbergen	1
— 79600.0	— 26916.1	Liedingen	3 (1)
— 79724.4	— 18939.4	Gadenstedt	3 (1)
— 79963.2	+ 7359.7	Ruthe	1
— 79993.584	+ 29649.753	*Deister* 1833	9
— 80024.9	+ 89777.5	Quernheim	5
— 80042.7	— 59652.8	Königslutter Schloss	7
— 80080.3	— 5621.0	Clauen	1
— 80083.2	— 59506.0	Königslutter 1827	3
— 80338.3	— 48418.2	Kremling	3
— 80357.482	+ 71876.003	*Wittekindstein*	9
— 80360.0	+ 71875.0	*Wittekindstein* 1829	5
— 80405.7	— 53445.6	Appenrode	4 (3)
— 80415.0	— 1392.6	Klein Algermissen	1
— 80431.6	— 6510.3	Windmühle bei Clauen Platz 1	1
— 80479.4	+ 39776.1	Hülsede	9
— 80577.8	— 15195.8	Adenstedt	1
— 80637.5	— 1956.1	Algermissen	1
— 80664.547	+ 18507.396	Lüdersen	1
— 80750.7	— 21069.1	Obergen	1
— 80865.6	— 19680.2	Galgenberg	3
— 80937.4	— 32015.3	Denstorf	1
— 80950.1	— 7668.9	Platz 2 bei Hohenhameln	1
— 80986.3	+ 2472.9	Hotteln	1
— 81012.2	— 22595.6	Münstedt	3 (1)
— 81083.9	+ 6292.4	Heisede	1
— 81121.3	+ 105180.1	Buer	5
— 81158.3	— 8221.1	Hohenhameln	1
— 81304.9	— 26382.0	Betmar	1
— 81514.5	— 39768.2	Braunschweig Aegidius	1
— 81586.7	— 29565.3	Vechelde schwarzer Thurm	1
— 81595.9	— 39052.6	Braunschweig Michaelis	3
— 81636.3	— 29831.0	Vechelde Laternenthurm	1
— 81647.4	— 18219.3	Oelsburg	3

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 81803.1	+ 60752.0	Bückeburg	9
— 81812.0	— 39145.0	Braunschweig Martini 1	1
— 81824.8	— 39143.0	Braunschweig Martini 2	1
— 81825.4	+ 12533.0	Pattensen	1
— 81832.8	+ 100040.9	Rödingshausen	5
— 81851.4	— 26840.6	Gross Bülten	3
— 81870.8	— 21510.1	Lohberg	3
— 81919.0	+ 21111.8	Potholtensen	1
— 81938.1	— 18039.3	Gerstenfeld bei Oelsburg	3
— 82076.3	— 18849.0	Gross Ilsede	3
— 82211.9	— 15671.1	Haskamp	3
— 82215.981	— 39117.112	Braunschweig Petrus	1
— 82381.0	— 7328.8	Harber	1
— 82417.632	— 39390.457	Braunschweig Andreas	1
— 82496.9	+ 7053.5	Gleidingen	1
— 82535.5	— 11497.1	Stedum	3
— 82546.0	— 13556.5	Klein Solschen	3
— 82554.6	— 28639.3	Wahle	1
— 82595.9	— 14369.2	Gross Solschen	1
— 82597.1	— 36956.1	Lehndorf	1
— 82615.339	+ 99921.177	*Nonnenstein*	6 (5)
— 82621.8	— 4869.0	Gross Lopke	1
— 82626.0	+ 1181.3	Bledelem	1
— 82730.6	+ 175586.4	Neuenkirchen	5
— 82746.4	— 554.5	Lühnde	1
— 82750.3	— 33919.6	Lamme	1
— 82786.3	— 26685.2	Sierse	3 (1)
— 82793.8	+ 55670.0	Obernkirchen	9
— 82944.2	+ 79792.3	Bergkirchen	5
— 82985.2	— 32038.9	Weddenstedt	3 (1)
— 83017.4	+ 25179.6	Wennigsen	2
— 83186.7	— 23525.9	Schmedenstedt	1
— 83246.4	— 17457.4	Klein Bülten	3
— 83393.4	+ 2002.9	Platz bei Ingeln	1
— 83521.1	— 20103.4	Vossberg	3
— 83632.7	+ 3991.8	Oesselse	1
— 83649.6	+ 15744.6	Hiddesdorf	1
— 83830.6	— 2231.0	Ummeln	1
— 84179.9	— 19476.6	Klein Ilsede	3
— 84238.9	+ 129108.8	Osnabrück Johannis	5
— 84552.3	+ 129709.0	Osnabrück Katharinen	5
— 84625.2	+ 1005.7	Wehminger Berg	1
— 84729.7	+ 54059.9	Sülbeck	9
— 84771.8	+ 90602.2	Wurzelbrink	5
— 84861.9	+ 138359.0	Lotte	5
— 85026.4	+ 129567.5	Osnabrück Dom	5
— 85044.4	+ 2367.6	Müllingen	1
— 85048.1	— 11756.5	Equord	1
— 85067.2	+ 129758.2	Osnabrück Mariae	5
— 85153.3	— 18280.8	Handorf	3
— 85193.0	+ 116045.6	Schledehausen	6
— 85201.8	— 287.9	Bolzum	1
— 85303.7	— 31488.8	Bortfeld	1
— 85421.6	+ 161316.8	Bevergen	5
— 85503.8	— 22421.1	Dungelbeck	1
— 85525.1	+ 70103.9	Minden	5
— 85564.5	+ 556.7	Wehmingen	1
— 85567.9	+ 1777.3	Wirringen	1
— 85621.5	+ 144720.3	Schorstein einer Dampfmaschine	5
— 85687.0	+ 129343.8	Gertrudenberg	5
— 85880.6	+ 9721.0	Grasdorf	2
— 85962.8	— 15524.2	Rosenthal	1
— 86036.960	— 264506.541	Colberg	1
— 86289.0	— 10338.8	Mehrum	1
— 86457.3	— 25306.1	Woltorf	1
— 86488.8	+ 170928.6	Rheina	5
— 86564.7	— 7114.4	Haimar	1
— 86794.2	— 14401.6	Schwichelde	3 (1)
— 86842.6	+ 90366.3	Lübke	5
— 87015.4	— 1583.3	Sehnde	1
— 87078.8	+ 183693.5	Ohne	5
— 87124.5	+ 93829.7	Blasheim	5
— 87322.8	+ 12504.0	Wilkenburg	1
— 87342.4	— 4116.2	Rethmar	1
— 87354.1	+ 23312.7	Gehrden	1
— 87374.0	+ 39911.0	Rodenberg	9
— 87519.4	+ 122985.4	Bellm lutherische Kirche	6
— 87558.4	+ 10757.3	Latzen	1
— 87636.3	+ 122963.0	Bellm katholische Kirche	6
— 87763.5	+ 103055.1	Lintorf	5
— 87808.9	+ 19509.2	Rönneberg	1
— 87920.9	+ 775.4	Wassel	1
— 87974.4	— 7335.4	Dolgen	1
— 88208.7	— 47086.3	Wendhausen	3
— 88319.0	— 11995.3	Buchholz	3
— 88324.2	— 19387.3	Peine lutherische Kirche	1
— 88335.6	+ 115538.9	Osheide	6
— 88401.2	+ 117923.9	Wulfter Berg	6
— 88438.3	— 19316.8	Peine Rathhaus	3
— 88587.5	— 19035.8	Peine katholische Kirche	3
— 88684.7	— 14146.7	Dickensberg	3
— 88701.6	+ 50209.35	Stadthagen Kirchthurm	9
— 88763.229	+ 193445.746	Gildehaus	5
— 88944.9	— 30816.2	Wendeburg	3
— 88994.9	+ 50365.2	Stadthagen Stadtmauer niedriger Thurm	9
— 89015.8	+ 50408.6	Stadthagen Stadtmauer höherer Thurm	9
— 89033.5	+ 17105.6	Wetbergen	1
— 89156.2	+ 6431.9	Wulferode	1
— 89285.0	+ 109381.8	Essen	5
— 89322.2	+ 136471.6	Werse	5
— 89329.0	+ 106969.1	Witlage	5
— 89371.6	— 22803.5	Essinghausen	3
— 89459.7	+ 140914.9	Westercappeln	5

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 89560.728	+ 131365.875	*Piesberg Pfahl*	5
— 89560.758	+ 131366.444	Piesberg Theodolithplatz	5
— 89573.9	+ 189980.8	Bentheim Kirche	5
— 89583.9	— 25303.0	Platz bei Meerdorf	3
— 89734.722	+ 190107.058	Bentheim südlicher Schlossthurm	6 (5)
— 89755.454	+ 190018.902	Bentheim Theodolithplatz 2	6 (5)
— 89755.621	+ 190021.633	Bentheim Theodolithplatz 3	6 (5)
— 89758.066	+ 190025.198	*Bentheim Signal Centrum*	6 (5)
— 89763.306	+ 190019.671	Bentheim Theodolithplatz 1	6 (5)
— 89811.6	+ 189988.9	Bentheim nordlicher Schlossthurm	6 (5)
— 89839.9	— 19418.3	Herzberg	3
— 89907.5	+ 38565.3	Nenndorf	9
— 90033.3	— 6732.5	Leyerberg	3
— 90476.4	+ 112820.6	Stirperberg	6
— 90570.0	— 16536.4	Vöhrum	3
— 90719.5	— 21797.9	Platz bei der Stedderdorfer Windmühle	3
— 90751.9	+ 54131.5	Meerbeck	9
— 90770.5	— 11833.9	Springberg	3
— 90834.6	+ 94445.1	Alswedo	5
— 90854.3	— 24139.6	Duddenstedt	1
— 90917.3	+ 939.4	Ilten	1
— 90952.8	— 18646.9	Zwergberg	3
— 91051.3	— 28114.2	Rieper	3
— 91194.8	— 25638.5	Meerdorf	1
— 91211.7	+ 6027.7	Kronsberg Platz 1	1
— 91354.7	— 20878.4	Stedderdorf	1
— 91375.9	— 28149.6	Rieperberg	3
— 91426.2	+ 3339.5	Höver	1
— 91493.725	+ 205560.580	Oldenzaal	5
— 91497.1	+ 128772.0	Kloster Rulle niedriger Thurm	6
— 91508.2	+ 128779.6	Kloster Rulle	5
— 91610.2	+ 176906.5	Salzbergen	5
— 91690.9	+ 185452.3	Schüttorf	5
— 91789.2	— 33477.2	Gross Schwülper	3
— 92129.800	— 216004.904	Eichberg	1
— 92192.7	+ 117077.0	Ostercappeln	5
— 92367.3	+ 7938.8	Kirchrode	1
— 92401.7	+ 166096.0	Dreierwolde	5
— 92684.430	+ 117034.929	bei der Capelle Theodolithplatz 1829	5 (6)
— 92713.7	+ 117196.2	Capelle bei Ostercappeln	5
— 92792.6	+ 2272.4	Ahlten	1
— 92877.0	+ 44892.1	Lindhorst	9
— 93159.9	+ 131350.6	Wallenhorst Capelle	6
— 93255.9	+ 14658.0	Waterloosäule	11
— 93393.9	+ 25593.3	Kirchwehren	1
— 93577.384	+ 13880.010	Hannover Aegidius	1(11)
— 93657.5	— 2691.4	Lehrte	1
— 93670.2	+ 120495.3	Dribauser Berg	6
— 93762.8	+ 131269.9	Wallenhorst Kirche	6
— 93770.025	+ 14616.897	Hannover Neustädter Thurm	1
— 93783.9	+ 38874.1	Hohenhorst	9
— 93838.358	+ 14154.248	Hannover Marktthurm	1
— 93898.7	+ 121129.9	Vennerberg	6
— 94018.633	+ 14332.268	Hannover Kreuzthurm	1
— 94120.8	— 12790.4	Sievershausen	3
— 94207.7	+ 134923.0	Weisse Windmühle	6
— 94296.4	— 36718.9	Rethen	3
— 94571.2	— 16069.7	Abbensen Thurm am Wohnhause	3
— 94595.3	+ 111022.8	Bohmte	5
— 94597.4	— 16141.5	Abbensen Taubenhaus	3
— 94622.2	— 16075.8	Abbensen Thurm mit Glocke	3
— 94734.9	— 34536.1	Adenbüttel	3
— 94952.9	— 16228.5	Abbensen Dorfthurm	3
— 95053.5	— 40950.4	Meine	3
— 95122.8	— 32089.9	Katzberg	3
— 95163.7	+ 101402.6	Levern	5
— 95325.2	— 10703.8	Arpke	3
— 95422.9	+ 56073.5	Wiedensahl	9
— 95438.3	— 15651.4	Oehlerse	3
— 95460.3	— 5673.3	Immenser Berg	3
— 95548.8	— 21728.5	Edemissen	1
— 95671.7	+ 129586.2	Lange Egge I	6
— 95776.6	+ 151488.3	Reeke stumpfer Thurm	5
— 95866.8	+ 130369.2	Lange Egge II	6
— 95922.7	+ 151559.6	Reeke spitzer Thurm	5
— 96115.9	— 13753.8	Flietsheide	3
— 96230.6	+ 131346.2	Lange Egge III	6
— 96357.4	— 8225.2	Immensen	3
— 96454.2	— 18057.7	Viesenberg Platz 1	3
— 96486.7	+ 46075.7	Sachsenhagen Schloss	9
— 96572.5	— 12228.2	Einzelne Eiche	3
— 96668.3	— 18005.6	Viesenberg Platz 2	3
— 96669.0	— 17989.2	Viesenberg Platz 3	3
— 96744.0	+ 23593.5	Seelze	1
— 96753.2	+ 46136.9	Sachsenhagen Kirche	9
— 96818.7	+ 120838.5	Venne	6
— 97173.8	+ 128066.4	Engter	5
— 97660.1	— 16530.8	Dolbergen	3
— 97665.0	+ 159219.1	Hopsten	5
— 97870.6	— 2911.6	Steinwedel	1
— 98062.3	+ 124221.4	Kalkrieserberg	6
— 98222.0	— 200023.2	Denenkamp	5
— 98425.7	+ 9814.5	Bothfeld	1
— 98437.8	— 31192.1	Hillerse	3
— 98583.0	— 50666.8	Sülfeld	7
— 98620.8	— 19098.7	Eddesse	3
— 98624.3	+ 46562.2	Bergkirchen Thurm 1838	11
— 98626.2	+ 46562.4	Bergkirchen Thurm 1833	9

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 99062.546	+ 47441.676	*Bergkirchen Signal*	9
— 99127.7	+ 46129.0	?	1
— 99166.3	— 39800.9	Rötgersbüttel	7
— 99203.760	— 52682.662	Fallersleben	7
— 99272.1	+ 63557.7	Windheim	9
— 99336.399	+ 39355.304	Tienberg	9
— 99656.6	+162281.3	Schapen katholische Kirche	5
— 99660.1	+133576.0	Bramsche	5
— 99998.7	+ 34951.7	Wunstorf Markt-thurm	11
—100048.3	+ 34811.0	Wunstorf Stift 1833	9
—100048.5	+ 34812.4	Wunstorf Stift 1838	11 (1)
—100351.4	+ 29672.6	Ricklingen	1
—100464.0	+192185.1	Brandlecht	5
—100618.4	— 38484.4	Ribbesbüttel	7
—100725.3	+162716.4	Schapen reformirte Kirche	5
—101006.6	+123681.4	Barenau	6
—101202.8	— 43147.3	Isenbüttel	7
—101343.6	+143187.8	Neuenkirchen im Hülsen	5
—101351.8	— 33666.8	Leiferde	3
—101384.6	+ 40669.5	Altenhagen	9
—101450.4	— 490.5	Moormühle	11
—101480.6	+ 90408.0	Rahden	5
—101678.5	— 58253.3	Wolfsburg	7
—101738.8	+ 27639.0	Horst	11
—101954.2	+ 2978.1	Kirchhorst	1
—102104.6	— 4332.3	Burgdorf	1
—102166.2	+207252.6	Otmarsum	5
—102212.7	+ 19578.6	Engelbostel	11 (1)
—102255.3	+ 13763.9	Langenhagen	1
—102492.4	+113348.0	Hunteburg stumpfer Thurm	5
—102582.8	+149435.1	Voltlage	5
—102714.0	+113399.3	Hunteburg spitzer Thurm	5
—102753.219	— 31555.355	WolenbergPostament	7
—102753.813	— 31556.860	Wolenberg Signal	7
—102905.0	+108592.0	Dielingen	5
—103064.8	+ 53850.25	Loccum	9 (5)
—103398.3	— 5274.8	Windmühle bei Sorgensen	11
—103557.4	+130591.7	Malgarten	5
—103611.0	+113231.8	Streithorst	5
—103663.5	+ 24623.0	Osterwald	11
—103699.4	+ 8605.2	Isernhagen	11 (1)
—103803.9	+166240.6	Beesten	5
—103865.3	+ 74367.9	Warmsen	5
—104219.7	— 17797.0	Ütze	11 (1)
—104378.5	+140567.9	Uffeln	5
—104479.2	+ 69998.1	Jenhorst Pfahl	5
—105070.3	+195226.0	Nordhorn	5
—105174.0	+ 3839.7	Windmühle	11
—105525.0	+ 48535.9	Rehburg	9 (5)
—105604.9	— 27591.3	Meinersen Th. C.	7 (1)
—105685.7	+106390.9	Lemförde	5
—105773.5	+126636.7	Bernhardshöhe	6

+ südlich	+ westlich		Nr.
—106282.5	+ 70773.9	Uchterhöfen Pfahl	5
—106335.1	+175209.6	Bramsche bei Freren	5
—106517.9	+125871.9	Vörden Windmühle	6
—106620.6	+ 71759.2	Helsinghausen Pfahl	5
—106929.212	—234192.162	Mariendorf	1
—106956.534	— 40946.784	Gifhorn Kirchthurm Centrum	7
—107044.0	+197350.3	Frenswegen	5
—107079.1	— 41091.9	Gifhorn Schlossthurm	7
—107147.6	+ 5943.9	Burgwedel	11 (1)
—107211.3	+125571.1	Vörden Thurm	6(5?)
—107346.6	+168606.0	Messingen	5
—107384.3	— 24703.2	Paese	7 (3)
—107575.0	+143528.2	Merzen	5
—108425.9	+ 70005.7	Uchter Lohmühle	5
—108641.3	+ 64996.5	Nenndorf	5
—108666.4	+ 32689.2	Neustadt am Rübenberge 1838	11 (1)
—108667.3	+ 32687.5	Neustadt am Rübenberge 1833	9
—108981.6	+ 56320.3	Leese	5
—109129.937	+ 639.143	*Osterberg*	11
—109281.9	+ 1419.5	Wetmar	11
—109406.9	+162971.8	Freren	5
—109488.0	+130175.8	Lage kleiner Thurm 1830	6
—109488.0	+130153.4	Lage 1829	5
—109583.8	— 563.5	Windmühle	11
—109658.6	+ 59114.8	Stolzenau	9 (5)
—109868.1	+ 1267.6	Windmühle bei Wetmar	11
—109966.5	+135172.2	Alfhausen	5
—109980.4	+ 70149.0	Richteberg	5
—110141.0	+106188.5	Burlage	5
—110253.6	— 28958.4	Diekhorst	7
—110778.3	+ 12605.7	Bissendorf	11(1?)
—110788.347	+125065.975	*Pavillon bei Neuenkirchen Theodolith*	5
—110790.531	+125062.329	Pavillon Centrum	5
—110936.1	+166534.3	Thuine	5
—110950.9	+127330.1	Neuenkirchen bei Vörden	5
—111020.199	— 56285.434	Barwede Postament	7
—111021.385	— 56285.345	Barwede Signal	7
—111023.7	— 28207.8	Müden	7
—111397.0	+ 78122.2	Eikloh Pfahl	5
—111666.5	+ 78793.6	Eikloh Baum-Bräutigam	5
—111870.8	+118455.6	Damme	5
—111987.0	+207468.6	Ülsen	5
—112069.6	+202119.3	Neuenhaus	5
—112271.8	+ 69441.2	Holloh bei Mensinghausen Pfahl	5
—112289.2	+154098.0	Fürstenau	5
—112459.9	+179737.3	Schepsdorf	5
—112526.435	+ 15232.945	*Nebenplatz* 1838	11
—112875.0	+ 79503.0	Hesploh Birke	5
—112944.089	+165495.831	*Windmühlenberg Signal*	5

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 112944.658	+ 165497.349	*Windmühlenberg Theodolithplatz*	5
— 113202.8	+ 14277.4	Mellendorf	11
— 113371.593	+ 72293.738	Rauhbuschberg	5
— 113697.2	+ 200133.9	Velthausen	5
— 113738.3	+ 190625.1	Wietmarschen	5
— 113758.1	+ 29750.8	Basse	11 (1?)
— 113844.2	+ 178279.1	Lingen Rathhaus	5
— 113896.884	+ 14817.4	*Kakelberg*	11
— 113953.1	+ 178321.0	Lingen lutherische Kirche	5
— 114112.108	+ 37726.256	*Eckberg*	11
— 114187.5	+ 17719.4	Brelingen	11 (1?)
— 114422.0	— 23437.1	Langlingen	7
— 114471.910	— 234565.453	Berlin Jerusalemskirche	1
— 114573.8	+ 92176.4	Wagenfeld	5
— 114710.274	+ 148300.732	*Quekenberg Standpunkt*	6 (5)
— 114710.411	+ 148300.682	*Quekenberg Signal Centrum*	6 (5)
— 114734.3	+ 30933.7	Mariensee	11 (1)
— 114774.280	— 137851.779	Tangermünde	1
— 114870.1	+ 140665.7	Ancum	5
— 114958.2	+ 77001.8	Stelloh bei Holthusen	5
— 114972.020	+ 39208.036	*Heimberg*	9
— 114993.0	+ 55863.0	Landesbergen	5
— 115363.335	+ 117156.496	*Mordkuhlenberg Signal*	6 (5)
— 115363.486	+ 117156.525	*Mordkuhlenberg Standpunkt*	6 (5)
— 115384.4	+ 69641.2	Woltringhausen	5
— 115709.8	+ 46866.2	Husum	9
— 115788.555	— 234068.597	Berlin Sternwarte (alte)	1
— 116012.317	— 235099.772	Berlin Marienthurm	1
— 116093.9	+ 135147.9	Berssenbrück	5
— 116165.4	+ 148860.4	Steinberg	6
— 116248.1	+ 61415.6	Steierberg	5
— 116274.663	+ 17860.071	*Brelingerberg*	11 (1)
— 116299.3	+ 73054.7	Kuppendorfer Windmühle	5
— 116759.7	+ 163445.5	Lengerich	5
— 117084.074	— 16442.932	Wienhausen	1
— 117243.1	+ 78712.2	Allerhoop	5
— 117302.184	+ 73520.620	*Knickberg*	6(5.9)
— 117350.668	— 221325.375	Spandau	1
— 117860.3	+ 24295.2	Helstorf	11
— 118100.286	+ 94291.582	*Quellenberg Standpunkt*	5
— 118100.868	+ 94291.879	*Quellenberg Stange*	5
— 118225.6	— 29027.0	Hohne	7
— 118338.5	+ 54390.6	Eistorf	5
— 118438.6	+ 131259.0	Gehrde	5
— 118975.9	— 91853.1	Zichtow Signal	7
— 119128.9	+ 117004.3	Steinfeld	5
— 119260.438	+ 25180.496	Mandelsloh	11 (1)
— 119335.9	— 5685.5	Anderten's Hof	11
— 119422.5	+ 149468.3	Bippen	6
— 119462.0	+ 75173.1	Kirchdorf	5
— 119785.5	+ 57340.1	Liebenau	5
— 120088.8	+ 76790.4	Hollenberg	5
— 120451.184	+ 63256.754	Heidenberg	5
— 120809.4	+ 106406.6	Diepholz Schlossthurm	5
— 120952.7	+ 106484.9	Diepholz Laternenthurm	5
— 121643.4	+ 54685.5	Bünnen	5
— 121672.3	— 42142.2	Wahrenholz Windmühle	7
— 121842.246	— 9118.245	Celle Schloss, südwestliche Kuppel	11 (1)
— 121853.269	— 9165.563	Celle Schloss, südöstlicher Pavillon	11
— 121866.539	— 9114.015	Celle Schloss, Uhrthurm Spitze	11 (1)
— 121866.604	— 9114.015	Celle Schloss, Uhrthurm Theodolithplatz	11
— 121888.346	— 9101.063	Celle Schloss, nordöstliche Kuppel	11 (1)
— 121931.288	— 9338.799	*Celle Stadtkirche Spitze*	11 (1)
— 121931.352	— 9338.549	*Celle Stadtkirche Theodolithplatz*	11
— 122056.953	+ 46754.342	*Osterberg*	9
— 122078.4	+ 106494.8	Diepholz Capelle	5
— 122169.3	+ 77470.2	Barenburg	5
— 122213.5	+ 171338.7	Bawinkel	5
— 122252.7	+ 82040.4	Varrel	5
— 122452.576	— 9363.002	Celle Garnisonkirche, südl. Giebelkreuz	11
— 122556.576	— 9106.274	vor Celle, Nebenplatz bei BierwirthsGart.	11
— 123486.1	— 35602.8	Meilenstein	7
— 123768.4	+ 49854.1	Nienburg Kirche	9
— 123769.8	+ 49930.9	Nienburg Rathhaus	9
— 123872.0	+ 148960.8	Bergen	5
— 123920.531	+ 24709.702	Stöcken	11
— 124122.1	— 35394.9	bei Gross Oesingen Standpunkt 2	7
— 124338.5	— 35798.1	bei Gross Oesingen Standpunkt 1	7
— 124543.320	— 35373.452	Gross Oesingen	7
— 124752.258	+ 132781.895	Badbergen	5
— 125440.866	+ 183267.112	*Kirchhesepe Standpunkt 2*	6 (5)
— 125441.463	+ 183265.532	*Kirchhesepe Standpunkt 1*	6 (5)
— 125441.942	+ 183265.833	*Kirchhesepe Centrum*	6 (5)
— 125612.2	+ 151156.2	Kreuzberg	6
— 125703.0	+ 37431.8	Steimke	11
— 125867.420	— 13888.769	*Garssen*	1
— 125937.4	+ 102721.1	Jacobi Drebber	5
— 126372.9	+ 103583.2	Marien Drebber	5
— 127098.552	+ 195226.376	Twist	5
— 127311.0	+ 53251.1	Loh	9
— 127382.4	+ 65744.4	Börstel	5

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 127527.9	+ 123102.8	Dinklage	5
— 127862.5	+ 115390.8	Lohne	5
— 127886.8	+ 48387.5	Holtorf	9
— 128072.979	+ 22156.433	Schwarmstedt	11
— 128078.6	+ 28439.9	Süderbruch	11
— 128135.0	+ 2493.4	Winsen	11 (1)
— 128258.6	— 51494.0	Knesebeck Kirche	7
— 128417.5	— 51666.6	Knesebeck Amthaus	7
— 128980.2	+ 77257.8	Sulingen	5
— 129050.9	+ 49462.6	Drakenburg	9
— 129501.2	+ 134280.1	Quackenbrück katholische Kirche	5
— 129661.5	+ 134435.0	Quackenbrück grosser Thurm	5
— 129720.4	— 43737.3	Oerrel	7
— 129770.4	+ 143796.4	Menslage	5
— 130116.7	+ 23248.9	Bothmer	11
— 130120.7	+ 166212.7	Haselünne	5
— 130451.3	— 58528.0	Ohrdorf	7
— 130909.840	+ 25089.202	Gilten	11
— 131397.6	+ 76666.8	Sulinger Windmühle	5
— 131597.5	+ 70706.7	Mellinghausen	5
— 132435.3	+ 179253.3	Meppen Pfarrkirche	5
— 132604.4	+ 97312.2	Barnstorf	5
— 132622.0	+ 179154.5	Meppen Residenzkirche	5
— 132638.2	+ 51158.4	Balge	9
— 133050.4	+ 175527.1	Bokeloh	5
— 133168.0	— 43050.1	Nebenplatz bei Hankensbüttel	7
— 133210.7	+ 65071.2	Staffhorst	5
— 133361.111	— 43253.191	*Hankensbüttel Postament*	7
— 133362.067	— 43250.955	Hankensbüttel Signal, von Norden her bestimmt	7
— 133362.197	— 43152.547	Hankensbüttel Signal, von Süden her bestimmt	7
— 133392.348	— 21418.103	*Scharnhorst*	1
— 133417.9	— 45711.2	Isenhagen	7
— 133531.7	— 44087.7	Hankensbüttel Nebenplatz 2	7
— 133809.5	— 53913.8	Wittingen	7
— 134002.5	— 20105.7	Eschede	1
— 134009.5	— 44575.6	HankensbüttelThurm	7
— 134143.5	+ 135340.7	Essen	5
— 134237.4	— 51296.0	Darrigsdorf	7
— 134562.7	+ 111861.7	Vechta Franciskanerkirche	5
— 134654.4	+ 111995.9	Vechta Pfarrkirche	5
— 135103.7	+ 75072.9	Schwaförden	5
— 135521.4	+ 79406.6	Scholen	5
— 135594.2	— 87863.9	Winterfeld	7
— 135791.5	+ 84234.0	Schmalförden	5
— 136070.8	+ 110090.6	Oyte	5
— 136140.4	— 43894.9	Platz bei Wittendorf	7
— 136234.0	+ 147503.7	Löningen	5
— 136603.0	— 63040.0	Diesdorf	7
— 136653.613	+ 5682.298	Hingstberg	11
— 136749.2	+ 23814.3	Hudemühlen	11
— 137062.062	+ 26133.232	Ahlden	11
— 137124.2	— 92783.1	Zierau	7
— 137743.9	— 91493.6	Jeggeleben	7
— 137821.1	— 37030.6	Sprakensehl	7
— 138455.3	— 97085.1	Kleiner Laternenthurm (Luge?)	7
— 138674.292	+ 63178.094	*Asendorf, Standpunkt*	6 (5)
— 138674.919	+ 63178.041	*Asendorf Centrum*	6(1.5)
— 138745.1	+ 14940.3	Ostenholz	11
— 139008.0	+ 49637.8	Eistrup	9
— 139127.1	+ 94008.9	Heiligenloh	5
— 139169.6	+ 82568.5	Goddern	5
— 139288.4	+ 80585.1	Neuenkirchen	5
— 139538.230	+ 54838.901	Bücken	5 (1)
— 139631.194	+ 35777.254	Kirchwahlingen	11
— 140097.4	+ 37734.2	Rethem	11
— 140099.4	+ 184110.6	Wesuwe	6 (5)
— 140581.9	+ 85860.3	Hünenburg	5
— 140883.1	+ 80247.9	Spradau	5
— 141030.9	— 94266.0	Ladekathe	7
— 141150.5	+ 113921.0	Langfarden	5
— 141179.6	+ 166337.7	Berssen Windmühle	5
— 141371.5	+ 79302.4	Nienstedt	5
— 141579.6	+ 74287.3	Südwalde	5
— 141758.3	+ 11938.4	Hambergbaum	11
— 141799.8	— 97503.5	Callehne	7
— 142250.951	+ 87900.139	*Twistringen Standpunkt*	6 (5)
— 142251.446	+ 87900.521	*Twistringen Centrum*	6(1.5)
— 142357.7	+ 84411.9	Stelle	5
— 142478.4	— 1315.1	Bergen	11 (1)
— 142613.827	+ 18675.853	*Hingstberg* 2	11
— 142706.2	— 105830.3	Kleinau	7
— 142917.8	— 48974.7	Lüder	7
— 142958.4	+ 140203.3	Lastrup	5
— 143156.4	+ 76410.2	Halstedt	5
— 143265.4	— 77260.7	Everdorf	7
— 143795.2	+ 79320.0	Waldheide	5
— 143807.3	— 60641.2	Bonsee	7
— 143891.2	+ 80758.3	Apelstedt	5
— 144424.386	+ 18945.766	Nebenplatz bei Bockhorn	11
— 144611.129	— 21548.543	*Breithorn*	1
— 144632.316	+ 30452.982	Kirchboizen	11
— 144703.8	+ 83724.1	Klüvenhausen	5
— 144857.8	— 92652.4	Klein Garz	7
— 144879.110	+ 169311.034	Höhe bei Stavern Theodolithplatz	5
— 144883.0	+ 21046.4	Düshorn	11
— 145283.5	— 83212.1	Krichelsdorf	7
— 145332.2	+ 86061.3	Gross Ringmer	5
— 145344.5	— 49740.4	Bodenteich	7
— 145528.8	— 97756.9	Schernikau	7
— 145961.9	— 71875.1	Osterwohle	7
— 146621.040	+ 5142.567	*Falkenberg Postament* 1821. 1824	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 146621.055	+ 5142.634	Falkenberg Theodolithplatz von 1838	11
— 146621.421	+ 5141.523	Falkenberg Signal von 1838	11
— 146633.3	+ 84126.3	Hafte	5
— 146706.1	+ 55229.2	Wechold	1
— 146795.5	+ 110046.3	Visbeck	5
— 147170.3	+ 82144.8	Bassum	5
— 147226.7	— 113724.4	Bretsche	7
— 147248.0	+ 78395.6	Osterbinde	5
— 147616.9	+ 88544.9	Klein Ringmer	5
— 147657.9	— 81255.2	Salzwedel Marienthurm	7
— 147723.0	— 81423.4	Salzwedel Altstädter Thurm	7
— 147737.1	+ 79242.9	Karrenbrock	5
— 147893.3	— 81553.7	Salzwodel Rathhaus	7
— 147940.521	+ 128491.392	Krapendorf	6 (5)
— 148006.374	— 16239.866	*Hausselberg*	1
— 148039.910	— 58241.686	Puglatz Signal	7
— 148054.6	— 81577.2	Salzwedel Mönchsthurm	7
— 148305.1	+ 23350.4	Walsrode	11
— 148350.5	— 81697.2	Salzwedel Neustadt	7
— 148418.6	— 86820.8	Gross Chüden	7
— 148661.0	— 89731.0	Riebau	7
— 148667.0	— 44235.6	Steinberg	7
— 148689.2	+ 145591.0	Lindern	5
— 148774.5	+ 163222.4	Sögel Thurm	6 (5)
— 149153.5	+ 85003.5	Gross Henstedt	5
— 149270.4	+ 81854.8	Chausséehaus Schornstein	5
— 149287.153	— 46456.701	*Wieren Signal*	7
— 149298.6	+ 4863.9	Erhöheter Baum im Becklinger Holz	1
— 149868.4	+ 54132.9	Eizendorf	1
— 149888.0	+ 163268.7	Sögel Windmühle	5
— 149942.1	— 109714.1	Leppin	7
— 149994.0	+ 52007.2	Magelsen	1
— 150002.0	+ 136138.0	Mollbergen	5
— 150075.6	+ 82077.5	Hassel	5
— 150184.6	+ 58949.2	Mattfeld	1
— 150244.0	— 94546.5	Mechau	7
— 150365.580	— 36550.624	Holzerberg Signal	7
— 150366.695	— 36550.632	Holzerberg Postament	7
— 150567.1	— 75728.1	Cheine	7
— 150663.6	— 43170.1	Nettelkamp	7
— 150829.3	+ 72072.6	Heiligenfelde	5 (1)
— 151122.8	— 48047.8	Wieren Thurm	7
— 151514.8	— 97572.0	Kaulitz	7
— 151583.4	+ 177183.0	Lathen Thurm	5
— 151598.0	— 103361.1	Arendsee Ruine	7
— 151608.4	— 103285.1	Arendsee (abg. Th.)	7
— 151806.0	— 103333.7	Arendsee stumpfer Thurm	7
— 151997.4	— 34286.2	Suderburg	7
— 152014.4	+ 175885.6	Lathen Windmühle	5
— 152019.9	— 68345.2	Bergen	7
— 152120.7	— 64019.0	Schnega kleiner Laternenthurm	7
— 152137.5	— 63940.7	Schnega Kirchthurm	7
— 152971.4	— 42221.1	Wrestedt	7
— 153023.0	— 121879.0	Seehausen	7
— 153045.029	+ 162445.515	*Windberg* 1830	6 (5)
— 153182.0	— 33859.3	bei Suderburg	7
— 153182.2	+ 146170.3	Vrees	6
— 153246.5	— 91732.4	Prezier	7
— 153630.2	+ 81986.5	Stuhren	5
— 153786.5	— 90111.8	Hohekirche	7
— 153792.7	+ 193070.4	Ter Apel	6
— 153809.5	+ 81259.8	Nordwohlde	5
— 153933.0	— 48756.7	Emern	7
— 154619.9	— 3725.3	Wiezendorf	1
— 154643.1	— 38736.7	Holdenstedt	7
— 154729.249	+ 48060.476	Verden Dom	1
— 155251.3	— 93572.8	Schmarsau	7
— 155352.245	+ 48081.208	Verden Johannis	1
— 155779.6	— 84957.3	Rebensdorf	7
— 155861.301	— 64312.030	Starrel Signal	7
— 155886.5	— 55638.5	Suhlenburg	7
— 155886.832	+ 54287.893	Blender	1
— 156016.2	— 79192.2	Wustrow	7
— 156293.6	— 72744.5	Bühlitz	7
— 156371.9	— 74373.7	Luckau	7
— 156769.3	— 68039.3	Clenze	7
— 157842.5	— 68848.7	Büssauer Berg	7
— 157849.9	+ 154836.3	Lorup	6
— 157911.4	— 87935.2	bei Lichtenberg	7
— 157950.2	— 41887.1	Königsberg	7
— 157956.9	— 83784.4	Bösel	7
— 158152.2	— 71933.3	Zeetze	7
— 158177.3	— 64888.7	Klamitzberg	7
— 158532.4	— 86746.9	Woltersdorf	7
— 158590.5	+ 177559.7	Steinbild	6 (5)
— 158592.2	— 97830.9	Lohmitz	7
— 158679.057	— 88083.451	Thürow Postament	7
— 158679.355	— 88086.373	Thürow Signal	7
— 158946.0	+ 54120.0	Intschede	1
— 158996.9	— 40304.0	Veerssen	7
— 159173.4	— 44515.4	Gross Liedern	7
— 159188.5	— 48704.5	Hanstedt	7
— 159365.3	— 77426.7	Satemin	7
— 159397.3	— 70206.6	Büssau	7
— 159757.3	— 75508.7	Meuchefitz	7
— 159975.7	— 41413.6	Uelzen	7
— 160072.9	— 93521.4	Lanze	7
— 160215.7	— 31969.9	Gerdau	7
— 160535.3	— 98094.0	Prezelle	7
— 160568.6	+ 60149.8	Lunsen	1
— 160630.8	— 81488.0	Lüchow Schloss	7
— 160662.6	— 81583.7	Lüchow Kirchthurm	7
— 160720.2	— 84088.0	Colborn	7
— 160772.6	— 81481.2	Lüchow Rathhaus	7
— 160811.9	— 43488.4	Oldenstadt	7
— 161305.0	— 49037.5	Retzlingen	7
— 161691.7	— 75396.6	Küsten	7
— 162065.3	— 10127.5	Munster	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 162237.2	— 80222.3	Plate	7
— 162474.5	— 54415.7	Rosche	7
— 163054.915	+ 20595.877	*Elmhorst*	1
— 163482.0	— 71534.2	Zebelin	7
— 163542.9	— 67123.1	Dommatz Windmühle	7
— 163594.034	+ 44884.912	*Steinberg*	1
— 163595.7	+ 71527.7	Kirchweihe	1
— 163790.2	— 47574.7	Riestedt	7
— 163833.7	— 107635.7	Böhmenzien	7
— 164100.1	— 92239.0	Trebell	7
— 164151.3	— 39667.3	Kirchweihe	7
— 164191.3	— 111647.9	Gross Wanzer	7
— 164225.4	— 109812.2	Aulosen	7
— 164475.3	— 44682.2	Molzen	7
— 165412.1	+ 61262.7	Achim	1
— 165663.3	— 74069.0	Crummsel	7
— 166240.369	+ 36851.244	Kirchwalsede	1
— 167135.5	— 106443.9	Capern	7
— 167200.4	— 31497.4	Ebstorf	7
— 167365.3	— 23864.3	Wriedel	7
— 167487.6	— 102223.1	Gartow	7
— 167488.1	+ 177677.1	Heede	6
— 168070.6	+ 139838.8	Frisoythe	6
— 168158.341	+ 44014.670	*Bottel*	1
— 168285.6	+ 93686.8	Ganderkesee	1
— 168491.9	+ 68805.6	Arbergen	1
— 168498.6	— 105154.0	Holtorf	7
— 168674.2	— 75038.6	Breselenz	7
— 169092.114	— 64845.685	*Spranze Signal*	7
— 169117.0	— 108832.7	Schnakenburg	7
— 169149.5	+ 138712.4	Oldenoythe	6
— 169497.677	— 35760.051	Hohenhunstorf Signal	7
- 169504.1	— 38435.9	Barum	7
— 169626.902	— 40177.793	Tätendorf Signal	7
— 169632.2	— 75984.9	Meetschow	7
— 169672.9	— 62645.2	Gülden	7
— 169998.3	— 94982.9	Gorleben	7
— 170075.2	— 58462.8	bei Hohen Zethen	7
— 170111.8	+ 87995.1	Delmenhorst	1
— 170322.2	— 76994.0	Breese im Bruch	7
— 170809.0	— 62566.0	bei Timmeitz	7
— 170871.1	+ 42239.2	Ahausen	1
— 171065.097	+ 194444.687	*Onstwedde*	6
— 171114.8	— 40822.7	am Lohnholz	7
— 171376.5	— 39978.2	Mollenberg	7
— 171465.593	— 19895.232	*Wulfsode*	1
— 171624.4	— 39571.1	Chausséehaus	7
— 171657.3	— 99622.5	Höbeck Nebenplatz	7
— 172227.9	— 36817.7	Freitagsberg	7
— 172394.8	+ 175161.9	Aschendorf Klosterkirche	6 (5)
— 172480.450	+ 75732.652	Bremen Zwinger	1
— 172512.986	— 100488.736	*Höbeck Signal*	7
— 172534.738	+ 76039.777	Bremen katholische Kirche	1
— 172542.5	— 93137.5	Kiez	7
— 172680.233	+ 75884.090	Olbers Observationszimmer	1
— 172684.7	— 70301.9	Spitzberg	7
— 172704.0	+ 175090.0	Aschendorf Pfarrkirche	6 (5)
— 172708.766	+ 76313.195	Bremen Martini	1
— 172752.009	+ 76017.343	Bremen Domkirche Thurm	1
— 172815.860	+ 75931.494	Bremen Domshof	1
— 172855.1	— 42776.2	Bevensen	7
— 172863.7	— 35028.6	Natendorf	7
— 172867.813	+ 76090.644	Bremen, Unsrer lieben Frauen	1
— 172976.849	+ 76016.811	Bremen Gymnasium	1
— 173058.7	+ 75387.8	Bremen Remberti	1
— 173074.743	+ 76350.938	*Bremen Ansgarius Dreieckspunkt*	1
— 173074.764	+ 76350.909	*Bremen Ansgarius Wahres Centrum des Knopfes*	1
— 173252.563	+ 76112.469	Bremen Wall am Heerdenthore	1
— 173340.866	+ 76992.613	Bremen Stephani	1
— 173475.5	+ 178854.0	Rhede	6 (5)
— 173522.5	— 98147.1	Möthlich	7
— 173834.4	— 122394.2	Dergentin	7
— 173993.439	— 85935.124	Gusborn Postament	7
— 173993.513	— 85935.834	Gusborn Signal	7
— 174006.6	— 128564.7	Perleberg	7
— 174109.0	— 41722.1	Kl. Medingen	7
— 174224.6	— 124648.1	Sückow	7
— 174269.5	— 63129.6	Ribrau	7
— 174343.872	+ 27991.260	Brokel	1
— 174400.4	— 52652.4	Himbergen	7
— 174729.5	+ 167611.9	Papenburg obere Kirche	6
— 174861.6	— 102794.0	Lenzen stumpfer Thurm	7
— 174938.7	— 102667.2	Lenzen spitzer Thurm	7
— 175051.9	— 76789.1	Dannenberg Cap. 2	7
— 175410.2	— 77374.9	Dannenberg Amtsthurm	7
— 175436.3	— 77265.1	Dannenberg Kirchth.	7
— 175533.6	+ 170901.4	Papenburg Pfarrkirche	6
— 175721.5	— 112325.8	Lanz	7
— 175788.2	— 77813.5	Dannenberg Cap.	7
— 175915.5	— 87883.2	Langendorf	7
— 176027.296	+ 35985.340	Rotenburg	1
— 176384.4	— 83887.2	Quickborn	7
— 176526.0	— 70563.1	Parpar	7
— 176641.9	— 125646.1	Quitzow	7
— 176735.2	— 99305.8	Seedorf	7
— 176769.703	+ 10407.337	Schneverdingen	1
— 176948.6	+ 47782.9	Sottrum	1
— 177194.8	— 100120.3	Eldenburg	7
— 177253.420	— 21852.221	*Timpenberg*	1
— 177907.2	— 119210.2	Laaslich	7
— 178518.2	— 43974.4	Alt Medingen (spitzes Dach?)	7 (1)
— 178519.1	— 43989.1	Alt Medingen stumpfes Dach	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 178756.4	— 120322.1	Nebelln	7
— 178917.9	+ 171303.2	Völlen	6
— 179141.3	— 24772.1	Bäzendorf	1
— 179671.9	— 36683.8	Bienenbüttel	7
— 179971.2	+ 69027.4	Lilienthal	1
— 180028.8	+ 152321.4	Strucklingen	6
— 180162.361	— 22894.019	*Nindorf*	1
— 180316.0	— 87433.1	Dömitz Kirchthurm	7
— 180373.2	— 87225.7	Dömitz Festungsthurm	7
— 180462.083	+ 115530.100	Oldenburg	1
— 181297.5	— 74000.6	Hitzacker	7
— 181489.1	— 73380.3	Meesenberg	7
— 181531.2	+ 158028.2	Westerraudervehn	6
— 181819.664	+ 35400.829	*Bullerberg*	1
— 181953.6	+ 175396.6	Stapelmoor	6
— 182381.889	+ 210.397	*Wilsede*	1
— 182572.1	+ 167190.0	Gross Wolde	6
— 182691.539	+ 30807.000	Schessel	1
— 183229.8	— 14628.0	Raven	1
— 183472.0	— 58227.0	Nahrendorf	7
— 183545.1	— 26743.8	Embsen	7
— 183835.9	+ 88347.4	Vegesack	1
— 184279.0	+ 161500.0	Collinghorst	6
— 184718.6	— 77834.7	Tribbekau	7
— 184789.7	— 53422.1	Dahlenburg	7
— 184829.394	+ 147139.369	Bassel	6
— 185194.0	+ 97965.2	Berne	1
— 185285.2	+ 166441.4	Irhove	6
— 185288.0	+ 173018.7	Weener gross. Thurm	6
— 185297.5	+ 173099.4	Weener klein. Thurm	6
— 185484.9	— 47867.5	Sommerbeck	7
— 185490.8	— 101402.9	Gorlosen	7
— 185815.824	+ 56897.921	Wilstedt	1
— 185885.2	— 73562.4	Caarssen	7
— 186092.8	+ 170057.9	Grotegaste	6
— 186376.4	+ 129542.6	Zwischenahn	6
— 186959.0	+ 190275.3	de Beerte	6
— 187333.0	+ 161793.4	Bakemoor	6
— 187641.574	— 65399.907	*Glienitz Signal*	7
— 187657.5	+ 178860.2	Bunde	6
— 187713.3	+ 198633.4	Schemda	6
— 188383.7	+ 168666.3	Gross Driver	6
— 188766.844	+ 68138.613	Worpswede	1
— 188883.5	— 15151.8	Salzhausen	1
— 189022.6	+ 169632.8	Kirchborgum	6
— 189300.6	+ 75524.1	Osterholz	1
— 189340.9	+ 174238.0	Wenigermohr	6
— 189452.7	+ 189864.1	Finserwolde	6
— 189484.5	— 92805.4	Conow	7
— 189680.1	— 47770.6	Thomasburg	7
— 189917.9	— 42015.8	Reinstorf	7
— 190124.4	+ 142734.8	Apen	6
— 190130.0	— 99139.6	Eldena	7
— 190137.3	+ 167107.1	Esklum	6
— 190306.1	+ 160911.7	Amdorp	6
— 190464.3	+ 153594.7	Stiekhausen	6
— 190748.6	+ 112008.5	Loyerberg Windmühle	1
— 190821.497	+ 95395.259	Neuenkirchen	1
— 191086.7	— 56225.6	Barskamp	7
— 191173.034	— 30682.457	Lüneburg Lamberti	1
— 191229.471	— 30851.899	Lüneburg Heiliger Geist	1
— 191379.0	— 49592.7	Bargmoor	7
— 191406.221	— 31356.505	Lüneburg Johannis	1
— 191498.1	+ 168950.8	Bingum	6
— 191511.038	— 30282.895	Lüneburg Kalkberg Platz von 1823	1
— 191531.9	— 30298.3	Lüneburg Kalkberg Platz von 1830	7
— 191597.289	— 30574.411	*Lüneburg Michaelis*	1 (7)
— 191686.464	— 31027.825	Lüneburg Rathhaus	1
— 191823.370	+ 166412.554	Leer Waage	6
— 191845.443	— 31169.785	Lüneburg Nicolai	1
— 191882.273	— 30367.793	Lüneburg Platz vor dem Thore	1
— 191946.373	+ 166653.435	Leer luther. Kirche	6
— 192026.320	+ 166570.987	Leer kathol. Kirche	6
— 192086.847	+ 166481.076	*Leer reform. Kirche*	6
— 192096.210	+ 166594.099	Leer Gymnasium	6
— 192292.9	— 81854.4	Jabel	7
— 192325.3	— 67853.0	Stapel	7
— 192345.9	+ 163573.9	Loga	6
— 192362.1	+ 179758.7	Landschaftspolder	6
— 192428.324	+ 116347.889	Rastede	1
— 192568.5	+ 172211.0	Holtgast	6
— 192668.865	— 37170.020	Steinhöhe	7
— 192808.2	— 31987.4	Lüne	1
— 192896.0	+ 174460.9	Bohmerwold	6
— 192933.8	— 65345.8	Haar	7
— 192995.9	— 24951.2	Mechtersen	7
— 193260.212	— 49872.299	*Bretze Signal*	7
— 193340.040	+ 45266.609	*Brüttendorf*	1
— 193527.1	— 45281.1	Netze	7
— 193865.912	+ 81845.072	*Garlste*	1
— 194278.3	+ 208753.4	Kolham	6
— 194284.445	+ 134466.866	*Westerstede*	6
— 194428.857	+ 108898.647	Grossen Meer	1
— 194489.330	+ 29167.094	Sittensen	1
— 194984.5	+ 198240.6	Nordbrock	6
— 195288.541	+ 15609.156	Tostedt	1
— 195336.6	+ 175356.5	Mariencoer	6
— 195460.0	+ 167396.7	Nuttermoor	6
— 195718.6	+ 205474.3	Slochtersen	6
— 195776.4	— 65911.8	Neuhaus	7
— 196210.609	+ 44369.050	Zeven Platz vor dem Flecken	1
— 196281.2	— 30242.0	Rother Thurm?	1
— 196392.0	— 31089.4	Vrestorf	7
— 196504.2	— 37868.5	Scharnebeck	7
— 196711.9	— 52497.4	Bleckede	7
— 196816.805	+ 44512.505	Zeven Platz im Garten des Posthauses	2
— 196973.309	+ 44130.578	*Zeven Dreieckspunkt*	2
— 196974.329	+ 44130.289	Zeven Thurmknopf	1
— 197203.85	— 29767.06	Bardewyk Südlicher Thurm	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 197218.0	— 29765.92	Bardewyk Nordlicher Thurm	1
— 197359.5	— 60720.1	Krusendorf	7
— 197989.7	— 76044.5	Lübtheene	7
— 198168.2	+ 194521.8	Nienwolde	6
— 198179.4	+ 166095.6	Thedinga Pavillon	6
— 198500.6	+ 171409.0	KleinMidlum Grosser Thurm	6*
— 198522.0	+ 171416.1	KleinMidlum kleiner spitzer Thurm	6*
— 198743.1	+ 97098.0	Hammelwarden	1
— 198860.746	+ 74451.604	Hambergen	1
— 198913.2	+ 91148.0	Uthlede	1
— 198986.1	+ 165916.3	Veenhusen	6
— 199535.3	— 42014.0	Lüdersburg	7
— 199648.0	+ 71848.0	Jacobsberg	1
— 200747.1	+ 166739.0	Neermoor	6
— 200913.8	— 33325.2	Brietlingen	7
— 201084.6	— 30273.1	St. Dionys	7
— 201285.9	+ 173882.5	Hatzum	6*
— 201426.4	— 39229.1	Echem [abgebr. 1870]	7
— 202108.6	+ 177456.4	Ditzum	6*
— 202146.0	— 52150.2	Radegast	7
— 202233.0	— 43052.7	Hitbergen	7
— 202408.1	+ 196313.8	Opmieden	6
— 202573.2	+ 172447.1	Rorichum	6*
— 202968.9	+ 175265.9	Gandersum	6
— 202983.5	— 48542.0	Garlstorf	7
— 202987.1	+ 113500.1	Jahde	1
— 203523.477	+ 173477.408	Oldersum	12 (6)
— 203554.6	— 59055.7	Blücher	7
— 203906.2	+ 98420.6	Golzwarden	1
— 203943.733	+ 200863.897	Appingdam	12 (6)
— 204177.657	— 17424.519	Winsen	1
— 204193.7	+ 177799.7	Petkum Nadel	6*
— 204209.1	+ 177827.3	Petkum starker Th.	6*
— 204520.1	+ 179389.2	Jarssum	6*
— 204710.173	+ 94432.948	Sandstedt	13 (1)
— 204811.3	+ 61824.0	Platz bei Gnarrenburg	13
— 204951.8	+ 181022.5	Gross Borssum	6*
— 205232.4	+ 83146.8	Bramstedt	13 (1)
— 205234.429	— 40976.028	Lauenburg Zenith Sector	1
— 205266.638	— 40813.884	Lauenburg Amtsthurm	1
— 205386.5	+ 181027.5	Klein Borsum kleine Spitze	6*
— 205389.1	+ 181032.2	Klein Borsum grauer dicker Thurm	6*
— 205558.573	+ 48542.994	Selsingen	14 (13)
— 205784.4	— 51939.9	Boizenburg	7
— 206040.602	— 41045.727	*Lauenburg Signal* 1823	1 (7)
— 206152.8	+ 164951.4	Hatshusen	6*
— 206502.6	— 63107.4	Banzien	7
— 206518.9	— 80274.3	Warlitz	7
— 206649.8	— 75905.8	Prizier Schloss	7
— 206866.630	+ 21895.743	*Litberg* 1823. 1824	1
— 206867.045	+ 21896.054	*Litberg* 1844	14
— 206892.831	+ 188583.951	Wibelsum	12

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 207814.1	— 57538.8	Brezien	7
— 207905.712	+ 204521.436	Holwierda	12 (6)
— 207926.4	+ 182424.4	Emden reformirte Kirche	6
— 207983.1	+ 185911.0	Larrelt	6*
— 208039.9	+ 182054.9	Emden Gasthauskirche	6
— 208050.292	+ 182119.813	*Emden Rathhausthurm (Dreieckspunkt*	6
— 208096.3	+ 169299.6	Simonswolde II.	6
— 208107.6	+ 169267.7	Simonswolde I.	6
— 208112.862	+ 181615.631	Emden neue Kirche	6
— 208287.9	— 52202.1	Gresse sehr zweifehaft	7
— 208342.6	+ 180329.0	Wolthusen	6*
— 208657.600	+ 187011.702	Twixlum	12 (6)
— 209016.5	+ 178921.0	Uphusen	6*
— 209101.471	+ 120055.577	Varel, Lacroix' Haus, 3' Fenster	1
— 209157.9	+ 32511.3	Ahlerstedt	1
— 209430.5	+ 99192.0	Rotenkirchen	1
— 209473.921	+ 120151.600	*Varel Dreieckspunkt*	1
— 209474.103	+ 120151.596	Varel Thurmknopf	1
— 209480.851	+ 120118.579	Varel Nebenthurm	1
— 209812.3	+ 105532.5	Schwey	1
— 209914.681	+ 193447.306	Rysum	12 (6)
— 209920.394	+ 63160.149	*Brillit*	1
— 210325.8	— 16949.2	Kirchwerder	1
— 210398.6	— 21859.7	Drenhausen	1
— 210966.9	— 2138.3	Sinsdorf	1
— 210968.7	+ 10237.7	Elsdorf	1
— 211070.6	+ 172189.2	Riepe	6*
— 211079.8	+ 192770.6	Loquard	12 (6)
— 211132.3	+ 178850.3	Marienwehr	6*
— 211294.613	— 3850.827	Rönneburg Theodolithplatz	1
— 211295.104	— 3852.968	Rönneburg Pfahl	1
— 211592.9	— 21734.5	Altengamme	1
— 211715.0	— 28464.0	Gesthacht	1
— 212134.808	+ 192306.784	Campen spitz. Thurm	12 (6)
— 212147.788	+ 192324.041	Campen stumpfer Th.	12 (6)
— 212153.498	+ 21880.543	Apensen	1
— 212213.1	+ 93052.3	Büttel	13
— 212281.416	+ 2963.815	Varendorf	1
— 212374.0	— 40002.2	Lüttau	1
— 212611.3	+ 131050.4	Zetel	1
— 212705.3	— 82917.8	Hagenow	7
— 212737.671	+ 16.168	Meridianpfahl der Altonaer Sternwarte	1
— 213005.8	+ 185169.5	Gross Midlum	6*
— 213171.8	— 36490.5	Gülzow	1
— 213197.7	+ 183662.1	Westerhusen	6*
— 213207.335	+ 180812.493	Suiderhusen	12 (6)
— 213240.5	— 3043.3	Wilsdorf	1
— 213296.0	— 18515.5	Neuengamme	1
— 213307.446	+ 189621.205	Wolzeden	12 (6)
— 213311.982	+ 63346.939	Basdahl Signal von 1844	14 (13)
— 213313.852	+ 63343.996	*Basdahl Postament*	14 (13)

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 213494.8	+ 169067.8	Ochtelbuhr	6*
— 213579.6	+ 182700.5	Hinte	6
— 213693.339	+ 61201.936	Oese	13
— 213721.8	— 74448.8	Körchow	7
— 213737.237	— 18911.784	Kurslak	1
— 214043.583	+ 214980.396	Uithuizer Medem	12
— 214170.1	— 31847.3	Johannwarden	1
— 214187.1	+ 95782.1	Dedesdorf	1
— 214237.022	+ 31036.188	Kortkamp	14
— 214306.492	+ 29258.444	Harsefeld	14
— 214388.315	+ 180200.045	Loppersum	12 (6)
— 214396.5	+ 175488.4	Blaukarken	6*
— 214520.078	+ 28565.172	Paaschberg	14
— 214613.820	+ 192611.870	Upleward	12 (6)
— 214771.6	+ 89292.6	Stotel	1
— 214805.1	+ 99852.4	Esensham	1
— 214858.2	+ 188047.8	Canum	6*
— 214983.291	+ 32905.642	Bargstedt	14
— 215021.8	+ 121663.5	Dangast Conversationshaus	1
— 215161.3	+ 121605.3	Dangast Badehaus	1
— 215236.334	— 2485.277	Harburg Kirchthurm	1
— 215478.35	+ 192170.9	Hamswehrum	12 (6)
— 215503.7	+ 189998.9	Woquard	12
— 215567.2	— 2731.5	Harburg Rathhaus	1
— 215634.7	+ 174905.3	Bedekaspel	6*
— 215805.0	+ 105267.3	Seefeld	1
— 215843.146	+ 30596.657	Signal bei Ohrensen	14
— 215943.064	+ 189164.432	Pewsum	12 (6)
— 215989.0	+ 184150.7	Cirkwerum	6*
— 215997.6	— 2828.6	Harburg Schloss	1
— 216198.731	+ 191261.429	Grothusen	12 (6)
— 216388.842	+ 29899.180	Richtplatz	14
— 216533.2	+ 181603.6	Canhusen	6*
— 216538.7	— 22816.1	Börnsen	1
— 216684.030	+ 16238.653	Buxtehude kleiner Thurm	14
— 216705.6	— 9434.1	Ochsenwerder	1
— 216781.593	— 28139.131	*Hohenhorn*	1
— 216845.040	+ 86020.335	Loxstedt aus den Schnitten von 1825	1
— 216846.436	+ 86021.259	Loxstedt (13 auf 14 reducirt)	14
— 216859.962	+ 86846.490	Windmühle	13
— 216868.501	+ 16083.719	Buxtehude grosser Thurm	14 (1)
— 216940.6	— 44155.1	Pötrau?	7
— 217254.243	+ 60404.251	Barchel Windmühle	14
— 217342.336	+ 24861.094	Bliedersdorf	14
— 217388.937	+ 58876.873	Oerel	13
— 217391.8	— 46187.2	Büchen	7
— 217507.288	+ 20578.783	Neukloster	14
— 217677.206	+ 185218.517	Uttum	12 (6)
— 217963.5	— 4853.9	Wilhelmsburg	1
— 218140.4	+ 195.4	Moorburg	1
— 218196.365	— 17800.045	Bergedorf	1
— 218206.270	+ 52883.253	Bremervörde	13
— 218579.500	+ 191311.705	Manschlagt (dicker?) Thurm	12 (6)
— 218611.4	+ 191337.6	Manschlagt (spitzer?) Thurm	6
— 218660.449	+ 163683.325	Aurich Schlossthurm	12 (6)
— 218682.8	+ 100057.6	Abbehausen	1
— 218704.1	+ 129798.1	Neustadt Gödens Laternenthurm	1
— 218740.7	+ 129682.7	Lutherische Kirche in Neustadt Gödens	1
— 218810.520	+ 163544.715	*Aurich*	6*
— 218831.616	+ 29712.362	Grefenkreuz	14
— 218956.7	+ 186650.1	Jennelt	6*
— 219023.6	+ 83056.1	Bexhövede	13 (1)
— 219096.579	— 23511.744	Schragenberg	14
— 219440.5	+ 1900.1	Altenwerder	1
— 219560.3	+ 131289.3	Schloss Gödens	1
— 219666.783	— 188833.500	Visquard	12 (6)
— 219868.1	+ 97707.4	Atens	13 (1)
— 219994.759	+ 186076.923	Visquard	12 (6)
— 220063.4	+ 1667.9	Altenwerder	1
— 220341.7	+ 88944.9	Wulstorf	13 (1)
— 220411.666	+ 23705.030	Horneburg	14
— 220430.386	+ 59142.456	Stallberg	13
— 220461.0	+ 181732.2	Wirdum dicker Thurm rothe Spitze	6*
— 220466.841	+ 184003.878	Grimmersum	12 (6)
— 220472.5	+ 181708.9	Wirdum spitzer Thurm	6*
— 220530.913	+ 14210.933	Estebrügge	14 (1)
— 220667.3	— 9251.8	Moorfleth	1
— 220926.883	+ 42601.869	Mulsum	14 (1, 13)
— 220933.0	— 12183.4	Billwerder	1
— 221036.7	— 16043.8	Rizerberg	1
— 221251.0	+ 174327.6	Engerhave	6*
— 221353.466	+ 191168.272	*Pilsum*	12 (6)
— 221364.1	+ 128124.0	Sande	1
— 221695.930	+ 8765.989	Neuenfelde	14
— 222066.510	+ 104931.790	Stolham	13 (1)
— 222072.631	+ 22300.781	Neuenkirchen	14
— 222577.1	+ 128052.8	Marienhausen	1
— 222791.7	— 12264.6	Steinbeck	1
— 222863.3	+ 74448.2	Alt Lunenberg	13 (1:)
— 222951.304	+ 17377.129	Jork	14 (1, 13)
— 223006.3	+ 31264.2	Helmste	13
— 223221.516	+ 189023.250	Gretsiel Glockenthurm	12 (6)
— 223231.918	+ 189034.103	Gretsiel spitzer Thurm	12 (6)
— 223492.6	+ 89632.8	Gestendorf	13 (1)
— 223586.087	+ 16792.911	Borstel	14 (1, 13)
— 223590.9	+ 85820.5	Windmühle	13
— 223631.7	+ 89237.2	Windmühle	13
— 223785.6	— 22328.1	Ohe	1
— 223809.5	+ 93277.2	Blexum	13 (1)
— 223843.6	+ 85384.9	Schiffdorf	13 (1)
— 224032.8	+ 26448.5	Dollern	13
— 224202.934	+ 21604.243	Mittelnkirchen	14 (1)
— 224339.3	— 2482.3	Hamburg Rose's Thurm	1
— 224452.314	+ 14.054	Altona, Meridiankreis	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
−224462.4	+110939.0	Eckwarden	1
−224495.328	+ 16.354	*Altona Brett*	1
−224498.476	− 3397.338	Hamburg Catharinenthurm	1
−224512.1	+122832.8	Niende	1
−224608.034	+ 670.322	Ottensen	1
−224643.8	− 17.8	Altona Armenkirche	1
−224709.6	− 3090.6	Hamburg Nicolaikirche	1
−224765.173	− 2369.933	*Hamburg Michaelis*	1 (14)
−224772.190	− 494.487	Altona Stadtkirche	1
−224790.8	+143262.4	Lerhave	6*
−224890.9	− 684.7	Altona Rathhaus	1
−224980.3	− 3382.3	Hamburg kleiner Thurm auf grossem Gebäude	1
−224984.9	− 3553.3	Hamburg Petri	1
−224987.4	− 3818.5	Hamburg Jacobi	1
−225108.574	+ 6643.094	Nienstedten	14 (1)
−225158.1	+ 32114.8	Hagen	13
−225219.492	+177118.852	Marienhave	12 (6)
−225272.8	+177037.6	Marienhave Laternen oder Kuppelthurm	6*
−225297.1	+ 37553.8	Schwinge	13
−225545.8	+ 31878.0	Mürksberg	13
−225602.7	− 7544.5	Ham	1
−225624.2	+ 8381.6	Baurs chinesischer Thurm	1
−225655.3	− 4315.9	Hamburg St. Georg	1
−225699.5	+149405.4	Ardorf Kirche westlicher Giebel	12
−225704.0	+ 8594.0	Baurs Warte	1
−225721.3	+149384.9	Ardorf Glockenthurm	12
−225854.6	+ 33366.7	Bösenmoor	13
−225900.7	+ 82313.7	Brameln	1
−225924.4	+128018.3	Accum	1
−225971.0	+153895.6	Middels	12
−226031.893	+ 9413.473	Kösterberg	14
−226158.332	+ 21212.149	Steinkirchen	14 (1, 13)
−226323.2	+ 27032.8	Agathenburg	13 (1)
−226357.3	+151238.9	Hilgensteiner Windmühle	12
−226384.016	+177606.005	Osteel	12 (6)
−226566.5	+ 72494.6	Ringstedt	13 (1)
−226596.380	+ 10387.618	Telegraph 6	14 (13)
−226684.7	+125272.8	Kniphausen	1
−226742.888	+ 10302.910	Baursberg Postament	1
−227363.697	+ 22179.575	Grünendeich	14 (1. 13)
−227522.1	− 8529.2	Wandsbeck	1
−227663.375	+ 89453.894	Bremerleho Dreieckspunkt von 1825	1 (13. 14)
−227663.471	+ 89453.766	Bremerlehe Thurmknopf	1 (13)
−227890.1	+ 31183.1	Riensförde	13
−227893.828	+ 28695.134	Ottenbeck	13
−228015.7	+ 32798.7	Thun	13
−228037.4	+ 70676.5	Windmühle bei Haymühlen	13
−228831.117	+ 16189.770	Wedel	14 (1, 13)
−228839.250	+ 67813.678	Wüstewohlde	14 (13)
−228893.4	+ 78683.7	Hartmanns Platz 1 bei Elmloh 1815	1
−128909.0	+ 29456.7	Camper Kirchhof	13
−228928.2	+ 78380.6	Hartmanns Platz 2 bei Elmloh 1825	1
−228940.921	+135590.613	Platz auf dem Felde bei Jever 1825	1
−229055.6	+104710.2	Burhave	13 (1)
−229064.0	+ 24462.7	Bachenbruch	13
−229101.8	+135859.2	Windmühle mit sechs Flügeln	1
−229344.966	+135141.823	*Jever Dreieckspunkt 1825*	1
−229345.570	+135138.149	*Jever Dreieckspunkt 1831*	6*
−229346.226	+135135.171	Jever Centrum 1825	1
−229346.316	+135135.135	Jever Knopf	1
−229381.561	+ 35153.354	Lohberg	13
−229392.658	+ 30815.096	Neuewerk	13
−229525.455	+135182.234	Jever Stadtkirche	1
−229559.661	+ 25482.061	Hollern	14 (1. 13)
−229672.7	− 3334.5	Eppendorf	1
−229675.022	+ 45730.111	Oldendorf	14 (1. 13)
−230044.065	+143131.280	Witmund	12
−230098.884	− 20737.025	Basis südl. Endpunkt	1
−230160.2	− 13754.1	Rahlstedt	1
−230297.756	+ 32787.350	Schwarzenberg	13
−230660.608	+ 30777.067	Stade Wilhadi	13 (1)
−230768.6	+ 37799.7	Mittelsdorf	13
−230769.6	+ 30892.7	Stade Rathhaus	13
−230811.570	+ 30884.599	*Stade Centrum des Thurmknopfes*	14 (1. 13)
−230811.734	+ 30884.678	Stade Theodolithplatz (1843. 1844)	14 (13)
−230813.787	+ 30882.249	Stade Platz auf der Brüstung (1843)	14
−230833.4	+ 32581.1	Telegraph 5	13
−230903.920	+ 25813.308	Twilenfleth	14 (1. 13)
−230997.1	+ 27599.1	Kronhelm westlicher Schorstein	13
−231094.3	+ 30827.8	Stade kleiner Thurm (Nicolai?)	13 (1)
−231213.791	+ 56230.888	*Dolosenberg*	14
−231432.6	+125628.5	Sengwarden	1
−231703.600	+152222.553	Radiborsberg	12
−131855.7	+ 32000.3	Hohewedel Wache	13
−232009.8	+ 28504.5	Melau Pappel	13
−232096.849	+107887.366	Platz d bei Langwarden	1
−232175.570	+108215.234	Langwarden Knopf	1
−232175.707	+108215.212	*Langwarden Dreieckspunkt*	1
−232211.499	+108352.939	Langwarden Thürmchen auf Loh's Hause Centrum	1
−232283.0:	+ 30123.9:	Hörne	13
−232310.0	+ 42233.0	Himmelpforten	13
−232370.697	+ 16771.527	Holm	13 (1)

+ südlich	+ westlich		Nr.
—232386.0	+164529.0	Westerholt Kirche westlicher Giebel	12
—232389.0	+164501.5	Westerholt Kirche östlicher Giebel	12
—232396.9	+164530.5	Westerholt Glockenthurm	12
—231425.941	— 432.587	Niendorf	1
—232443.6	+ 93122.4	W. M. bei Düngen	13
—232500.879	+152082.613	Norddunum	12
—232546.3	+ 88348.1	Hartmann's Platz bei Langen	1
—232636.2	+145710.0	Blerssum Kirche östl. Giebel Wetterstange	12
—232730.593	+108463.473	Platz a auf d. Deiche bei Langwarden	1
—232748.957	+148006.262	Burhave	12
—232757.493	+107614.700	Platz e auf dem Seedeiche	1
—232761.592	+108032.475	Platz e auf dem Seedeiche	1
—232762.207	+107990.147	Platz b auf dem Seedeiche	1
—232806.443	+ 83230.289	*Haye*	14
—232922.0	+ 31870.7	Schölisch	13
—232965.2	+ 83308.3	Hartmann's Platz 1 bei Weden	1
—233076.0	+ 27272.2	Stader Sand	13
—233112.323	+ 94327.415	Imsum	13 (1)
—233145.0	+ 28559.7	Brunshäuser Zoll	13
—233154.5	+180027.9	Bargerbuhr	12 (6)
—233347.9	+ 35320.9	Klein Villah	13
—233369.169	+ 72936.603	*Bederkesa* 2	14 (13)
—233400.0	+181238.4	Norden Thürmchen	12 (6)
—233419.4	+181420.4	Norden Thürmchen	12 (6)
—233448.8	+ 73276.1	Hartmann's Platz 2 bei Bederkesa	1
—233449.968	+181327.254	Norden Glockenth.	12 (6)
—233461.2	+ 73045.3	Windmühle	13
—233462.4	+ 73040.4	Hartmanns Platz 3 bei Bederkesa	1
—233491.171	+181317.78:	Norden Thürmchen auf hoher Kirche	12 (6)
—233551.1	+ 28038.2	Brunshäuser Grell	13
—233572.583	+ 86148.671	Depstedt	13 (1)
—233813.344	+ 72910.119	Bederkesa Glockenthurm	13 (1)
—233817.091	+ 72884.200	Bederkesa Kirchthurm	13 (1)
—233913.8	+ 86384.1	Windmühle	13
—234046.8	+ 73957.2	Hartmann's Platz 1 bei Bederkesa	1
—234054.937	+176016.221	*Hage*	12
—234080.187	+ 73882.941	*Bederkesa* 1	14 (13)
—234139.343	+216659.508	*Borkum Leuchtthurm*	12
—234264.369	+217262.393	Kape	12
—234271.2	+161168.3	Ochtersum Glockenthurm	12
—234288.3	+161116.6	Ochtersum Kirche östlicher Giebel	12
—234294.7	+161152.5	Ochtersum Kirche westlicher Giebel	12
—234367.057	— 23454.204	*Syk*	1
—234495.2	+ 37263.3	Gross Villah	13
—234514.029	+ 49518.027	Telegraph 4	13
—234520.543	+ 49520.888	*Bülleberg*	14 (13)
—234575.767	+168839.877	Arle	12 (6)
—234608.0	+ 30559.4	Götzdorf	13
—234783.8	+ 55979 1	Lamstedt	13 (1)
—234800.952	+158204.294	Barkholtberg	12
—234845.001	+217017.372	Kape	12
—234945.5	+131447.3	Waddewarden	1
—235123.955	— 17692.547	Basis Nordlicher Endpunkt	1
—235148.8	+ 43957.0	Horst	13
—235151.224	+ 46413.555	Hechthausen	13
—235178.744	+146747.585	Buttförde Glockenthurm	12
—235184.0	+146716.7	Buttförde Kirche Giebel Wetterstange Oestlich	12
—235189.4	+146745.0	Buttförde Kirche Westlicher Giebel	12
—235802.482	+150846.216	Stedesdorf	12
—235808.403	+140825.428	Berdum	12
—235852.395	+210459.555	Kape	12
—235908.2	+ 33366.4	Butzflether Moor	13
—235934 639	+210468.292	Kape	12
—235948.512	+ 7503.605	Rellingen	14 (1)
—236082.7	+142664.1	Funnix	12
—236377.9	+138883.5	Meddoog	12 (1)
—236489.4	+ 94849.6	Windmühle	13
—236647.8	+ 58650.6	Windmühle bei Mittelstenahe	13
—236653.779	+ 30626.039	Butzfleth	14(1.13)
—236759.5	+136359.2	Tettens	12
—236767.8	+162544.8	Roggenstede Kirche östlicher Giebel	12
—236775.2	+162568.5	Roggenstede Kirche westlicher Giebel	12
—236780.8	+162533.4	Roggenstede Glockenthurm östlicher Giebel	12
—236782.7	+161539.4	Roggenstede Glockenthurm westlicher Giebel	12
—236848.7	+159870.5	Fulkum Kirche östlicher Giebel	12
—236856.0	+159897.7	Fulkum Kirche westlicher Giebel	12
—236866.2	+159899.0	Fulkum Glockenthurm	12
—236871.6	+ 88580.6	Windmühle bei Sövern	13
—236993.9	+ 94836.0	Wremen	13 (1)
—237223.9	+153899.9	W. M. Hedlefs	12
—237298.1	+ 9661.6	Pinneberg Landdrost.	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
—237446.049	+ 21231.716	Haselau	14(1.13)
—237639.3	+165905.0	Resterhave	12
—238292.0	+ 75254.5	Flögeln	13 (1)
—238321.766	+154076.826	*Esens*	12
—238565.0	— 12121.8	Bergstedt	1
—238583.664	+166282.907	Dornum Dorfkirchthurm	12
—238587.5	—154095.3	W. M. Reinders Witwe	12
—238755.8	+154931.0	W. M.	12
—238842.3	+154167.3	Simons Pellmühle	12
—238850.8	+165389.7	W. M.	12
—238863.643	+166209.810	*Dornum*	12
—238880.8	+166355.8	W. M.	12
—238946.7	+165277.5	West Accum Östlicher Kirchengiebel	12
—238951.6	+165305.9	West Accum Westlicher Kirchengiebel	12
—239039.311	+ 92300.142	Mulsum	13 (1)
—239045.137	+ 54835.447	Kikeberg Signal	14
—239045.378	+ 54834.803	*Kikeberg Theodolith*	14 (13)
—239222.8	— 19663.9	Woldehorn	1
—239229.9	+ 19634.5	Uetersen Sägemühle	1
—239400.0	+170012.8	W. M.	12
—239403.8	+133938.6	Hohenkirchen	12 (1)
—239439.888	+147305.874	Werdum	12 (1)
—239576.4	+169377.7	Nesse	12
—239581.220	+ 45317.897	Gross Wöhrden	14 (13)
—239585.808	+ 87017.163	*Holssel*	14 (13)
—239656.475	+ 18902.788	Uetersen Kirchthurm	14(1.13)
—239690.9	+ 82682.9	Neuenwalde Klosteruhr	13
—239696.204	+ 81358.560	Neuenwalde Platz 1	13
—239713.7	+ 82681.1	Neuenwalde Thurm	13
—239717.041	+ 81379.558	Neuenwalde Platz 2	13
—239721.305	+161848.239	Westerbuhr Westlicher Giebel Wetterhahn	12
—239818.8	+ 94336.4	Misselwarden	13
—239989.5	+ 83529.4	W. M.	13
—240123.579	+161774.952	W. M.	12
—240192.7	+ 50118.9	Basbeck	13
—240251.9	+ 69871.0	Steinau	13 (1)
—240296.0	+ 19080.5	Uetersen Klostermühle	1
—240378.3	+ 87704.7	W. M.	13
—240814.7	+ 17757.6	Lang's Mühle	1
—240832.833	+ 33505.591	Assel	14 (13)
—241020.9	+177368.4	W. M. im Lütetsburger Polder	12
—241032.042	+175725.602	Hilgenrieder Siel Haus	12
—241116.590	+175793.929	Hilgenrieder Siel Signal	12
—241159.9	+ 87490.1	Holssel Kirche	13
—241247.312	+ 49946.367	Osten	14 (13)
—241248.8	+ 90755.5	Dorum Kirche	13
—241250.3	+ 90799.6	Dorum Thurm	13 (1)
—241349.999	+156433.149	Bensersiel	12
—241353.634	+156450.037	Ede Ments Ubben Witwe; Östlicher Hausgiebel	12
—241354.573	+156429.686	Ortspfahl	12
—241369.953	—156424.861	Hafenmeister Heise Wilms Abken; Schorstein Westlicher Giebel	12
—241442.3	+163181.1	W. M.	12
—241521.9	+ 69275.1	W. M.	13
—241557.452	+162827.479	Accumer Siel	12
—241686.9	+164133.3	Wilhelminenhof	12
—241738.5	+ 65998.5	Odisheim	13
—241758.680	+170913.034	Nesmersiel Signal	12
—242005.548	+167300.469	Dreihausen Signal	12
—242341.542	+148434.888	Windmühle	12
—242411.745	+153585.338	Herro Eils Heijen Witwe, Hausgiebelknopf	12
—242478.1	+ 93498.4	Padingbüttel	13 (1)
—242678.058	+200512.047	*Grosse Bill Pfahl*	12
—242734.436	+153645.405	Benser Schaudeich	12
—242774.750	+ 36827.105	Drochtersen	14(1.13)
—242855.9	+141530.7	Carolinensiel Glockenthurm	12
—242915.3	+141817.1	W. M. bei Carolinensiel	12
—242943.8	+141957.9	W. M. bei Carolinensiel	12
—243131.890	+194462.450	Juist, Voigts Flaggenstock	12
—243177.2	+194597.1	Juist, Kirche	12
—243448.055	+194665.145	*Juist*	12
—243680.0	+ 22825.2	Seste Kirche	1
—244006.301	+147824.031	Neuharlingersiel Schule	12
—244200.869	+ 80932.188	*Krempel*	14 (13)
—244319.6	+112197.5	Bremer Bake	1
—244679.036	+ 29946.078	Dampfmaschine bei Colmar	14
—244717.4	+ 18596.2	Lieth Signal	1
—244786.4	+ 12589.6	Ellerhoop Signal	1
—244844.3	+ 55819.4	W. M. bei Dobrock	13
—245288.1	+ 89104.3	W. M.	13
—245307.475	+ 58481.723	*Silberberg*	14 (13)
—245325.120	+175796.184	Tonnenbake	12
—245432.318	+ 29726.974	Colmar	14(1.13)
—245465.9	+ 17978.5	Lith Windmühle	1
—245551.6	+ 90762.4	Cappeln	13 (1)
—245582.1	+ 62820.1	Oppeln	13
—245674.259	+184698.529	Nordernei Logirhaus Flaggenstange	12
—245769.196	+184747.501	Nordernei Conversationshaus	12
—245775.9	+ 87628.5	Midlum	13 (1)
—245823.419	+ 24600.808	Nenendorf	14(1.13)
—245870.7	+ 57638.3	Tanne auf der Wingst	13
—245979.2	+184887.3	Nordernei Kirche niedriger östl. Giebel	12

+ südlich	+ westlich		Nr.
−246044.7	+ 67744.3	W. M.	13
−246167.305	+180740.759	*Nordernei Postament*	12
−246507.708	+177516.504	Wichter Ee Signal	12
−246534.1	+ 67703.9	Oster Ilienworth	13 (1)
−246677.342	+ 57188.051	*Fahlberg*	14 (13)
−246689.143	+ 57186.863	Telegraph 3	13
−246892.5	+ 76613.5	Wanna	13 (1)
−247448.3	+ 63634.7	Bülkau	13 (1)
−247472.040	+168579.668	Baltrum Schorstein 1	12
−247483.410	+168608.003	— — 2	12
−247486.659	+168537.575	— — 3	12
−247492.045	+168608.928	— — 4 (auf demselb. Hause wo 2)	12
−247511.460	+168374.597	Baltrum Signal 2	12
−247515.5	+168563.9	Baltrum Schorstein eines Hauses (unsichere Combination)	12
−247563.2	+ 74450.0	W. M.	13
−247604.1	+ 19135.4	Elmshorn Kirche	1
−247703.2	+ 36751.8	Krautsand	13 (1)
−247779.5	+ 52534.4	Oberndorf	13
−247783.213	+170529.605	*Baltrum Postament*	12
−247791.340	+169902.443	Baltrum Voigt Tiarks Ulrichs Haus; Schorstein Mitte	12
−247811.045	+169983.550	Baltrum Kirchengiebel Mitte	12
−247818.608	+169986.297	Baltrum Pfarrhaus Mitte der Schorsteine	12
−248357.044	+169671.428	Baltrum Signal 1	12
−249186.4	+ 73030.4	Nordleda	13
−249240.91	+162260.300	Langeoog Signal 1	12
−29451.1727	+162280.007	Langeoog F. J. Pauls Haus, Östlicher Giebelstock	12
−249538.599	+162128.496	Langeoog Westende, Guckaus auf Ulrich Tiarks Hause	12
−249637.562	+162168.551	Langeoog Schulhaus S. S. O. Giebel.	12
−249638.027	+162168.677	Langeoog Schulhaus Schorstein	12
−249647.083	+162174.297	Langeoog Schulhaus N. N. W. Giebel	12
−249744 732	+162701.816	*Langeoog Postament*	12
−249754.2	+154899.857	Langeoog Ostende, Nebenhaus Schorstein	12
−249759.2	+154928.6	Langeoog Ostende, Belvedere Haus S. W. Giebel	12
−249763.4	+154924.6	Langeoog Ostende, Belvedere selbst	12
−249769.3	+154919.1	Langeoog Ostende, Belvedere Haus N. O. Giebel	12
−250029.0	+158955.9	Signal 3 auf Melkhörn	12
−250044.9	+ 58410.6	Cadenberge	13
−250104.6	+157206.0	b. Ostende Signal 4	12
−250390.8	+161865.6	Langeoog Signal 2	12
−250723.2	+ 69101.5	Neuenkirchen	13 (1)
−250742.7	+150281.5	Kapo	12
−250784.0	+ 65964.3	Osterbruch	13 (1)
−250916.4	+150408.7	Kape	12
−251166.2	+ 35188.6	Glückstadt Castellthurm	1
−251211.1	+ 34297.5	Glückstadt Zuchthausthurm	1
−251300.5	+ 34086.1	Windmühle a	1
−251343.659	+ 34553.986	Glückstadt kleiner Thurm (Dänische Station)	14(1.13)
−251402.091	+ 30138.873	Herzhorn	14 (1)
−251427.1	+ 33346.2	Glückstadt Windmühle b	1
−251446.2	+ 63264.2	Kehdingbruch	13
−251523.118	+ 11053.062	Barmstedt	14 (1)
−251575.260	+ 34125.468	Glückstadt Kirchthurm	14(1.13)
−251598.266	+146754.114	Spikeroog Signal Pfahl 2	12
−251716.915	+148137.541	Spikeroog Nebenplatz	12
−251799.057	+148177.894	Spikeroog Kirchengiebel Mitte	12
−251970.5	+149288.5	Spikeroog weisse Dune oder Signal 1	12
+252022.819	+147127.531	*Spikeroog Postament*	12
−252146.823	+ 40745.670	Hamelwohrden	14(1.13)
−252481.9	+ 85236.9	Hartmanns Platz 2 bei Altenwalde	1
−253260.7	+ 27251.3	Dücker Mühle	1
−253330.680	+ 78044.072	Lüdingworth	13 (1)
−253341.2	+ 59778.5	Neuhaus	13
−253466.645	+ 46405.255	Oederquast	14 (13)
−253760.458	+137890.159	Wangeroog Kirchthurm 1841	12
−253761.219	+137885.395	Wangeroog Kirchthurm 1825	1
−253993.570	+137447.340	Wangeroog Leuchtthurm	12
−254111.467	+ 21379.258	Horst	14(1.13)
−254116.4	+ 68776.7	Otterndorf Telegr. 2	13 (1)
−255132.382	+ 28321.378	Süderau	14(1.13)
−255140.044	+ 62458.968	Belum	13 (1)
−255213.4	+ 83122.2	Franzburg	13 (1)
−255672.7	+ 84565.7	W. M.	13
−255854.879	+ 43048.694	Freiburg	14(1.13)
−255909.831	+ 33800.275	Borsfleth	14(1.13)
−256053.9	+ 77127.1	Altenbruch Glockenthurm	13
−256057.755	+ 84520.796	*Altenwalde Dreieckspunkt*	14 (13)
−256062.412	+ 84104.710	Altenwalde Thurm	14 (1)
−256062.6	+ 84523.8	Hartmanns Platz 1 bei Altenwalde	13 (1)

+ südlich	+ westlich		Nr.
−256068.452	+ 77121.280	Altenbruch Spitze 1	13 (1)
−256074.948	+ 77120.520	Altenbruch Spitze 2	13 (1)
−256475.570	+ 48300.484	Krummendeich	14 (13)
−256590.239	+ 53477.274	Balje	14 (13)
−256864.392	+ 29737.939	Krempe Kirchthurm Theodolithplatz	14
−256869.594	+ 29734.704	*Krempe Kirchthurm Knopfmitte*	14
−256894.943	+ 29816.213	Krempe Rathhaus	14(1.13)
−257722.645	+ 21033.196	Hohenfelde	14 (1)
−257779.043	+ 35720.649	Wevelsfleth	14(1.13)
−257996.3	+ 80031.5	Groden	13 (1)
−258999.430	+ 15611.901	Hönerkirchen	14 (1)
−259523.098	+ 26919.270	Neuenbrook	13 (1)
−259779.969	+ 40369.766	Brockdorf	14(1.13)
−259850.1	+ 81879.8	Ritzebüttel Giebelstange 1	13 (1)
−259856.6	+ 81874.9	Ritzebüttel Giebelstange 2	13
−260087.395	+ 33836.146	Neuenkirchen	14 (1)
−261165.6	+ 81311.2	Telegraph 1	13
−261493.6	+ 81196.0	Cuxhaven Leuchtthurm	13 (1)
−261726.308	+ 34724.581	Beyenfleth	14(1.13)
−262754.9	+ 83557.9	Döse	13 (1)
−263106.2	+ 45160.4	St. Margareth	13 (1)
−263709.405	+ 55146.302	Brunsbüttel	13
−263735.4	+ 82527.1	Kugelbake	13
−263938.8	+ 28538.6	Nordo Monument	1
−266194.2	+ 28106.7	Itzehoe Capellenthurm	1
−266552.254	+ 37340.507	Wilster	14(1.13)
−266570.905	+ 95074.316	Neuwerk Leuchtthurm	13 (1)
−266608.3	+ 27915.9	Itzehoe Lorenzthurm	1
−266676.4	+ 20206.5	Breitenberg	1
−266783.7	+ 27515.2	Itzehoe St. Jürgen	1
−269378.932	+ 14704.306	Kellinghusen	14 (1)
−270229.076	+ 61139.508	Marne	13 (1)
−274829.139	+ 44465.415	Burg	14
−285459.2	+ 56996.5	Meldorf Kirche	13
−285462.1	+ 57029.9	Meldorf Thurm	13
−289999.9	+ 70694.3	St. Clemens?	13

Nach Herrn Speer.

+ südlich	+ westlich	
− 29169.22	− 69845.92	Blankenburg kl. Thurm des Schlosses
− 48597.65	− 72765.42	Huyseburg südl. Thurm
− 48601.51	− 72801.72	Huyseburg Dreieckspunkt
− 58263.74	− 68692.30	Pabstorf
− 68389.41	− 69421.67	Schöningen Lorenz kl. N. Th.
− 68922.15	− 57009.42	Schöppenstedt
− 70834.36	− 40232.84	Wolfenbüttel Bibliothek
− 73051.43	− 37142.88	Thiede
− 74558.42	− 44006.13	Salzdahlum
− 81595.86	− 39052.44	Braunschweig Michael
− 82012.85	− 39646.19	Braunschweig Burg Thurm Südl. Sp.
− 82374.46	− 39742.76	Braunschweig Cathar.
− 80043.61	− 59654.03	Königslutter
− 90573.98	− 24624.61	Duttenstedt

[COORDINATEN IN DEN PARTIELLEN VERZEICHNISSEN.]

+ südlich	+ westlich		Nr.
+ 21058.0	+ 181.7	Hanstein	(2)
+ 15841.8	− 4334.3	Rusteberg	(2)
+ 10104.9	+ 1077.5	Gross Schneen	(2)
+ 7439.2	+ 1937.1	Oberjesa	(3)
+ 6467.9	+ 3812.6	Sieboldshausen	(1)
+ 5820.7	+ 1140.3	Niederjesa	(1)
+ 4235.9	+ 5291.5	Mengershausen	(2)
+ 2786.2	+ 3649.9	Rossdorf	(1)
− 500.4	+ 644.9	Göttingen Johannis Nordlicher Th.	(2)
− 710.822	+ 500.527	Göttingen Jacobi Th.	(2)
− 755.1	+ 3356.5	Gronde	(2)
− 2649.3	+ 4982.9	Elliehausen	(2)
− 3496.6	+ 355.6	Weende	(2)
− 3668.0	− 2418.3	Nicolausberg	(2)
− 3920.7	− 42384.3	Tettenborn	(2)
− 5019.756	− 0	*Meridianzeichen*	(10)
− 6069.3	+ 5071.8	Lenglern	(2)
− 6753.6	+ 1540.9	Bovenden	(2)
− 7666.3	− 1552.1	Plesse dünner Thurm	(2)
− 7694.6	− 1607.7	Plesse dicker Thurm	(2)
− 8034.0	+ 5837.8	Harste	(2)
− 9267.0	+ 224.2	*Bei Angerstein Theod.*	(2)
− 9886.6	+ 614.0	Angerstein	(2)
− 10182.2	+ 6325.9	Gladebeck	(2)
− 10857.1	+ 780.9	Kloster-Stein	(2)
− 11558.5	+ 4025.7	Wolbrechtshausen	(2)
− 11763.8	+ 440.1	Nörten	(2)
− 12278.5	+ 4922.3	Hevensen	(2)
− 14206.8	− 26903.1	Herzberg Schlossth.	(2)
− 14833.7	+ 6613.7	Lutterhausen	(2)
− 19653.2	− 4143.6	Nordheim Kirchthurm	(3)
− 21803.6	− 21516.2	Osterode Schlossth.	(2)
− 22212.1	− 21372.5	Osterode Marienth.	(2)
− 22216.8	− 20925.6	Osterode Vorstadt	(2)
− 30310.087	− 46418.626	*Brocken*	(8)
− 32767.4	− 15105.6	Baum bei Gittelde	(2)
− 34108.1	− 58534.7	Wernigerode Schloss	(3)
− 40469.4	− 33167.5	Thurm am Rammelsberge	(3)
− 40952.298	+ 7668.304	*Hils*	(9)

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 41699.4	— 32964.0	Goslar Thurm am Clausthor	(3)
— 41752.3	— 33730.4	Gosla Zwinger	(3)
— 41773.226	— 32710.553	Goslar Frankenberg Centrum	(3)
— 41904.0	— 15435.7	Schildberg	(4)
— 42037.6	— 33359.0	Goslar Marktthurm	(3)
— 42285.8	— 33752.4	Goslar Stephani	(3)
— 42332.7	— 33276.5	Goslar Jacobi südlicher Thurm	(3)
— 42343.7	— 33276.9	Goslar Jacobi nordlicher Thurm	(3)
— 42474.7	— 33195.3	Goslar Neuwerk südlicher Thurm	(3)
— 42486.3	— 33189.2	Goslar Neuwerk nordlicher Thurm	(3)
— 42537.7	— 33511.4	Goslar Hagelthurm	(3)
— 42878.1	— 34247.7	Goslar Siechhof	(3)
— 43132.6	— 36107.9	Sutmerthurm Centrum	(1)
— 43132.6	— 36107.9	Sutmerthurm Centr.	(3)
— 44865.8	— 47033.0	Abbenrode unsicher	(3)
— 44867.4	— 45052.1	Lochtum	(3)
— 45643.0	— 34761.3	Kloster Grauhof	(3)
— 46047.1	— 26834.7	Langelsheim	(3)
— 46801.7	— 42704.8	Vienenburg Ruine	(3)
— 46802.4	— 42802.3	Vienenburg lutherische Kirche	(3)
— 47204.1	— 30239.0	Jerstedt	(3)
— 47566.6	— 5200.2	Heber Platz 1	(3)
— 47666.9	— 5204.6	Heber Platz 2	(3)
— 47827.3	— 33626.1	Hahndorf	(3)
— 48105.0	— 40959.2	Wöltingerode	(3)
— 48129.0	— 37210.0	Immenrode	(3)
— 48643.1	— 4735.2	Lamspringe lutherische Kirche	(3)
— 49145.9	— 2823.5	Graste	(3)
— 49541.6	— 28322.2	Bredelem	(3)
— 49830.9	— 31335.7	Dörnten	(3)
— 49995.0	+ 1129.2	Platz bei Armenseul	(3)
— 50219.5	— 2096.7	Netze	(3)
— 50933.2	+ 8054.0	Alfeld	(1)
— 51957.7	— 1773.7	Harbarnsen	(3)
— 52421.2	— 28789.2	Haringen	(3)
— 53061.2	— 37993.1	Wehre	(3)
— 53238.0	— 27480.6	Upen	(3)
— 53240.6	— 4227.8	Evensen	(1)
— 53260.0	— 4173.6	Evensen	(3)
— 53362.7	— 12891.3	Bokenem lutherische Kirche	(1)
— 53382.5	— 12751.9	Bokenem lutherische Kirche	(3)
— 53390.6	— 30828.1	Otfresen	(3)
— 53567.2	— 9781.1	Story	(1)
— 53585.0	— 9667.7	Story	(3)
— 53639.6	— 6884.5	Gross Ilde	(3)
— 53732.2	— 2179.3	Sehlen	(1)
— 53746.0	— 2144.8	Sehlen	(3)
— 54018.7	+ 598.5	Sellenstedt	(1)
— 54032.9	+ 617.7	Sellenstedt	(3)
— 54303.9	— 11174.7	Bönnien	(3)
— 54369.7	— 9981.4	Bönnien	(1)
— 54439.9	+ 9812.0	Wettensen	(1)
— 54488.2	— 14463.3	Volkersheim spitzer Thurm	(1)
— 54497.2	— 14333.1	Volkersbeim spitzer Thurm	(3)
— 54602.5	— 14310.9	Volkersheim Kuppel Thurm	(3)
— 54640.5	— 31246.0	Bärenkopf Baum	(1)
— 54657.2	— 24846.6	Alten Walmoden	(3)
— 54669.9	— 31193.3	Bärenkopf	(3)
— 54717.4	+ 3431.4	Wernershöhe Platz 2	(1)
— 54740.3	— 32918.7	Liebenburg Kirchth.	(3)
— 54828.3	— 32940.0	Liebenburg Kirchtb.	(1)
— 54859.2	— 32902.5	Liebenburg Ruine	(3)
— 54954.3	— 8318.3	Bültum	(3)
— 54955.3	— 8319.8	Bültum	(1)
— 55054.5	— 32948.2	Liebenburg Ruine	(1)
— 55114.3	+ 2655.5	Wernershöhe Platz 1	(1)
— 55424.3	— 4234.8	Bodenburg Kirchth.	(1)
— 55427.3	— 4171.1	Bodenburg Kirchth.	(3)
— 55427.6	— 4539.8	Bodenburg Schloss	(1)
— 55430.7	— 4477.5	Bodenburg Schloss	(3)
— 55882.7	— 2985.1	Breinum	(3)
— 56062.5	— 45482.7	Horneburg?	(3)
— 56067.5	— 1393.8	Almenstedt	(3)
— 56067.5	— 4026.2	Ostrum	(3)
— 56333.4	— 8782.0	Upstedt	(3)
— 56402.7	— 167.8	Segeste	(3)
— 56411.3	— 25280.6	Ringelheim katholische Kirche	(3)
— 56537.1	— 25300.0	Ringelheim lutherische Kircho	(3)
— 56568.6	— 27943.5	Gitter am Berge	(3)
— 56671.9	— 11909.2	Werder	(3)
— 56690.2	— 9674.1	Nette	(3)
— 56927.1	— 21973.9	Sehlde	(3)
— 57255.3	— 4713.7	Wehrstedt	(3)
— 58253.2	— 40621.3	Burgdorf	(3)
— 58564.4	+ 818.1	Petze	(3)
— 58603.8	— 26502.7	Haberloh	(3)
— 59021.8	— 14440.7	Woldenberg Thurm	(1)
— 59861.6	— 20977.6	Gross Heerte	(3)
— 60571.3	— 42034.0	Kloster Heiningen	(1)
— 60571.3	— 42034.0	Kloster Heiningen	(3)
— 60758.5	— 32298.7	Beinum	(3)
— 60762.0	— 32299.8	Beinum	(1)
— 60928.1	— 26286.0	Steinlah	(3)
— 61054.9	— 37327.7	Klein Flöthe	(3)
— 61066.8	— 21898.9	Klein Elbe	(3)
— 61082.3	— 14064.5	Sottrum lutherische Kirche	(3)
— 61198.7	— 13766.6	Sottrum katholische Kirche	(3)
— 61767.9	— 19694.3	Badekenstedt	(3)
— 62222.1	— 36223.4	Gross Flöthe	(3)
— 62534.0	— 22261.0	Gross Elbe	(3)

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 62528.0	— 16343.6	Binder	(1)
— 63011.8	— 17263.8	Binder kleiner Thurm	(3)
— 63013.2	— 5266.4	Gross Düngen	(1)
— 63015.0	— 24570.0	Gustedt	(3)
— 63019.7	— 18220.8	Rehne	(3)
— 63027.0	— 6336.1	Klein Düngen	(1)
— 63096.6	— 13005.2	Derneburg gut	(1)
— 63499.8	+ 1315.0	Dickholzen	(1)
— 63516.0	— 6583.4	Heinde	(1)
— 63695.0	— 1058.0	Söhre	(1)
— 63751.5	— 8614.6	Llstringen	(1)
— 64030.2	+ 24351.6	Voldagsen	(1)
— 64297.6	— 17106.2	Wartgenstedt	(3)
— 64308.8	— 28515.1	Gebhardshagen	(3)
— 64312.7	— 28516.7	Gebhardshagen	(1)
— 64430.5	— 14829.2	Grastorf gross. Thurm	(3)
— 64830.7	— 3690.4	Itsum	(1)
— 64990.4	— 50246.9	Mönch-Vahlberg	(3)
— 65135.0	+ 1877.8	Marienrode	(1)
— 65153.2	— 5760.0	Leckstedt Schornstein 1	(1)
— 65178.0	— 675.6	Barienrode	(1)
— 65181.9	— 2692.6	Marienburg	(1)
— 65190.1	— 34333.0	Cramme	(3)
— 66025.3	— 32661.5	Bahrum	(3)
— 66528.7	— 30515.8	Gross Heerte	(1)
— 66543.7	— 30524.7	Gross Heerte	(3)
— 66568.8	— 16417.2	Luttern	(3)
— 66603.1	— 303.0	Ochtersum	(1)
— 67897.2	— 26969.6	Salder	(1)
— 68562.7	— 35469.0	Adersheim	(3)
— 68966.8	— 31834.4	Watenstedt	(1)
— 68979.8	— 31830.8	Watenstedt	(3)
— 69838.7	— 29923.5	Hallendorf	(1)
— 69851.0	— 29933.5	Hallendorf	(3)
— 70359.7	— 14634.4	Nettlingen	(1)
— 70629.7	— 40664.2	Wolfenbüttel	(1)
— 70626.8	— 40664.6	Wolfenbüttel Laternenthurm	(3)
— 70666.5	— 37105.8	Fümmelse	(3)
— 70917.3	— 18659.0	Berne	(1)
— 71536.6	— 28341.7	Engelnstedt	(1)
— 72190.7	— 31646.5	Bleckenstedt	(3)
— 72193.3	— 31648.2	Bleckenstedt	(1)
— 72218.9	— 15442.7	Bettrum	(1)
— 72906.3	— 16898.0	Klein Himstedt	(1)
— 73016.5	— 32592.7	Beddingen	(1)
— 73285.4	— 23302.2	Barbeke	(1)
— 73413.1	— 17525.6	Gross Himstedt	(1)
— 73683.671	+129245.647	*Dörenberg Centrum*	(5)
— 73683.739	+129245.738	*Dörenberg Platz* 1 *Junius* 1829	(5)
— 73683.924	+129245.835	*Dörenberg Platz* 2 *August.* 1829	(5)
— 73803.0	— 32108.1	Sauingen	(1)
— 73811.9	— 32116.1	Sauingen	(3)
— 74958.7	— 31985.6	Ufingen	(1)
— 75026.2	— 24884.0	Lengde	(1)
— 75445.3	— 50970.0	Lucklum	(3)
— 76053.0	— 35874.5	Geitelde	(1)?

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 76525.1	— 28866.9	Fallstedt	(1)
— 76812.8	— 52482.0	Pavillon bei Lucklum	(1)
— 76817.1	— 52490.0	Pavillon bei Elm	(3)
— 77112.3	— 23967.8	Klein Lafferde	(1)
— 77695.7	— 35171.7	Stiddium	(1)
— 77816.2	— 26837.7	Bodenstedt	(1)
— 78686.0	— 36629.4	Brolzen	(1)
— 79005.9	— 31896.2	Sonnenberg	(1)
— 79071.4	— 34802.2	Timmerlah	(1)
— 79599.2	— 26912.0	Liedingen	(1)
— 79724.4	— 18939.4	Gadenstedt	(1)
— 80410.0	— 53423.3	Appenrode	(3)
— 81012.7	— 22595.7	Münstedt	(1)
— 82615.333	+ 99921.162	*Nonnenstein*	(5)
— 82786.0	— 26689.6	Sierse	(1)
— 82985.4	— 32037.8	Weddenstedt	(1)
— 86698.2	— 14338.9	Schwicheld	(1)
— 89734.515	+190107.268	Bentheim südlicher Schlossthurm	(5)
— 89755.247	+190019.118	*Bentheim Theodol.* 2.	(5)
— 89755.414	+190021.843	*Bentheim Theodol.* 3.	(5)
— 89757.859	+190025.408	*Bentheim Signal Centrum*	(5)
— 89763.099	+190019.881	*Bentheim Theodol.* 1.	(5)
— 89811.4	+189989.1	Bentheim nordlicher Schlossthurm	(5)
— 92684.6	+117037.0	Theodolithplatz bei der Capelle 1829	(6)
— 93577.384	+ 13880.010	Hannover Aegidius	(11)
—100049.4	+ 34813.9	Wunstorf	(1)
—102215.3	+ 19580.1	Engelbostel	(1)
—103066.4	+ 53849.6	Loccum	(5)
—103698.860	+ 8604.931	Isernhagen	(1)
—104220.2	— 17796.2	Ütze	(1)
—105528.0	+ 48539.7	Rehburg	(5)
—105604.0	— 27592.4	Meinersen	(1)
—107147.6	+ 5943.9	Burgwedel	(1)
—107381.6	— 24705.0	Paese	(3)
—108665.633	+ 32691.117	Neustadt am Rübenberge 1838	(1)
—109383.6	+126847.6	Vörden Thurm	(5)?
—109660.2	+ 59116.3	Stolzenau	(5)
—110930.1	+ 12606.1	Bissendorf	(1)?
—113777.4	+ 29665.5	Basse	(1)?
—114556.0	+ 17713.2	Brelingen	(1)?
—114710.292	+148300.629	*Quekenburg Standpunkt*	(5)
—114710.429	+148300.579	*Quekenbury Signal Centrum*	(5)
—114804.6	+ 30929.1	Mariensee	(1)?
—115363.340	+117156.488	*Mordkuhlenberg Sign.*	(5)
—115363.491	+117156.517	*Mordkuhlenberg Standpunkt*	(5)
—116269.8	+ 17858.3	Brelingerberg	(1)?
—117302.183	+ 73520.611	*Knickberg*	(5)
—117302.185	+ 73520.620	*Knickberg*	(9)
—119261.3	+ 25180.8	Mandelsloh	(1)
—121842.577	— 9118.469	Celle Schloss, südwestliche Kuppel	(1)

+ südlich	+ westlich		Nr.
—121866.633	— 9113.977	Celle Schloss, Uhrthurm Spitze	(1)
—121888.429	— 9101.020	Celle Schloss, nordöstliche Kuppel	(1)
—121931.269	— 9338.801	Celle Stadtkirche Spitze	(1)
—125440.662	+183267.411	*Kirchhesepe Standpunkt 2*	(5)
—125441.259	+183265.831	*Kirchhesepe Standpunkt 1*	(5)
—125441.738	+183266.132	*Kirchhesepe Centrum*	(5)
—128135.472	+ 2493.312	Winsen	(1)
—138674.136	+ 63178.061	Asendorf, Centrum	(1)
—138674.291	+ 63178.094	*Asendorf, Standpunkt*	(5)
—138674.918	+ 63178.041	*Asendorf, Centrum*	(5)
—139536.775	+ 54838.140	Bücken	(1)
—140098.1	+184209.9	Wesuwe	(5)
—142250.437	+ 87901.043	Twistringen Centrum	(1)
—142250.952	+ 87900.139	*Twistringen Standpunkt*	(5)
—142251.447	+ 87900.521	*Twistringen Centrum*	(5)
—142478.0	— 1313.4	Bergen	(1)
—147939.4	+128491.0	Cloppenburg	(5)
—148776.5	+163222.1	Sögel Thurm	(5)
—150829.966	+ 72072.608	Heiligenfelde	(1)
—153042.9	+162456.4	Windberg Th. pl.	(5)
—158606.9	+177634.4	Steinbild	(5)
—172369.3	+175166.1	Aschendorf Klosterkirche	(5)
—172679.7	+175093.5	Aschendorf Pfarrkirche	(5)
—175839.7	+180774.3	Rhede	(5)
—178512.9	— 43974.2	Alt Mediogen (spitzes Dach ?)	(1)
—191597.289	— 30574.411	Lüneburg Michaelis	(7)
—203523.9	+173477.5	Oldersum	(6)
—203944.1	+200867.7	Appingdam	(6)
—204710.099	+ 94432.229	Sandstedt	(1)
—205232.0	+ 83145.8	Bramstedt	(1)
—206040.464	— 41045.627	Lauenburg Sign.	(7)
—207906.2	+204523.4	Holwierda	(6)
—208657.1	+187002.0	Twixlum	(6)
—209915.8	+193450.4	Rysum	(6)
—211092.4	+192812.4	Loquard	(6)
—212135.7	+192308.7	Campen spitz. Thurm	(6)
—212159.1	+192352.5	Campen stumpfer Th.	(6)
—213208.1	+180812.3	Suiderhusen	(6)
—213316.0	+189633.7	Wollzeden	(6)
—214389.0	+180200.0	Loppersum	(6)
—214618.7	+192619.7	Upleward	(6)
—215500.5	+192201.1	Hamswehrum	(6)
—215948.5	+189168.5	Pewsum	(6)
—216200.5	+191262.7	Groothusen	(6)
—216868.066	+ 16083.566	Buxtehude grosser Thurm	(1)
—217680.1	+185219.1	Uttum	(6)
—218583.1	+191324.9	Manschlagt (dicker ?) Thurm	(6)
—218660.7	+163683.7	Aurich Schlossthurm	(6)

+ südlich	+ westlich		Nr.
—219023.1	+ 83055.8	Bexhövede	(1)
—219666.3	—188832.6	Visquard	(6)
—219867.3	+ 97705.9	Atens	(1)
—219996.8	+186077.8	Eilsum	(6)
—220341.1	+ 88944.3	Wulstorf	(1)
—220468.4	+184004.0	Grimmersum	(6)
—220530.4	+ 14211.8	Estebrügge	(1)
—220921.4	+ 42609.8	Mulsum	(1)
—221353.6	+191167.7	Pilsum	(6)
—222065.850	+104932.032	Stolhum	(1)
—222932.2	+ 74270.1	Alt Luneburg	(1 :)
—222950.8	+ 17379.0	Jork	(1)
—223245.1	+189040.5	Gretsiel spitzer Th.	(6) : :
—223264.4	+189042.5	Gretsiel dicker Th.	(6) : :
—223492.5	+ 89632.7	Gestendorf	(1)
—223585.7	+ 16792.9	Borstel	(1)
—223808.9	+ 93277.5	Blexen	(1)
—223843.0	+ 85384.3	Schiffdorf	(1)
—224202.6	+ 21604.7	Mittelnkirchen	(1)
—225108.2	+ 6643.6	Nienstedten	(1)
—225218.6	+177119.8	Marienhave	(6)
—226157.1	+ 22211.8	Steinkirchen	(1)
—226323.5	+ 27033.0	Agathenburg	(1)
—226384.6	+177604.9	Osteel	(6)
—226566.6	+ 72494.0	Ringstedt	(1)
—227362.9	+ 22280.4	Grünendeich	(1)
—228832.5	+ 16189.0	Wedel	(1)
—229055.0	+104710.2	Burhave	(1)
—229558.8	+ 25482.2	Hollern	(1)
—229673.9	+ 45730.5	Oldendorf	(1)
—230661.4	+ 30777.7	Stade Wilhadi	(1)
—230810.8	+ 30884.9	Stade Cosmae	(1)
—230903.0	+ 25813.6	Twilenfleth	(1)
—231094.9	+ 30827.7	Stade Rathhaus	(1)
—232371.3	+ 16772.0	Holm Centr.	(1)
—233112.0	+ 94327.0	Jmsum	(1)
—233254.2	+180010.6	Bargerbuhr?	(6)
—233438.0	+180795.1	Norden Sp.	(6)
—233480.1	+181420.0	Norden Sp.	(6)
—233526.5	+181326.0	Norden st. Th.	(6)
—233556.5	+181316.4	Norden feine Sp.	(6)
—233572.7	+ 86148.7	Depstedt	(1)
—233812.0	+ 72909.9	BederkesaGlockenth.	(1)
—233820.0	+ 72881.9	Bederkesa Uhrthurm	(1)
—234492.9	+168882.5	Arle	(6)
—234786.9	+ 55986.6	Lamstedt	(1)
—235947.5	+ 7503.2	Rellingen	(1)
—236415.8	+138899.5	Meddoog	(1)
—236652.7	+ 30626.0	Butzfleth	(1)
—236993.6	+ 94835.3	Wremen	(1)
—237444.3	+ 21232.1	Haselau	(1)
—238299.4	+ 75255.3	Flögeln	(1)
—239038.7	+ 92300.6	Mulsum	(1)
—239374.2	+133939.0	Hohenkirchen	(1)
—239384.3	+147232.8	Werdum	(1)
—239655.6	+ 18902.1	Uetersen Kirchthurm	(1)
—240245.8	+ 69873.7	Steinau	(1)
—241249.7	+ 90799.8	Dorum	(1)
—242476.6	+ 93498.9	Padingbüttel	(1)

+ südlich	+ westlich		Nr.
−242773.3	+ 36827.3	Drochtersen	(1)
−235431.6	+ 29726.7	Colmar	(1)
−245551.2	+ 90763.0	Cappeln	(1)
−245775.5	+ 87628.9	Midlum	(1)
−245821.6	+ 24600.1	Neuendorf	(1)
−246532.7	+ 67702.1	Oster Ilienworth	(1)
−246892.5	+ 76614.2	Wanna	(1)
−247388.5	+ 63676.7	Bülkau	(1)
−247703.2	+ 36752.9	Krautsand	(1)
−250722.6	+ 69097.6	Neuenkirchen	(1)
−250784.2	+ 65963.9	Osterbruch	(1)
−251343.0	+ 34554.1	Glückstadt kleiner Thurm (Dänische Station)	(1)
−251399.8	+ 30139.2	Herzhorn	(1)
−251523.1	+ 11052.9	Barmstedt	(1)
−251573.4	+ 34126.7	Glückstadt Kirchthurm	(1)
−252146.1	+ 40748.4	Hammelvörden	(1)
−253330.1	+ 78043.0	Lüdingworth	(1)
−254110.4	+ 21378.6	Horst	(1)
−254115.7	+ 68778.6	Otterndorf	(1)
−255131.8	+ 28321.4	Süderau	(1)
−255141.2	+ 62459.0	Belum	(1)
−255213.6	+ 83123.0	Franzenburg	(1)
−255856.6	+ 43050.3	Freiburg	(1)
−255908.9	+ 33800.4	Borsfleth	(1)
−256062.6	+ 84523.8	Hartmanns Platz 1 bei Altenwalde	(1)
−256062.7	+ 84104.8	Altenwalde	(1)
−256069.1	+ 77120.7	Altenbruch Spitze 1.	(1)
−256075.2	+ 77119.1	Altenbruch Spitze 2.	(1)
−256894.2	+ 29816.6	Crempe	(1)
−257722.7	+ 21032.0	Hohenfelde	(1)
−257778.1	+ 35721.5	Wevelsfleth	(1)
−257996.5	+ 80031.2	Groden	(1)
−258998.8	+ 15610.9	Hörnerkirchen	(1)
−259523.9	+ 26920.1	Neuenbrook	(1)
−259779.2	+ 40370.0	Brockdorf	(1)
−259854.2	+ 81878.1	Ritzebüttel Giebelstange 1	(1)
−260086.9	+ 33836.4	Neuenkirchen	(1)
−261494.4	+ 81196.7	Cuxhaven Leuchtthurm	(1)
−261725.0	+ 34726.2	Beienfleth	(1)
−262754.7	+ 83558.8	Döse	(1)
−263108.1	+ 45161.9	St. Margareth	(1)
−266552.1	+ 37341.8	Wilster	(1)
−266569.396	+ 95074.242	Neuwerk Leuchtthurm Cent.	(1)
−269380.6	+ 14702.3	Kellinghusen	(1)
−270223.4	+ 61150.8	Marne	(1)

Zur Erläuterung der Bedeutung der Coordinaten ist folgendes zu bemerken.

Will man sich nur im Allgemeinen einen Begriff davon machen, so kann man dieselben so ansehen, dass die erste Zahl anzeigt, wie viel der betreffende Ort südlich (beim + Zeichen), oder nordlich (beim — Zeichen) von der Göttinger Sternwarte liegt, die zweite Zahl hingegen, wie viel westlich (bei +) oder östlich (bei —).

Es ist aber dabei schon die Krümmung der Erdoberfläche dergestalt berücksichtigt, dass bei Auftragung dieser Coordinaten auf eine ebene Fläche das Bild ein *conformes*, d. i. in den kleinsten Theilen ähnliches wird. Das Nähere darüber enthalten meine geodätischen Abbandlungen zum Theil schon jetzt, und spätere Abbandlungen werden dies noch ausführlicher entwickeln.

Der genaue Anfangspunkt der Coordinaten in der Sternwarte ist übrigens der Mittelpunkt der Achse des Reichenbachschen Meridiankreises.

Als Einheit der Coordinaten ist diejenige Lineargrösse gewählt, die nach der besten im Jahr 1821 vorhandenen Kenntniss als der zehnmillionste Theil des Quadranten des Erdmeridians gelten konnte, nemlich die Länge von 443,307885 pariser Linien, was etwas, obwohl nur sehr wenig, von dem sogenannten legalen französichen Meter verschieden ist. Dies letztere war nemlich bekanntlich festgesetzt zu 443,296 pariser Linien. Obgleich in späterer Zeit (seit 1821) noch neuere Bestimmungen des zehnmillionten Theils des Erdmeridianquadranten gewonnen sind und zwar immer entschieden grösser als das eben angeführte gesetzliche Meter), so habe ich doch vorgezogen, bei der einmal von mir gewählten Einheit zu bleiben, da man jede einzelne Zahl leicht in jede beliebige andere Einheit umsetzen kann, zu welcher das Verhältniss einmal bekannt ist.

BEMERKUNGEN.

Der Einheit der Coordinaten so wie den verschiedenen Reductionen der Messung sollten vermuthlich die von WALBECK gefundenen Endimensionen zu Grunde gelegt werden.

WALBECK et BRUMMER. De forma et magnitudine telluris. Aboae 1819 pag. 16: 'Gradus medius seu $\frac{1}{90}$ para Quadrantis Meridiani = 57009',76. Ellipticitas = $\frac{1}{302,78}$' [Handschriftliche Bemerkung von GAUSS: mittlere Meridiangrad] = '57009',7584. Der Meter also = 443',307885. Verhältniss = 37299:37300 Logarithm = 0,00001164.'

GAUSS. Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona. Göttingen 1828. Art. 20. — 'Wenn man meine Dreiecke als auf der Oberfläche eines elliptischen Sphaeroids liegend, dessen Dimensionen die von WALBECK aus der Gesammtheit der bisherigen Gradmessungen abgeleiteten sind, und welches nach unsrer besten gegenwärtigen Kenntniss sich am vollkommensten an die wirkliche Gestalt *im Ganzen* anschliesst (Abplattung $\frac{1}{302,76}$, der dreihundertsechzigste Theil des Erdmeridians = 57009,746 Toisen) berechnet, und dabei von der Polhöhe von Göttingen = 51° 31' 37"85 ausgeht'..

Hienach scheint GAUSS mehrfach mit der Abplattung $\frac{1}{302,76}$ statt mit der WALBECKschen $\frac{1}{302,78}$ gerechnet zu haben und in der That liegt auch mehren der noch im handschriftliche Nachlass vorhandenen Hülfstafeln die erstere Zahl zu Grunde.

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen 1830 April 18 'Zweite Hülfstafel, Anmerkung: 'Bei früher von mir mitgetheilten Coordinaten ist die Einheit $\frac{1}{10000000}$ des Erdquadranten nach WALBECK's Dimensionen; um jene also in solche zu verwandeln, bei denen die Einheit $\frac{1}{10000000}$ des Erdquadranten nach SCHMIDT's neuesten zum Grunde liegt, müssen jene erst mit $\frac{57009758}{57008551}$ oder mit $1+\frac{1}{47245}$ multiplicirt werden.'

GAUSS. Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona Art. 19. 'Nach der trigonometrischen Verbindung der Sternwarten von Göttingen und Altona liegt letztere 115163,725 Toisen nordlich, 7,211 Toisen westlich von jener. Diese Zahlen beziehen sich auf die Plätze der Meridiankreise; sie gründen sich auf den Werth der Dreiecksseite Hamburg-Hohenhorn 13841,815 Toisen, und diese auf die von Hrn. Prof. SCHUMACHER in Holstein im Jahre 1820 gemessenen Basis. Da jedoch die Vergleichuug der dabei gebrauchten Messstangen mit der Normaltoise noch nicht *definitiv* vollendet ist, so wird obige Entfernung in Zukunft noch in demselben Verhältniss abzuändern sein, wie die Basis selbst, welche Veränderung aber jedenfalls nur sehr gering sein kann.'

Herr Geheimer Etatsrath ANDRAE in Copenhagen bemerkt über die Revision der Basis in einem Schreiben vom 5 März 1865 abgedruckt im Generalbericht über die mitteleuropäische Gradmessung für das Jahr 1864 Seite 6. 7. 'Die von SCHUMACHER angegebene Länge der *Braacker Basis*: 3014,5799 Toisen, welche bei den früheren Berechnungen sowohl der Dänischen als auch der Hannöverschen unter der Leitung von GAUSS ausgeführten Triangulationen angewendet wurde, konnte nur als ein vorläufiges Resultat der Basismessung angesehen werden, da die Reduction auf den Meeresspiegel und mehrere andere Correctionen noch nicht berücksichtigt waren. Da diese Reductionen an Grösse beträchtlich die Unsicherheiten der Messungen selbst, die mit grosser Sorgfalt ausgeführt sind, übersteigen, war eine neue Bestimmung nothwendig und Herr Professor Dr. PETERS in Altona hat auch die Güte gehabt, eine ausführliche, mit der grössten Genauigkeit durchgeführte Berechnung sämmtlicher Correctionen vorzunehmen, durch welche die Länge der Basis sich nun stellt wie folgt:

a. Die Länge von 1505 Messstangen ohne Correction	3010,00000 Toisen
b. Summe der mit den Glaskeilen gemessenen Intervalle und der in Betracht kommenden ganzen und halben Durchmesser der Ablöthungs-Cylinder .	+ 3,58389 T.
c. Länge der Ergänzungsstange	+ 1,22106 T.
d. Correction wegen Neigung der Ablöthungs-Cylinder gegen die Lothlinie .	− 0,00008 T.
e. Correction wegen Abweichung der Stangen vom Alignement	− 0,00051 T.
f. Correction wegen fehlerhafter Längen der Messstangen	− 0,10245 T.
g. Correction wegen Abweichung der Temperatur der Messstangen von 13° R.	− 0,19906 T.
h. Reduction auf die Oberfläche des Meeres	− 0,02264 T.
Länge der Braacker-Basis nach der neuen Berechnung	= 3014,48021 Toisen

Es findet sich aber auch in dieser Berechnung ein schwacher Punkt, nemlich die sub *g* angeführte Correction wegen der Temperatur der Messstangen. Eine mit Abbildungen versehene Beschreibung des bei der Basismessung angewandten Apparats hat Schumacher in der Schrift: 'Schreiben an Dr. Olbers in Bremen etc. etc., Altona 1821' veröffentlicht, und man wird daraus ersehen, dass die Temperaturen nicht durch Metallthermometer, sondern durch gewöhnliche, eingelegte Thermometer bestimmt sind. Dies ist nun an und für sich ein misslicher Umstand, aber viel schlimmer stellt sich die Sache, da die Ausdehnbarkeit der Stangen nur aus einigen im Felde vorgenommenen Messungen der Stangenlängen am Abend und am Morgen abgeleitet wird. Es kann aber diesem Uebel abgeholfen werden. Im Jahre 1853 wurde nemlich die Stange No. IV. des Schumacherschen Basisapparats nach Pulkowa gebracht, um direct mit den dort gesammelten Etalons verglichen zu werden. Bei dieser Gelegenheit wurde nun auch die Ausdehnung dieser Stange für 100° erhalten, und wenn man den von Struve (Siehe 'Arc du méridien entre le Danube et la mer glaciale' pag. 51) angegebenen Werth der Ausdehnungscoefficienten berechnet, dann erhält man für die Correction sub *g*: − 0,22812 statt − 0,19906.

Mit dieser Berichtigung, welche auch von Professor Peters adoptirt wird, findet man dann die Länge der *Braacker Basis*:

= 3014,451 Toisen,

und dieser Werth muss als der *definitive* betrachtet werden. Ich füge nun hinzu, dass die Angabe dieser Toisen auf der Vergleichung mit der Pulkowaer Fortin beruhe; da diese aber mit der Bessel'schen Toise bis auf eine verschwindende Kleinigkeit übereinstimmt, kann die Länge auch füglich als in Bessel-schen Toisen ausgedrückt angesehen werden.'

Obiges Coordinaten-Verzeichniss ergibt für die Länge der Basis 5875,3614 der dort angewandten Einheiten oder 3014,5757 Toisen bei einem Erdmeridian von 360 × 57009,746 Toisen.

Eduard Schmidt. Gauss an Schumacher: Göttingen 1830 April 30. 'Um Ihr Vertrauen zu Schmidt's Rechnung zu vergrössern, bemerke ich, dass er die zwei Hauptelemente der Erddimensionen viermal berechnet hat, — — Das Resultat (IV) ist mir von ihm handschriftlich mitgetheilt und dasselbe was meinen neuen Hülfstafeln zum Grunde liegt, nemlich Abplattung $\frac{1}{297,732}$; $\frac{\text{Erd-Quadrant}}{90} = 57008^{T}551$.'

Bessel. Ueber einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seinen Einfluss auf die Bestimmung der Figur der Erde.' Astronomische Nachrichten Nr. 438 Band 19. Seite 116. 1841 December 2. 'Mittlere Grad des Meridians = 57013,109 Toisen, halbe grosse Axe a = 3272077,14 Toisen, halbe kleine Axe b = 3261139,33 Toisen, $a:b$ = 299,1528 : 298,1528'

Bei der Anwendung der in obigen Verzeichnissen angegebenen Coordinaten hat man diese also vorläufig, ehe die Basis und die Verbindungsdreiecke bis *Hamburg — Hohenhorn* von Neuem gemessen sind, mit folgendem Correctionsfactor zu multipliciren:

$\frac{3014,48021}{3014,5757}$ = num(log = — 0,00001376) für die Basislänge nach PETERS und für die von GAUSS in der 'Breitenbestimmung' wie oben angegebenen Erddimensionen,

$\frac{3014,451}{3014,5757}$ = num(log = — 0,00001797) für die Basislänge nach PETERS und ANDRAE und für die von GAUSS in der 'Breitenbestimmung' wie oben angegebenen Erddimensionen,

$\frac{3014,48021}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57009,7584}$ = num(log = — 0,00001386) für die Basislänge nach PETERS und für WALBECK's Erddimensionen,

$\frac{3014,451}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57009,7584}$ = num(log = — 0,00001806) für die Basislänge nach PETERS und ANDRAE und für WALBECK's Erddimensionen,

$\frac{3014,48021}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57008,551}$ = num(log = — 0,00000466) für die Basislänge nach PETERS und für SCHMIDT's IV. Erddimensionen,

$\frac{3014,451}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57008,551}$ = num(log = — 0,00000887) für die Basislänge nach PETERS und ANDRAE und für SCHMIDT's IV. Erddimensionen

$\frac{3014,48021}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57013,109}$ = num(log = — 0,00003938) für die Basislänge nach PETERS und für BESSEL's Erddimensionen,

$\frac{3014,451}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57013,109}$ = num(log = — 0,00004359) für die Basislänge nach PETERS und ANDRAE und für BESSEL's Erddimensionen.

Die von SCHMIDT und die von BESSEL berechneten Erddimensionen setzen die Längenangabe von SCHUMACHER über dessen Braacker Basis voraus, eine neue Berechnung der von ihnen in Betracht gezogenen Gradmessungen würde bei dieser berichtigten Basislänge etwas abweichende Zahlen für die Erddimensionen ergeben, die aber durch die bald zu erwartende Beendigung mehrer neuen Gradmessungen auch in kurzer Zeit durch bessere Bestimmungen ersetzt werden müssen.

Die hier im Abdruck aus den Partial-Verzeichnissen noch besonders aufgenommenen Coordinaten, sind entweder dieselben wie im General-Verzeichniss oder beruhen auf weniger genauen Bestimmungen, können aber zur Erläuterung der nachfolgenden 'Abrisse' dienen. In GAUSS Nachlass befinden sich von den Partial-Verzeichnissen nur Nro. 1 bis 11. Eine neue Vergleichung ergab mir die Berichtigungen:

im General-Verzeichniss steht: — 26619,9 — 12689,5 Lauenberge
im Partial-Verzeichniss (3) steht: — 26619,9 + 12689,5 Lauenberge

— 233491,171 + 181317,782 Norden Thürmchen auf hoher Kirche. Nr. 12.
— 249451,172 + 162280,007 Langeoog F. J. PAULS Haus östlicher Giebelstock. Nr. 12.

Zur leichtern Wiedererkennung der in dem Coordinaten-Verzeichniss angegebenen Punkte kann man die auf diese Vermessung gegründete 'PAPEN'sche Karte vom Königreich Hannover' mit Vortheil benutzen.

Die Überschriften + südlich und + westlich habe ich, um den Rechner ein Missverstehen der Zeichen sicherer vermeiden zu lassen, hinzugefügt.

SCHERING.

ABRISSE

DER AUF DEN VERSCHIEDENEN STATIONEN DER GRADMESSUNG 1821. 1822. 1823 UND DEREN FORTSETZUNG BIS JEVER 1824. 1825 FESTGELEGTEN RICHTUNGEN.

STERNWARTE

−5.242	+0.005	Theodolithplatz 1821
−5.507	0	Theodolithplatz 1823

Die Richtungen sind alle auf den Platz von 1823 reducirt.

0°	0′	2″614	Südliches Meridianzeichen
10	12	42.475	Meisner Heliotrop
64	1	18.020	Hohehagen (Platz von 1823)
180	0	0.000	Nordliches Meridianzeichen

NORDLICHES MERIDIANZEICHEN

−5019.756 −0.133

0°	0′	5″772	*Sternwarte, Meridianspalt*
0	23	54.606	Hanstein
1	38	36.606	Göttingen, Albani
11	9	10.606	Göttingen, Mariae
13	9	0.606	Weende
18	9	22.606	Klein Schneen
18	21	36.606	Siboldshausen
19	9	56.606	Backhaus Pavillon
21	20	26.606	Rosdorf
27	11	2.606	Volkerode
29	45	32.372	Mengershausen
35	13	4.606	Baum bei Mongershausen
38	12	9.606	Grondo
43	23	33.272	Baum
48	6	29.272	Baum an der Mündner Chaussée
48	19	41.527	*Hohehagen Postament* (1821)
51	41	52.606	Hetgershausen, Kanten des Thurms
51	42	54.606	
64	33	26.606	Elliehausen
101	41	24.606	Lenglern
138	22	10.606	Bovenden
145	51	24.606	Hevensen
148	22	51.606	Wolbrechtshausen
150°	13′	56″606	Parensen
150	22	31.606	Baum auf der Weper
158	10	54.606	Häuschen oberhalb Bovenden
160	13	18.606	Moringen
167	26	38.606	Grossenrode
167	57	11.021	*Hils, Postament*
358	30	30.606	Kanten des Thibautschen Gartenhauses
358	32	36.606	
358	42	5.606	

HOHEHAGEN

+6059.889	+12447.734	Hauptplatz von	1821	(1)
+6059.493	+12448.193	Nebenplatz von	1821	(2)
+6059.878	+12447.746	Platz von	1823	(3)

Die beigefügten Zahlen (1), (2), (3) bezeichnen die Standpunkte, von wo aus die Schnitte gemacht sind, die mit Curhivbuchstaben bezeichneten Richtungen sind am Platz (3) gemachte oder darauf reducirte Schnitte.

3°	47′	52″920	Meensen (3)
55	59	40.490	*Hercules*
64	0	39.064	Burghasungen (1)
41	43	53.800	Landwehrhagen (1)
41	57	7.800	Lutternberg (1)
165	22	49.800	Wolfstrang (1)
185	48	16.262	*Hils*
186	37	13.800	Hube, Durchschnitt (1)
193	32	13.161	Ochsenberg (3)
197	34	49.298	*Beinberg* (1)
211	2	6.155	Echte (?) (2)
212	19	44.155	Nordheim, kleiner Thurm (2)
212	31	26.155	Nordheim, Rathhaus (2)
212	50	7.155	Nordheim, Kirchthurm (2)
225	33	53.612	Plesse dünner Thurm (1 u. 3)
225	37	14.064	Hetgershausen, Kanten des Thurms (1)
225	38	26.064	
225	38	14.261	Hetgershausen, Fahnenstange (3)
226	40	18.392	Windmühle bei Clausthal (1)

228°	20′	0″312	*Meridianzeichen*
229	13	52.161	Hägerhof (3)
231	40	52.064	Weende (1)
233	8	35.064	Gronde (1)
234	6	21.800	Warte hinter Clausberg (1)
236	48	3.612	Clausborg (1. 3)
238	17	27.103	*Brocken*
240	3	5.078	Achtermannshöhe (3)
240	18	53.161	Baum (3)
240	27	32.064	Göttingen Jacobi (1)
240	36	48.064	Göttingen Mariae (1)
240	54	56.064	Roringen (1)
240	55	54.161	Göttingen Johannis, nordl. Th. (3)
240	59	3.064	Göttingen Johannis, südl. Th. (1)
241	14	5.064	Göttingen Rathhausthurm (1)
241	45	43.064	Göttingen Albani (1)
241	57	35.064	Kanten des Thibautschen Gartenhauses (1)
241	59	51.064	
242	0	31.064	
242	13	38.064	Oesterley's Hinterhaus (1)
242	45	48.064	Backhaus Pavillon (1)
243	1	18.161	Kanten von Reitemeyer's Gartenhaus (3)
243	2	37.161	
243	3	11.161	
243	48	5.064	Jägers Gartenhaus (1)
244	1	20.682	*Sternwarte (Platz von 1821)*
244	19	3.161	Schorsteine des deutschen Hauses (3)
244	21	25.161	
248	6	54.800	Baum bei Mengershausen (1)
250	47	44.612	Rosdorf (1. 3)
251	0	9.362	Dreckwarte (1. 3)
252	0	51.161	Landwehrschenke, Südöstl. Kante (3)
253	4	16.064	Geismar (1)
261	13	47.800	Dimarder Warte (1)
266	11	15.800	Wehnder Warte (bei Duderstadt) (1)
268	47	18.112	Niederjesa (1. 3)
272	16	46.160	Südliche Gleiche (3)
272	19	24.064	Südliche Gleiche Spitze Ruine (1)
172	30	1.800	Reinhausen, Amtshaus, mittelstes Fenster (1)
272	42	18.800	Siboldshausen (1)
279	22	54.932	Ballenhausen? (1)
284	6	34.064	Dramfelde (1)
290	47	16.235	Dünwarte (1. 3)
293	17	36.800	Chausséo jenseits Heiligenstadt (1)
295	11	38.064	Jühnde (1)
322	50	21.480	Helmshausen (1. 3)
324	30	25.453	*Inselsberg (Enckes Platz 1821)* (1)
324	31	25.536	*Inselsberg (Gerlings Platz 1823)*
337	36	45.155	Boineburg Steinhaufen (1)
337	38	30.470	Boineburg Erhöhung (1)
346	58	52.387	*Meisner, Hessischer Dreieckspunkt*
348	10	48.920	Bäume auf dem Meisner (3)
348	27	46.920	

HILS

— 40952.298 + 7668.304

5°	48′	19″302	*Hohehagen*
27	42	9.969	Wolfsstrang
43°	37′	6″741	Erichsburg
143	19	39.741	Hohenbüchen
157	11	52.373	*Deister*
157	12	48.510	Baum am Deister
157	14	58.510	Zweiter Baum daselbst
164	43	59.452	*Lüderssen*
165	24	4.510	Elze
165	46	56.510	Thurm
167	50	32.510	Brüggen
169	59	13.510	Limmer?
172	17	37.155	*Brelingerberg*
172	30	16.581	Hannover Neustädter Thurm
172	50	28.581	Hannover Kreuzthurm
173	0	28.140	*Hannover Marktthurm*
173	16	6.890	*Hannover Aegidii*
219	35	45.128	Beinberg Signal
230	44	21.636	Wohlenberg
231	10	29.578	*Lichtenberg*
231	19	41.608	Lichtenberg Ruine
239	25	15.741	Warte
281	7	52.448	*Brocken*
288	8	30.741	Kleines Haus auf einem Harzberge
288	10	36.741	Grosses Haus ebendaselbst
304	2	36.065	Sebexen
304	15	59.741	Grosses Haus, Mittelster Schorstein
304	26	4.741	Neukrug
304	36	8.741	Chausséehaus
305	8	12.521	Calefeld
307	57	48.741	Echte
337	5	31.302	Höckelheim
337	54	44.906	Stöckheim
338	32	50.510	Sudheim
341	40	3.573	Heliotropplatz
344	24	54.741	Plesse, dicker Thurm
344	31	1.741	Plesse dünner Thurm
344	38	6.144	*Eimbeck*
347	50	52.719	Hügel
347	57	11.630	*Meridianzeichen*
348	51	26.636	Iber
349	54	2.015	*Göttingen Jacobi*
353	7	1.741	Hanstein
358	36	0.573	Heliotropplatz

BROCKEN

— 30310.087 — 46418.626

4°	26′	26″303	Thurm
5	9	45.560	Inselsberg Haus
5	10	37.744	*Inselsberg (Gerlings Platz 1823)*
18	7	5.391	*Struth*
39	21	47.966	*Meisner*
39	31	22.866	Sülberg Warte
42	11	11.866	Hanstein
42	11	53.866	
42	12	24.866	
42	12	42.866	
42	21	36.866	Rusteberg
49	20	31.844	Berenshausen (im Eichsfelde)
57	34	37.320	*Herkules*

58°	17′	23″331	*Hohehagen Platz von 1821*
58	17	23.377	*Hohehagen Platz von 1823*
60	18	51.891	Burghasungen
63	14	33.866	Plesse dünner Thurm
92	27	32.104	Clausthal Windmühle
97	8	17.798	Gandersheim?
97	10	46.798	
101	7	54.956	*Hils*
141	9	27.688	Ringelheim luth. Kirche
141	11	51.021	Sutmerthurm
141	26	5.688	Haringen
141	29	54.688	Ringelheim kathol. Kirche
142	18	33.188	Dörnten
142	45	21.910	Grauhof
145	57	59.688	Othfresen
147	4	8.688	Steinbrück, Amthaus
147	14	52.070	*Lichtenberg*
147	29	47.213	Lichtenberg, Ruine
171	16	3.368	Wolfenbüttel, Schloss
171	45	15.104	Heiningen
171	49	44.632	Braunschweig, Michaelis
171	52	47.868	Wolfenbüttel, Neue Kirche
171	57	46.970	Braunschweig, Martini
172	19	11.857	Braunschweig, Andreae
172	26	0.705	Fenster eines Treibhauses?
172	41	20.632	Braunschweig, Catharinae
176	52	52.688	Spitzer Thurm
235	13	28.738	Huyseburg erster Thurm
235	14	24.688	Huyseburg zweiter Thurm
241	41	37.143	Magdeburg erster Thurm
241	42	36.143	Magdeburg zweiter Thurm
249	38	36.606	Halberstadt
251	50	40.303	Wernigerode Kirchthurm
252	35	44.303	Wernigerode Schloss
270	53	53.021	Quedlinburg
278	52	32.152	Hüttenrode
278	53	48.329	Cattenstedt
282	38	36.420	Petersberg
294	56	53.739	Harzgerode
320	51	29.920	Kyffhäuser
327	42	54.793	Platz bei Ilfeld
341	11	46.323	Posse
356	55	49.580	Tettenborn
356	57	48.907	Platz auf dem Wurmberg 1821
356	57	41.580	Ein anderer Platz daselbst 1823
357	19	20.618	Haus auf dem Wurmberge

INSELSBERG

+75233.714 —36849.867 Hessischer Dreieckspunkt

Die Hessischer Seits ausgeführten Messungen werden hier nur zur Vollständigkeit des Systems beigefügt.

144°	31′	29″825	*Hohehagen (Platz von 1823)*
185	10	59.970	*Brocken*

LICHTENBERG

—66001.353 —23458.424

51°	10′	28″468	*Hils*
51	56	19.085	Wohldenberg, viereck. Thurm
52	15	52.859	Wohldenberg, spitzer Thurm
55	57	40.468	Nette
100	5	30.085	Capelle bei Otbergen
100	18	20.085	Warte
104	53	48.579	*Deister*
107	41	15.085	Gross Giesen
110	14	43.085	Förste
113	9	56.085	Harsum
124	0	29.085	Bredelem
124	12	3.524	Adlum
124	14	26.804	Algermissen
124	51	45.085	Windmühle
126	6	13.281	Hannover Neustädter Thurm
126	10	15.282	Lühnde
126	26	51.052	Hannover Aegidii
126	30	18.452	Hannover Marktkirche Thurm
126	33	12.478	Hannover Kreuzkirche Thurm
127	47	55.304	Betrum
127	48	53.524	Garmsen
128	6	50.085	Windmühle
130	26	20.085	Ferne Windmühle
130	45	30.524	Sosmar
131	47	56.524	Gross Lopke
132	3	26.804	Feldbergen
134	50	53.939	Hohenhameln
135	36	8.473	Ilten
141	38	23.085	Hoheneggelsen
144	27	5.965	Burgwedel
146	26	40.085	Neu Steinbrück
147	6	39.478	Mehrum
148	26	0.782	Equord
150	27	12.282	Adenstedt
151	17	21.282	Gross Solschen
152	5	9.478	Burgdorf
153	6	8.524	Nahe Windmühle
153	33	23.085	Sehlde
156	13	7.743	Schwicheldt
156	13	30.102	Steinbrück
157	20	39.743	Lesse
158	19	24.468	Rosenthal
160	28	4.888	*Falkenberg*
161	32	53.478	Ferner sp. Thurm
161	46	24.996	Gadenstedt
165	49	55.478	Celle Stadtkirche
166	21	9.085	Lafferde
169	44	37.524	Stukenberg
170	47	54.015	Ottbergen
170	55	7.869	*Garssen*
171	34	24.819	Ütze
176	20	12.524	Woltwiese
194	16	17.452	Repner
220	57	21.452	Timmerlah
221	25	9.468	Engelnstedt
223	57	30.468	Bruchmachtersen
224	0	9.478	Braunschweig Petri

224°	8′	33″878	Braunschweig Andreae
224	45	41.478	Braunschweig Martini
224	50	48.478	Braunschweig Catharinae
224	59	57.478	Braunschweig Michaelis
225	46	37.452	Hondelage
226	4	22.468	Broizen
226	22	55.452	Wendhausen
226	26	3.478	Braunschweig Aegidii
226	46	45.452	Hügel bei Broizen
244	4	34.465	Appenrode?
327	14	45.541	*Brocken*

NEBENPLATZ

—66001.465 —23458.558

51°	10′	28″452	Hils
126	30	17.706	Hannover Marktthurm
139	7	51.513	Bierbergen
139	37	0.513	Isernhagen
143	5	44.513	Lehrte
144	27	1.513	Burgwedel
148	26	2.513	Equord
161	46	24.513	Godenstedt
161	59	25.513	Thurm
192	27	1.513	Wohlenberg
327	14	46.382	Brocken

DEISTER

—78478.377 +23444.173

32°	4′	38″138	Windmühle
143	3	4.138	Altenhagen
145	53	21.138	Steinhude
148	47	18.138	Gross Goltern
149	21	32.138	Colenfelde
152	12	24.728	Wunstorf st. Thurm mit Spitze
152	47	9.164	Bücken
156	29	17.138	Thurm
159	4	34.138	Wennigsen
161	45	56.138	Redderse
162	7	21.138	Leveste
162	54	40.138	Thurm
162	58	6.933	Neustadt am Rübenberge
164	6	22.138	Ricklingen?
165	42	6	Ferner Horizont
167	8	6	Ferner Horizont
171	48	3.138	Kirchwehren
179	31	54.138	Seelze
180	50	55.138	Gehrden
195	1	57.789	*Falkenberg*
202	52	2.008	Ronneberg
202	52	27.872	*Winsen*
204	28	0.138	Hainholz
209	59	39.008	Hannover Neustädter Thurm
210	23	8.586	Hannover Kreuzkirche Thurm
210	28	16.008	Isernhagen
210	59	4.138	Wetbergen
211°	9′	56″138	Hannover Marktkirche, Thurm
211	24	4.164	Burgwedel
212	21	3.583	Hannover Aegidii
214	8	0.008	Potholtensen
217	1	44.728	Celle Stadtkirche
218	13	49.996	*Garssen*
228	8	52.510	Kirchrode
229	36	44.164	Burgdorf
231	2	48.510	Wilkenburg
232	10	34.510	Thurm
236	6	51.510	Hiddesdorf
238	1	47.446	Ütze
239	51	14.119	Lehrte
241	4	12.510	Ilten
241	39	43.510	Grasdorf
242	0	29.946	Meinersen
249	17	51.164	Edemissen
251	9	54.510	Sehnde
252	41	54.510	Müllingen
252	56	46.510	Pattensen
254	10	56.510	Bolzum
255	9	34.510	Oesselse
256	13	26.510	Gleidingen
259	26	48.510	Bledelem
259	54	57.164	Lühnde
261	21	43.510	Heisede
261	40	27.510	Gross Lopke
263	10	56.508	Hotteln
263	47	8.164	Gross Solschen
263	47	40.008	Hüpeden
264	56	38.008	Bennigsen
265	8	28.164	Algermissen
265	9	45.586	Hohenhameln
266	24	45.241	Braunschweig Andreae
266	28	17.164	Braunschweig Catharinae
266	34	45.164	Braunschweig Petri
266	38	10.164	Thurm
266	47	37.164	Braunschweiger Dom
266	50	53.586	Clauen
266	53	24.164	Adenstedt
266	56	40.164	Braunschweig Martini
267	4	39.164	Obergen
270	20	30.008	Sarstedt
272	41	44.474	Steinbrück
272	53	41.241	Rutenberg
274	5	9.474	Lengede
274	6	55.492	Hoheneggelsen
274	18	34.474	Addlum
274	46	55.510	Ahrbergen
276	12	22.164	Borsum
276	59	8.164	Harsum
277	39	31.164	Giften
278	1	39.164	Förste
279	14	14.759	Jeinsen
279	44	15.510	Thurm
282	2	8.809	Nettlingen
283	46	17.474	
284	48	32.008	Lichtenberg Ruine
284	53	48.908	*Lichtenberg*
285	27	42.492	Weisses Gebäude
285	44	5.138	Ruine

285°	58'	17"008	Gestorf
286	49	20.474	Capelle bei Obergen
290	24	47.227	Hildesheim Jacobi
290	55	50.008	Hildesheim Andreae
290	58	48.008	Hildesheim Michaelis
291	19	8.510	Rössing
292	23	36.510	Emmerke
293	23	30.008	Moritzberg
296	43	12.510	Sorsum
297	20	49.510	Gross Escherde
298	49	6.946	Beinberg
300	41	23.029	Ruine Sutmerthurm
304	36	23.259	Malersen
305	20	42.510	Adersen
309	48	1.510	Poppenburg kathol. Kirche
310	9	56.510	Burgstemmen
310	58	36.510	Kloster Esche
312	42	22.474	Wülfingen
314	11	19.474	Sibbesen
315	43	21.474	Betheln
323	52	7.474	Elze
324	4	0.474	Gronau kleiner Thurm
324	10	21.474	Gronau
329	54	56.164	Baum bei Brunstein
330	17	4.474	Banteln
330	48	25.309	Alfeld
336	43	34.164	Wülfinghausen
337	11	55.404	*Hils*

GARSSEN

— 125867.401 — 13888.808

21°	54'	30"049	Burgdorf
30	54	40.988	Anderten
38	6	28.638	Baum am Deister
38	9	15.638	Zweiter Baum daselbst
38	13	51.485	*Deister*
41	12	12.030	Hannover Marktthurm
45	25	1.507	*Isernhagen*
46	39	10.813	Burgwedel
49	8	14.843	Celle Stadtkirche
49	50	42.049	Celle Schloss 1. Kuppel
50	2	26.648	*Celle Schloss Uhrthurm*
50	16	16.049	Celle Schloss 2. Kuppel
50	59	12.988	Pyramidenförmiger Baum
97	52	56.468	*Winsen*
137	28	43.690	*Falkenberg Heliotrop*
137	29	2.638	Falkenberg Signal b.
141	19	40.049	Becklingerbaum
217	23	15.049	Eschede
225	0	59.981	*Scharnhorst*
320	9	42.049	Langlingen
325	55	50.049	Meinersen
329	40	2.049	Paese
343	47	10.638	Wienhausen
345	30	7.638	Edemissen
350	43	15.205	Lichtenberg, Ruine
350	55	2.399	*Lichtenberg Heliotrop*

FALKENBERG

— 146621.040 + 5142.567

1°	9'	51"019	Burgwedel
4	36	43.292	Isernhagen
6	26	44.238	Bothfeld?
9	21	21.019	Hannover Aegidii
9	41	18.964	Hannover Marktkirche Th.
9	54	36.019	Hannover Kreuzkirche Th.
10	9	47.019	Hannover Neustädterthurm
11	45	37.439	Bissendorf
12	26	21.238	Windmühle
12	32	7.238	Windmühle
15	2	2.957	*Deister*
26	49	8.665	Pyramidenförmiger Baum
35	52	18.238	Ferne Windmühle
35	58	22.939	Neustadt am Rübenberge
36	13	7.439	Mandelsloh
36	49	33.223	Basse
37	1	47.639	Thurm
38	19	36.397	Ferne Windmühle
40	45	36.344	Ahlden
40	47	40.238	Bergkirchen
42	31	47.149	Grosser Thurm
51	12	15.814	Ostenholz
77	8	49.985	Rethem
81	53	12.854	Bücken
82	12	9.004	Asendorf
85	30	28.004	Kirchboizen
95	17	1.905	Walsrode
136	45	41.498	*Elmhorst*
140	31	48.994	Grosser Baum
140	42	17.994	Kleiner Baum
175	42	51.4	Epailly's Signal
180	42	2	Signalbaum
185	56	33.7	Becklinger Thurm
187	51	9.388	*Wilsede Heliotrop*
187	52	25.360	Wilsede Signalbaum
225	13	18.833	*Wolfsode*
266	17	35.321	*Hauselberg*
274	18	22.785	*Breithorn*
296	28	32.700	*Scharnhorst*
296	33	18.740	Eschede
302	40	37.629	Bergen
305	44	20.238	Sülze
317	28	43.704	*Garssen*
320	12	18.2	Wohlenberg
323	50	27.540	Wienhausen
329	36	25.155	*Celle Stadtkirche*
330	3	44.019	Celle Schlosskuppel
330	4	40.019	Celle Schlosskuppel
331	35	5.699	Ütze
339	42	47.950	Muggenburg
340	28	0.699	*Lichtenberg*
347	59	3.293	Burgdorf
351	50	38.975	Winsen

SCHARNHORST

— 133392.348 — 21418.103

45°	0′	59″865	*Garssen*
114	56	0.025	*Eschede*
116	28	33.840	*Falkenberg*
180	39	58.442	*Breithorn*

BREITHORN

— 144611.129 — 21548.543

0°	39′	57″580	*Scharnhorst*
94	18	23.419	*Falkenberg*
122	36	5.722	*Hauselberg*
150	3	17.767	*Wilsede*

HAUSELBERG

— 148006.363 — 16239.880

43°	18′	42″205	Winsen
66	6	1.673	Hermannsburg
69	40	35.673	Bergen
86	17	34.872	*Falkenberg*
93	30	15.423	Signalbaum im Becklinger Holze
114	55	17.673	Müden
154	25	37.479	*Wilsede*
156	30	7.674	Munster?
188	51	24.137	*Wulfsode*
302	36	5.557	*Breithorn*

WULFSODE

— 171465.593 — 19895.232

8°	51′	22″198	*Hauselberg*
45	13	19.156	*Falkenberg*
118	29	58.770	*Wilsede*
198	40	53.327	*Timpenberg*

WILSEDE

— 181381.889 + 210.397

7°	51′	10″095	*Falkenberg*
8	0	22.2	Erhöheter Baum im Becklinger Holze
19	26	25.9	Soltau
21	36	20.9	Entfernter Thurm?
46	31	37.047	Elmhorst
61	10	21.1	Schneverdingen
66	13	28.845	Kirchwalsede
67	11	28.095	Steinberg
72	0	40.441	Bottel
73	51	50.2	Brokel
79	55	40.827	Rotenburg
89°	5′	4″481	Bullerberg
90	34	52.1	Schessel
103	40	9.859	Brüttendorf
108	22	39.951	Zeven
112	41	25.797	Sittensen
129	39	24.2	Alerstedt
129	58	6.348	Tostedt
138	28	9.948	Litberg
143	57	4.2	*Apensen*
183	29	1.832	*Hamburg Michaelis*
183	51	8.9	Hamburg kleiner Thurm
183	54	47.9	Hamburg kleiner Thurm
184	27	31.6	Hamburg Nicolai
184	41	26.877	Harburg
184	43	56.9	Hamburg kleiner Thurm
184	49	14.6	Hamburg kleiner Th. auf breitem Gebäude
184	53	49.2	Hamburg Catharinae
185	1	42.2	Windmühle
185	2	55.2	Hamburg Petri
185	24	7.2	Hamburg Jacobi
185	58	17.6	Hamburg St. Georg
204	28	35.103	Syk
206	41	46.2	Bergedorf
219	29	34.558	*Hohehorn*
250	37	50.1	Egesdorf
253	13	8.2	Lüneburg Nicolai
253	20	6.052	*Lüneburg Michaelis*
254	2	44.902	Lüneburg Johannis
254	6	55.2	Lüneburg Lamberti
266	43	44.2	Raven
275	29	13.874	Nindorf
279	31	4.2	Wilsede, Signalbaum
283	5	9.964	*Timpenberg*
298	29	58.591	*Wulfsode*
311	4	10.0	Holxerberg
330	3	16.463	*Breithorn*
333	1	52.2	Munster
334	25	35.817	*Hauselberg*
351	55	51.9	Wiezendorf

TIMPENBERG

— 177253.420 — 21852.221

18°	40′	53″762	*Wulfsode*
43	42	6.195	Signalbaum im Becklinger Holze
96	46	8.585	Amelinghausen
103	5	9.587	*Wilsede*
129	35	56.990	Raven
150	4	2.990	Salzhausen
157	42	15.068	*Hamburg Michaelis*
199	42	16.045	*Nindorf*
329	17	42.806	Ebsdorf?
331	22	43.990	Holxerberg

NINDORF

— 180162.361 — 22894.019

19°	42'	14"949	*Timpenberg*
95	29	14.081	*Wilsede*
100	21	32.755	Raven
138	24	12.755	Salzhausen
139	30	12.611	Hamelsloh
153	20	19.755	Altona Stadtkirche
155	17	27.774	*Hamburg Michaelis*
156	1	57.755	Hamburg Nicolai
156	15	50.755	Hamburg Catharinae
156	39	36.755	Hamburg Petri
156	56	51.755	Hamburg Jacobi
157	12	35.611	Windmühlenflügel
157	47	12.755	Hamburg St. Georg
165	59	58.755	Steinbeck
180	35	38.831	Syk
188	9	7.269	*Hohenhorn*
199	23	15.755	Grauer Thurm unter dem Horizonte
201	56	41.678	Bardowick
201	57	52.678	Bardowick
207	58	28.678	Kreuzen
213	53	16.487	*Lüneburg Michaelis*
215	2	51.915	Lauenburg Signal
215	12	53.755	Lüneburg Rathhaus
215	16	24.755	Lüneburg Lamberti
215	18	40.755	Lüneburg Nicolai
215	31	16.755	Lauenburg Amthausth.
215	43	4.755	Lüneburg Heiliger Geist
216	57	59.712	Lüneburg Johannis
226	44	6	Sehr ferner Bergrücken
228	41	44.755	Embsen
274	27	16.611	Medingen Th. 1.
274	28	26.611	Medingen Th. 2.
283	14	0	Hoher kahler ferner Bergrücken
287	49	22.611	Kloster Medingen
298	31	49.683	Bäzendorf

LÜNEBURG

Hauptplatz — 191597.163 — 30574.951

21°	23'	46"9	Bäume bei Telmar
21	26	38.9	Bäume bei Telmar
24	58	22.9	Bäzendorf
33	53	22.590	Nindorf
62	18	48.9	Raven
73	19	30.9	Wilsede Baum
73	20	8.188	*Wilsede Heliotrop*
73	34	37.682	Kalkberg
74	17	54.7	Egestorf?
79	58	40.7	Salzhausen?
114	12	44.7	Centrum von 1818
133	43	54.3	Winsen
136	34	27.9	Ottensen
137	47	57.8	Altona Stadtkirche
137	49	9.9	Altona kleiner Thurm
139	37	24.753	*Hamburg Michaelis*
139°	46'	33"9	Hamburg ganz kleiner Thurm
139	54	17.3	Ochsenwerder
140	18	26.3	Hamburg Nicolai
140	26	29.8	Hamburg Catharinen
140	35	51.9	Hamburg ganz kleiner Thurm
140	50	3.8	Hamburg kleiner Thurm auf breitem Gebäude
141	0	57.8	Hamburg Petri
141	17	35.8	Hamburg Jacobi
141	30	51.8	Kleiner Lat.-Th. jenseit Hamburg
142	21	59.3	St. Georg
143	33	43.9	Niendorf
143	57	46.9	Kirchwerder
144	25	14.9	Ferne Spitze
145	53	29.9	Ham
148	27	50.8	Wandsbeck
149	14	55.9	Windmühle
149	35	12.8	Steinbeck
150	5	53.9	Windmühie
152	13	13.9	Korslak
154	20	43.9	Bergedorf
171	48	1.9	Bardowiek 1.
171	48	35.9	Bardowiek 2.
174	28	33.182	*Hohenhorn*
181	10	28.8	Schumacher's Platz
199	44	21.9	Windmühle
215	56	25.663	*Lauenburg Signal*
216	50	5.497	Lauenburg Amthaus
217	19	58.454	Lauenburg Zenith Sector
229	23	26.9	Lüne
247	20	34.9	Lüneburg Nicolai
283	43	44.9	Lüneburg Johannis
323	0	45.9	Lüneburg Heilige Geist
365	46	48.9	Lüneburg Lamberti

Platz 2. — 191597.884 — 30575.509

24°	59'	9"7	Bäzendorf
33	53	23.449	Nindorf
37	52	0.7	Standpunkt 1.
130	4	51.149	Harburg
171	47	37.7	Bardowick 1.
171	48	9.7	Bardowick 2.
175	55	30.7	St. Dionys
215	56	25.375	Lauenburg Signal
216	50	5.368	Lauenburg Amthaus
241	53	16.2	Gegenüber dem bezeichnetenCentr. der Laterne
247	23	2.7	Lüneburg Nicolai
258	23	49.7	Stern auf einem Gartenhause
258	55	9.7	Rathhaus
314	16	36.8	Alt Medingen breites Dach
314	19	16.8	Alt Medingen spitzes Dach
323	7	20.7	Lüneburg Heiliger Geist
345	52	19.7	Lüneburg Lamberti

Schumachers Platz — 191600.121 — 30575.017

130°	4'	44"016	Harburg
139	54	1.7	Ochsenwerder
143	42	23.7	Platz vor dem Thore

171°	47′	50″7	Bardowiek 1.
171	48	20.7	Bardowiek 2.
175	55	41.7	St. Dionys
174	28	43.2	Hohenhorn
204	24	29.7	Lüttau
215	56	45.168	Lauenburg Signal
216	50	26.326	Lauenburg Amthaus
229	27	28.2	Lüne

LÜNEBURG KALKBERG

— 191511.038 — 30282.895

33°	3′	45″2	Nindorf Stein
62	7	10.2	Raven
73	19	25.2	Wilsede Signalbaum
138	9	2.2	Altona
139	59	27.2	Hamburg Michaelis
216	31	52.2	Lauenburg Signal
217	26	20.2	Lauenburg Amthausthurm
232	43	37.2	Lüne
249	20	27.2	Lüneburg Nicolai
253	30	46.2	Lüneburg Michaelis bez. Centr. der Laterne
253	31	3.40	Lüneburg Michaelis Knopf
253	34	10.15	Lüneburg Michaelis Platz 1
275	34	34.2	Lüneburg Johannis
296	19	42.2	Lüneburg Heiliger Geist
310	13	53.2	Lüneburg Lamberti

LÜNEBURG VOR DEM THORE

— 191882.273 — 30367.793

272°	37′	45″7	Nicolai
286	31	25.7	Rathhaus
295	42	36.7	Johannis
323	42	23.700	Schumachers Platz
323	59	53.600	Platz 1.
324	3	28.663	Knopf
324	2	7.1	Bezeichn. Centrum der Laterne
336	4	19.7	Lamberti

ELMHORST

— 163054.915 + 20595.877

70°	18′	40″3	Visselhövede dicker Thurm
76	33	48.0	Müllers Nebenplatz
77	9	56.3	Visselhövede dünner Thurm
141	43	37.629	Bullerberg
178	18	0.898	Litberg
201	15	19.0	Thurmspitze?
226	31	35.546	Wilsede Heliotrop
226	32	58.011	Wilsede Signalbaum
301	3	58.5	Wegweiser
301	19	3.5	
311	10	2.2	Signalbaum im Beeklinger Holze
316	45	40.476	Falkenberg

LITBERG

— 206866.630 + 21895.743

20°	14′	5″596	Schessel
30	25	57.5	Sittensen
59	56	19.825	Brüttendorf
66	0	48.785	Zeven
88	23	3.846	Ausdehnung des Teiches im Trentmoor
91	7	23.596	
102	10	47.1	Alerstedt
141	31	20	Spur eines entfernten Horizonts
159	25	25.071	Stade Cosmae
159	31	52.5	Stade Wilhadi
180	9	51.9	Apensen
194	33	46.4	Wedel
206	19	46.5	Rellingen
209	21	4.3	Estebrügge
210	9	44.196	Buxtehude
215	13	42.3	Bauers Warte
215	46	15.3	Bauers chinesischer Thurm
230	57	6.3	Altona Armenkirche
231	21	6.3	Altona Stadtkirche
231	23	5.3	Altona Rathhaus
233	35	14.346	Hamburg Michaelis
234	22	11.3	Hamburg kleiner Thurm
234	28	11.3	Hamburg hoher Thurm
234	22	48.3	Hamburg kleiner Thurm
234	33	5.3	Hamburg Petri
235	7	14.3	Hamburg Catharinae
250	36	52.3	Elstorf
288	7	32.2	Hollenstedt
318	28	12.193	Wilsede
331	30	1.3	Tostedt
358	18	3.803	Elmhorst

HAMBURG

Centrum — 224765.173 — 2369.933

Standpunkt 1. — 224764.186 — 2370.474

3°	28′	3″6	Wilsede Baum
3	29	4.731	*Wilsede Heliotrop*
16	2	46	Grenzen des Fensters
296	45	36	
314	43	22.9	Kirchwerder
318	45	45.3	Ochsenwerder
318	49	2.9	Lüneburg Nicolai
319	0	36.9	Lüneburg Johannis
319	37	22.732	*Lüneburg Michaelis*
319	52	24.9	Lüneburg Lamberti
359	18	35.740	Harburg

Standpunkt 2. — 224764.090 — 2370.385

3°	27′	57″9	Wilsede Baum
3	29	4.283	*Wilsede Heliotrop*
284	30	4.9	Hamburg Catharinae
287	12	41.899	*Hohenhorn*
291	19	34.5	Billwerder
293	3	19.9	Bergedorf

300°	46′	5″1	Moorfeeth
318	45	50. 0	Ochsenwerder
318	49	11. 9	Lüneburg Nicolai
319	0	43. 9	Lüneburg Johannis
319	37	22. 355	*Lüneburg Michaelis*
319	52	28. 9	Lüneburg Lamberti
320	31	55. 1	Giebelfenster eines grossen Hauses
323	49	31. 1	Winsen
335	17	24. 687	Nindorf
337	42	13. 470	Timpenberg
339	56	14. 7	Wilhelmsburg
345	14	19. 2	Thurm in Hamburg
355	8	21. 2	Thurm auf Hafenhaus
359	18	33. 6	Harburg

Standpunkt 3. — 224764.064 — 2369.712

3°	29′	1″023	Wilsede
21	10	14. 4	Moorburg
53	35	18. 538	Litberg
62	31	29. 212	Apensen
66	20	52	Grenzen des Fensters
253	4	52	
359	18	18. 998	Harburg

Standpunkt 4. — 224764.074 — 2369.701

0°	57′	33″0	Sinsdorf
3	29	0. 970	Wilsede
21	10	9. 0	Moorburg
53	35	18. 445	Litberg
62	31	29. 112	Apensen
356	39	11. 0	Wilstedt
359	18	20. 325	Harburg

Standpunkt 5. — 224764.344 — 2369.937

21°	10′	9″9	Moorburg
42	25	28. 9	Elsdorf
53	35	17. 916	Litberg
94	17	46. 9	Altona Rathhaus
94	34	21. 9	Bauers chinesischer Thurm
94	53	54. 9	Bauers Thurm
96	9	57. 9	Entfernter Horizont
98	52	25. 9	Bauers Berg, Zelt
100	5	11. 9	Stade, Wilhardi
100	18	18. 9	Stade, Cosmae
123	49	9. 9	Winsen

Standpunkt 6. — 224764.388 — 2369.634

3°	29′	0″554	Wilsede
90	14	16. 9	Altona Hauptkirche
92	11	3. 9	Niensteden
98	52	25. 179	Baursberg Stein

BULLERBERG

— 181819.664 + 35400.829

5°	19′	9″719	Kirchwalsede
5	45	46. 1	Rotenburg
8	25	2. 5	Rotenburg Sprützenstange
11	8	49. 5	Rotenburg Stein an der Chaussee diesseits
11	9	46. 5	Rotenburg Stein an der Chaussee jenseits
27	49	55. 004	Steinberg Signalbaum
31	59	20. 811	Ahausen
32	13	58. 621	Bottel
139	25	25. 213	Brüttendorf
235	45	35. 198	Tostedt
259	15	12. 587	Schessel
269	5	5. 148	Wilsede
281	25	22. 963	Schneverdingen
306	24	23. 8	Neuenkirchen
315	15	18. 8	Brokel
321	43	39. 592	Elmhorst
322	13	35. 648	Elmhorst Nebenplatz

BRÜTTENDORF

— 193340.040 + 45266.609

56°	53′	54″565	Bremen Ansgarii Mitte
57	6	1. 628	Wilstedt
197	21	45. 517	Zeven Knopf
239	56	17. 690	Litberg
265	54	53. 3	Sittensen
283	40	11. 399	Wilsede
293	1	4. 628	Elsdorf
306	22	9. 726	Schessel
319	25	27. 704	Bullerberg
357	9	16. 378	Bottel
359	16	1. 240	Steinberg Signalbaum

BOTTEL

— 168158.341 + 44014.670

10°	47′	41″662	Steinberg
10	48	49. 3	Steinberg Signalbaum 1.
11	51	13. 3	Steinberg Signalbaum 2.
58	18	11. 3	Heiligenfelde
64	48	33. 3	Lunsen
90	46	15. 3	Arbergen
97	45	13. 3	Bremen Zwinger
97	46	56. 3	Bremen kathol. Kirche
98	0	46. 3	Bremen Martini
98	10	8. 5	Bremen Dom
98	21	8. 3	Bremen Unsrer lieben Frauen
98	33	49. 3	Bremen Gymnasium
98	28	40. 931	Bremen Ansgarius
130	30	21. 1	Worpswede
143	53	1. 7	Wilstedt
156	47	43. 1	Sottrum
177	9	11. 071	Brüttendorf
212	13	55. 566	Bullerberg
213	12	11. 0	Ahausen
222	15	49. 801	Schessel
225	34	40. 026	Rotenburg
250	0	39. 148	Wilsede 252°?
252	1	4. 466	Wilsede Signalbaum
324	13	37. 3	Wedehof

ZEVEN

− 196973.309 + 44130.578

1°	17′	44″058	Steinberg
17	21	57.036	Brüttendorf
53	26	12.202	Bremen
67	43	3.9	Platz im Garten des Posthauses
124	13	45.024	Brillit
152	47	55.482	Selsingen
246	0	47.896	Litberg
288	22	41.424	Wilsede
316	59	25.036	Schessel

STEINBERG

− 163594.034 + 44884.912

10°	56′	28″8	Eistrup
11	27	26.2	Balge
12	13	12.2	Döverden
12	59	8.2	Loh
19	34	6.675	Verden Nicolai
19	42	32.2	Verden Dom
21	11	50.425	Verden Johannis
22	28	46.2	Bücken
27	38	29.4	Magelsen
31	29	20.2	Wechold
33	58	14.2	Eizendorf
36	16	58.031	Asendorf
46	21	56.2	Matfeld
50	39	37.2	Blender
63	17	2.2	Intschede
64	51	0.2	Heiligenfelde
78	0	15.2	Thedinghausen
78	47	16.2	Lunsen
82	47	39.2	Heiligenbruch
88	49	41.2	Leeste
90	0	10.2	Kirchweihe
96	20	2.2	Achim
98	26	30.2	Thurm
98	35	50.2	Delmenhorst
105	22	50.2	Ferner Thurm
106	0	42.726	Bremen kathol. Kirche
106	4	12.2	Bremen Zwinger
106	10	26.2	Bremen Martini
106	23	32.2	Bremen Dom
106	33	12.2	Bremen Unsrer lieben Frauen
106	46	2.221	Bremen Ansgarii Heliotrop
106	46	2.526	Bremen Ansgarii Knopf
106	53	10.2	Bremen Stephani
107	14	18.2	Bremen Remberti
111	3	50.2	Thurm
112	57	37.2	Thurm
161	5	15.0	Zweiter Signalbaum, unten
161	13	57.0	Zweiter Signalbaum, oben
181	17	37.150	Zeven
182	51	52.2	Windmühle von Mülmshorn
190	47	40.064	Bottel
237	31	50.2	Brokel
247°	11′	24″612	Wilsede
251	45	57.0	Kirchwalsede
261	18	27.0	Wedehof, linke Ecke des Ziegeldachs
294	24	31.5	Baum oder Thurmspitze
335	19	29.0	Linteloh
347	25	19.0	Lindhop Schorstein
353	18	25.7	Westen

BREMEN

Hauptplatz von 1824. −173074.579 + 76350.972

20°	32′	35″325	Twistringen
74	33	28.0	Ganderkesee
75	43	29.1	Delmenhorst
99	35	50.9	Thurmspitze
100	40	39.690	Oldenburg
101	26	25.208	Hude
115	18	22.9	Thurmspitze unterm Horizont
115	27	14.9	Thurmspitze
115	38	10.9	Bardewisch
115	49	16.427	Rastede
115	52	57.1	Rablinghausen
116	21	53.6	Windmühle
119	12	11.9	Thurmspitze
119	16	39.5	Berne
131	53	33.1	Vegesack
132	58	45.390	Neuenkirchen
199	41	44.085	Brillit
231	17	46.6	Kirchtimke
233	25	59.010	Zeven Heliotrop von 1824
236	46	32.995	Wilstedt
236	53	48.078	Brüttendorf
278	38	42.771	Bottel
286	18	9.8	Bremen Gymnasium
286	46	2.718	Steinberg
301	16	13.8	Arbergen
302	5	4.050	Verden Johannis
302	26	17.8	Intschede
302	57	45.953	Verden Dom
303	4	35.9	Thurm in Verden
307	39	55.9	Lunsen
307	55	6.9	Blender
308	27	18.8	Bremen Unsrer lieben Frauen
323	32	4.9	Ride
330	2	25.9	Katholische Kirche
333	1	12.9	Weihe
349	6	46.9	Heiligenfelde
354	6	27.9	Martini
355	46	7.9	Barrien

Platz vom 19. Juli 1824 −173074.923 + 76351.200

12°	36′	27″1	Bassum
182	36	38.1	St. Jürgen
184	12	42.852	*Hambergen*
207	37	32.1	Worpswede
224	1	54.1	Thurm
226	43	17.1	Lilienthal
233	25	59.184	*Zeven Thurm*

246°	6′	45″1	Horn
265	49	0.617	*Rotenburg*
286	20	51.1	Bremen Gymnasium
286	45	50.1	Steinberg Signal
307	39	56.1	Lunsen
307	55	21.1	Blender
308	28	44.1	Bremen Unsrer lieben Frauen
327	19	23.816	*Bücken*
330	2	3.1	Bremen katholische Kirche
333	1	16.1	Weihe
349	6	50.1	Heiligenfelde

Platz vom 22. Juli (Lothplatz) — 173074.521 + 76350.975

119°	16′	47″0	Berne
176	50	29.0	Scharmbeck
180	16	48.1	Thurmspitze?
233	15	32.5	Platz am Heerdenthore
236	46	43.0	Wilstedt
286	17	34.0	Bremen Gymnasium
301	16	23.0	Arbergen
301	39	32.0	Domshof
302	5	4.486	Verden Johannis
330	2	8.0	Bremen katholische Kirche
354	5	56.5	Bremen Martini

Platz vom 23. Julius — 173074.943 + 76351.052

20°	32′	34″056	*Twistringen*
132	58	43.715	*Neuenkirchen*
207	37	25.0	Worpswede
226	43	20.0	Lilienthal
265	49	0.287	*Rotenburg*
268	29	47.0	Brokel
270	58	0.0	Bremen Remberti
286	21	10.0	Bremen Gymnasium
307	40	4.0	Lunsen
313	28	34.0	Magelsen
314	3	36.0	Bremen Dom
316	14	54.0	Eizendorf
333	1	14.0	Weihe
339	2	53.837	*Asendorf*
349	6	54.0	Heiligenfelde

Platz vom 1. August — 173075.126 + 76351.010

296°	55′	32″8	Achim
302	5	6.846	Verden Johannis
303	28	41.8	Ferner Thurm
321	18	21.8	Wechold
333	1	25.8	Weihe
355	46	4.8	Barrien

Platz von August 13 u. 17, erste Aufstellung
— 173075.149 + 76351.413

9°	4′	23″0	Brinkum
54	59	10.0	Huchting
139	10	33.0	Gröplingen
141	47	31.0	Gramke
143	45	29.0	Lessum
165	11	51.768	*Garlste*

199°	41′	47″289	*Brillit*
232	59	9.0	Borgfeld
236	53	52.084	*Brüttendorf*
261	47	40.9	Oberneuland
262	16	42.9	Sottrum
296	26	47.0	Badner Windmühle
329	22	33.0	Ahrsten

Platz vom 17. August, zweite Aufstellung
— 173074.613 + 76351.066

115°	21′	51″6	Windmühle
115	38	14.6	Bardewisch
115	49	16.790	Rastede
119	12	6.6	Thurmähnliches Object
120	1	33.6	Moorlosen
120	7	10.6	Huntebrück
120	16	13.6	Seehausen
122	32	39.6	Trockne Baumkrone
123	16	2.285	*Grossen Meer*
132	58	45.703	*Neuenkirchen*
143	45	20.6	Lessum
160	20	0.6	Ausgewipfelter Baum
165	11	49.662	*Garste*
176	50	24.6	Scharmbeck
182	55	3.6	Osterholz
184	12	41.603	*Hambergen*

BREMEN DOMSHOF

— 172815.860 + 75931.494

53°	21′	34″6	Dom
108	4	31.6	Unsrer lieben Frauen
121	39	32.0	Ansgarius Loth
121	41	12.958	Ansgarius Knopf
152	4	38.6	Gymnasium

BREMEN HEERDENTHORSWALL

— 173252.563 + 76112.469

20°	15′	37″0	Martini
53	15	32.5	Ansgarius Loth
53	17	19.833	Ansgarius Knopf
226	31	16.0	Lilienthal
340	51	54.0	Gymnasium
349	14	23.0	Dom
356	45	12.0	Unsrer lieben Frauen

BRILLIT

— 209920.394 + 63160.149

12°	52′	3″9	Platz unweit des Holzvogt
13	14	41.8	Worpswede
19	4	59.204	Bremen Dom
19	41	56.950	Bremen Ansgarius Centrum
19	41	57.037	Bremen Ansgarius Heliotrop
49	19	51.594	Garlste

97°	1'	38"7	Windmühle
97	8	43.7	Windmühle
97	34	57.281	Esensham
106	51	6.746	Loxstedt
114	55	4.669	Bexhövede
114	45	19.369	Blexen
124	0	37.022	Bremerlehe Heliotrop
304	13	50.734	Zeven Heliotrop
345	21	11.4	Platz unweit der Gnarrenburger Windmühle
345	26	14.9	Wilstedt

GARLSTE

— 193865.912 + 81845.072

9°	27'	5"0	Ausgewipfelte Tanne
24	50	31.2	Ganderkesee
29	19	29.0	Nahe Windmühle
32	57	20.0	Vegesack
41	26	48.2	Mullerberg
61	43	21.0	Berne
77	20	14.686	Neuenkirchen
84	5	59.0	Windmühle
84	32	57.711	Thurm
87	36	50.371	Rastede
89	6	53.0	Hoher Baum 1.
89	7	46.0	Hoher Baum 2.
89	9	27.0	Hoher Baum 3.
91	11	31.4	Grossenmeer
97	17	29.0	Mayenburg
106	4	24.7	Jahde
107	43	54.7	Hammelwarden
112	10	4.070	Varel
118	28	50.356	Uthlede
121	12	14.4	Golzwarden
123	56	53.0	Schwey
126	56	13.0	Windmühle
130	44	42.597	Sandstedt
131	53	54.7	Rotenkirchen
133	7	32.7	Seefeld
139	18	14.7	Esensham
140	41	27.024	Stolham
167	18	37.365	Bremerlehe
169	42	0.836	Loxstedt
173	28	15.0	Bramstedt
177	14	35.0	Bexhövede
229	19	45.086	Brillit
235	57	28.036	Hambergen
279	21	1.0	Warnungstafel
293	6	28.0	Schornstein
345	11	55.589	Bremen Ansgarius Mitte
345	11	58.381	Bremen Ansgarius Heliotrop
345	20	43.0	Bremen Martini
346	41	59.0	Bremen Stephani

BREMERLEHE

— 227663.375 + 89453.894

2°	27'	14"2	Gestendorf
3	22	18.6	Uthlede
25	9	18.2	Dedesdorf
25	50	38.2	Windmühle von Strohhausen
28	6	34.2	Rotenkirchen
32	47	14.2	Thurmähnliches Object
38	57	46.9	Esensham
44	46	22.2	Blexen
46	37	42.0	Atens
53	8	5.2	Seefeld
59	21	10.455	Varel
81	31	34.2	Eckwarden
82	59	15.2	Dicker Thurm
95	12	50.2	Burhave
103	31	22.739	Langwarden
126	13	0.2	Bremer Bake
138	11	28.2	Imsum
150	1	26.2	Wremen
174	20	42.2	Dorum
175	48	54.2	Cappel
185	45	24.2	Midlum
213	43	51.3	Wanna
273	42	1.2	Ringstedt
304	0	45.583	Brillit
313	11	25.4	Schiffdorf
323	28	46.211	Bexhövede
342	23	31.255	Loxstedt
344	17	37.2	Bramstedt
347	18	53.042	Garlste
356	1	10.2	Wulstorf
359	16	59.9	Stotel

Andrer Platz — 227663.588 + 89453.739

2°	27'	25"2	Gestendorf
3	22	35.2	Uthlede
12	14	29.2	Sandstedt
13	6	43.2	Kleiner nicht sehr ferner Thurm
28	6	35.2	Rotenkirchen
38	57	52.2	Esensham
43	14	13.2	Blexumer Windmühle
44	46	15.2	Blexum
46	37	47.2	Atens
49	44	24.2	Abbehausen
53	8	12.2	Seefeld
70	7	9.2	Stolham
81	31	25.2	Eckwarden
82	59	11.2	Dicker Thurm
95	12	43.2	Burhave
126	12	51.2	Bremer Bake
138	11	16.2	Imsum
165	56	59.2	Mulsum
174	20	27.2	Dorum
175	48	44.2	Capeln
185	45	14.2	Midlum
283	52	6.2	Brameln
304	0	47.293	Brillit
313	11	42.2	Schiffdorf
323	28	51.032	Bexhövede
347	18	54.222	Garlste
356	1	16.2	Wulstorf
359	17	7.2	Stotel

VAREL

— 209473.921 + 120150.600

43°	18′	8″956	Westerstede
87	38	21.9	Bockhorn spitzer Thurm
87	39	7.9	Bockhorn? niedriger Laternenthurm
118	26	38.1	Spitzer Thurm
132	9	42.1	Schloss Gödens
133	44	10.1	Laternenthurm in Neustadt-Gödens
133	55	16.1	Thürmchen
134	11	30.1	Neustadt-Gödens
142	48	36.1	Jever Stadtkirche
142	58	5.978	Jever Schlossthurm Dreieckspunkt
142	58	55.010	Jever Schlossthurm Centrum
146	9	32.5	Sande
163	25	41.5	Kniphausen
165	39	54.5	Dangast Badehaus
165	59	34.8	Sengwarden
169	53	21.8	Niende
207	25	24.5	Langwarden Loh
207	43	59.763	Langwarden Dreieckspunkt
211	34	32.9	Eckwarden
218	15	28.1	Burhave
220	23	13.7	Misselwarden
221	59	47.7	Ferner Haubenthurm
222	36	33.9	Wremen
223	17	16.7	Mulsum
239	21	1.978	Bremerlehe
239	56	30.1	Thürmchen 1 | auf einem nahen
240	12	56.1	Thürmchen 2 | Gebäude
241	55	25.4	Blexen
243	26	29.1	Elmloh
245	9	16.4	Atens
245	22	47.9	Abbehausen
246	57	33.4	Seefeld
250	47	57.2	Wulstorf
255	17	2.2	Esensham
257	48	40.7	Loxstedt
258	8	53.1	Nebenthurm der Vareler Kirche
259	3	12.6	Dedesdorf
260	15	29.9	Stotel
280	29	38.219	Sandstedt
284	42	13.269	Golzwarden
290	0	25.2	Uthlede?
291	12	3.8	Spitzer Thurm
292	10	9.326	Garlste
294	22	13.7	Struckhausen
294	57	41.7	Hammelwarden
306	59	49.819	Neuenkirchen
345	32	36.7	Platz in Lacroix Hause
347	25	20.473	Rastede

Erster Nebenplatz — 209474.119 + 120151.284

141°	19′	41″7	Windmühle mit sechs Flügeln
142	58	2.901	Jever Heliotrop
142	58	51.933	Jever Thurm
146	9	10.7	Sande
148	54	20.7	Marienhausen
154	26	25.7	Accum
154°	52′	21″7	Ferner Thurm
159	26	50.7	Ferner kleiner Thurm
163	25	41.7	Kniphausen
164	46	12.7	Dangast Speisehaus
165	59	35.7	Sengwarden
169	53	17.7	Niende
198	44	4.7	Bremer Bake
207	43	58.3	Langwarden

Zweiter Nebenplatz — 209474.226 + 120151.580

106°	3′	20″2	Zetel
154	26	22.2	Accum
154	42	20.2	Thurm
207	43	59.9	Langwarden Thurm
227	31	49.5	Imsum
230	23	50.3	Stolham
258	38	51.2	Varel Nebenthurm
268	40	30.5	Schwey
270	7	6.5	Rotenkirchen
306	59	51.520	Neuenkirchen
314	17	2.5	Jahde
317	34	48.3	Berne
345	53	25.2	Fenster in Lacroix Hause
347	25	21.487	Rastede

LANGWARDEN

— 232175.707 + 108215.212

14°	39′	59″5	Thurmspitze
19	27	5.5	Eckwarden
24	17	32.2	Object
27	40	42.550	Varel Nebenthurm
27	44	11.842	Varel Dreieckspunkt
38	7	22.8	Dangast grosses Haus
38	10	10.8	Dangast grosses Haus
38	12	15.8	Dangast kleines Haus
61	19	59.5	Schloss Gödens
61	29	35.5	Sande
62	19	55.5	Niende
62	20	13.9	
64	10	31.5	Marienhausen
72	9	22.269	Kniphausen
72	28	55.5	Fedderwarden
83	59.	55.728	Jever Dreieckspunkt
83	39	21.5	Windmühle
84	24	31.707	Jever Stadtkirche
86	30	37.5	Witmund
87	33	21.1	Sengwarden
92	56	37.6	Spitzer Laternenth. auf breitem Geb.
126	2	4.814	Wangeroog
155	53	42.8	Punkt a auf dem Deich
161	50	36.214	Bremer Bake
200	54	27.044	Neuwerk
200	59	38.8	Punkt b auf dem Deich
225	54	26.8	Punkt c auf dem Deich
232	31	55.5	Cappeln
266	8	29.5	Imsum
266	22	34.0	Depstedt

281°	45′	59″5	Fedderwarden Lootsenz
283	31	26.549	Bremerlehe und Punkt d
287	4	28.5	Schiffdorf
295	2	37.7	Geestendorf
325	21	3.5	Dedesdorf
328	50	39.5	Abbehausen
333	21	4.0	Sandstedt
334	17	19.5	Esensham
338	21	38.5	Rotenkirchen
342	0	34.191	Stolham
349	47	36.0	Seefeld

Zweite Aufstellung — 232175.267 + 108215.348

24°	17′	42″5	Object
27	44	12.522	*Varel Heliotrop*
49	24	49.5	Zetel
57	57	45.5	Neustadt-Gödens
61	20	17.5	Gödens kleiner Laternenthurm
61	29	48.5	Sande
62	20	10.5	Niende
64	11	6.5	Marienhausen
92	56	55.5	Spitzer Thurm
104	16	29.5	Lohe's Thurm
105	13	51.5	
197	8	53.5	Dreieckspunkt
241	9	32.5	Misselwarden
242	28	41.5	Dorum
246	40	14.5	Mulsum
250	11	42.5	Wremen
266	8	31.5	Imsum
266	22	41.5	Depstedt
295	2	51.5	Gestendorf
299	15	3.5	Blexen
301	33	18.5	Wulstorf
311	40	47.5	Burhave
312	36	27.5	Stotel
319	30	26.5	Atens

JEVER

— 229344.966 + 135141.823

0°	58′	52″8	Etzel
48	0	11.6	Platz auf dem Felde
69	39	14.936	Aurich
71	15	28.4	Windmühle mit 6 Flügeln
95	0	39.957	Witmund
104	49	52.8	Burhave
107	2	25.612	Dornum
115	22	26.112	Esens
129	42	9.8	Werdum
132	27	19.8	Eggling
132	37	46.8	
138	41	44.8	Berdum
141	53	37.8	Jever Stadtkirche
142	34	18.8	
142	7	8.1	Jever Stadtkirche Theodolithplatz
142	14	58.1	Jever Stadtkirche Knopf
142	19	43.1	
152	0	43.8	Meddoog

173°	35′	11″123	Wangeroog
174	31	30.1	Wangeroog Leuchtthurm
257	37	16.8	Sengwarden
258	10	56.4	Andere Aufstellung
258	53	40.5	Centrum
263	59	54.494	Langwarden
322	58	18.310	Varel
332	45	36.8	Neustadt-Gödens
333	20	12.8	Neustadt-Gödens
338	30	31.8	Schloss Gödens
358	53	50.1	Westerstede

Zweite Aufstellung — 229347.545 + 135129.495

170°	36′	23″3	Tettens
173	33	25.878	*Wangeroog*
186	46	17.3	Hohenkirchen
197	54	39.3	Minsen
198	28	44.3	Wiarden
220	41	51.3	Fischhausen
222	30	31.3	Waddewarden
234	39	14.3	Hocksiel
231	31	59.3	Packens
236	51	30.3	Bremer Bake
257	37	17.3	Sengwarden
264	0	4.222	Langwarden
285	6	56.3	Kniphausen
291	28	3.3	Niende
295	42	13.3	Accum
313	43	55.3	Marienhausen
316	22	12.5	Dangast, Badehaus
316	43	56.5	Conversationshaus
316	44	44.5	
318	43	43.3	Sande
322	59	52.764	*Varel*

Jever Stadtkirche — 229525.455 + 135282.234

27°	48′	56″9	Platz auf dem Felde
93	47	20.2	Witmund
104	13	36.2	Burhave
129	31	15.2	Werdum
134	16	27.2	Thurm oder Mühle
138	36	13.2	Berdum
152	18	5.2	Meddoog
154	0	5.2	Carolinenmühle
171	33	39.2	Tettens
175	51	57.2	Wangeroog
187	46	0.2	Hohenkirchen
222	2	56.2	Fischhausen
224	58	3.2	Waddewarden
258	49	41.2	Sengwarden
285	20	43.2	Kuiphausen
291	56	20.2	Niende
296	22	16.2	Accum
320	36	32.7	Jever Schlossthurm Knopf
320	37	48.2	Jever Schlossth. Mitte des Cylinders
322	7	5.5	Jever Schlossth. Dreieckspunkt
332	33	38.2	Neustadt Gödens luth. Kirche
333	7	36.2	Neustadt Gödens Thurm
338	9	52.2	Schloss Gödens

Es werden hier noch diejenigen aus den Dänischen Messungen entlehnten Abrisse beigefügt, die zur Verknüpfung der Hannoverschen und Dänischen Dreiecke, imgleichen zur Festlegung der Altonaer Sternwarte gedient haben.

HAMBURG

— 224765.173 — 2369.933 (Centrum)

235°	56′	22″184	Basis nordlicher Endpunkt
245	30	54.784	Syk
247	31	30.894	Bornbeck
253	48	24.904	Basis südlicher Endpunkt
353	43	34.924	Rönneberg

HOHENHORN

— 216781.593 — 28139.131

5°	18′	44″020	Bäzendorf (nicht centrirt)
8	9	2.074	*Nindorf*
39	29	31.934	*Wilsede*
40	22	4.620	Winsen
44	31	54.420	Drenhausen
50	59	10.620	Alten Gamme
60	1	6.520	Kirchwerder
67	56	19.320	Entfernter hochliegender Th. (n. c.)
70	5	26.323	Neuen Gamme
71	44	26.223	Korslak
77	16	11.633	*Rönneberg*
86	33	8.673	Harburg
89	46	3.723	Ochsenwerder
90	6	42.023	Buxtehude
92	47	44.023	Moorburg
92	54	20.423	Wilhelmsburg
95	3	30.223	Entfernter Thurm (n. c.)
97	29	25.223	Hochliegende Mühle (n. c.)
97	47	27.890	Bergedorf grösster Thurm
103	27	48.623	Nienstedten
103	36	44.423	Baur's chinesischer Thurm
103	39	13.323	Baur's Warte
105	19	17.153	Altona Palmaille
105	37	10.123	Altona Armenkirche
106	27	21.623	Altona Rathhaus
107	12	49.223	*Hamburg Michaelis*
109	6	35.223	Spitzer Thurm (n. c.)
110	44	8.023	Kirchsteinbeck
117	52	48.023	Wandsbeck Schlossthurm
118	16	10.523	Rellingen spitzer Thurm
119	27	8.123	Niendorf
150	56	2.463	Basis südlicher Endpunkt
165	4	57.393	*Syk*
174	1	15.823	Bornbeck
293	22	34.820	Gülzow
309	46	2.720	*Lauenburg Signal*
354	28	34.520	*Lüneburg*
355	14	45.520	Bardewyk

LAUENBURG SIGNAL

— 206040.602 — 41045.727

16°	40′	32″488	Lauenburg Amtsthurm
35	56	29.438	*Lüneburg Michael*
47	54	31.4	Adendorf
51	55	17.4	Bardewyk südl.
51	58	5.4	Bardewyk nordl.
120	22	33.4	Signal beim Schafstall
129	46	4.164	*Hohenhorn*
131	28	11.4	Johanniswarden Kirchthurm
140	36	27.4	Thurmspitze
143	58	51.4	Mühle
147	25	49.4	Gülzow
187	12	0.4	Niendorfer Mühle
194	12	17.4	Büchen Kirchthurm
204	22	7.4	Thurm
218	3	33.4	Thurm

LAUENBURG AMTSTHURM

— 205266.638 — 40813.884

36°	50′	9″208	Lüneburg
196	40	32.648	Lauenburg Signal
281	14	7.309	Lauenburg Sector

LAUENBURG SECTORPLATZ

— 205234.429 — 40976.028

37°	20′	2″115	Lüneburg
101	14	7.315	Lauenburg Amtsthurm

RÖNNEBERG CENTRUM

— 211294.613 — 3850.827

79°	9′	53″458	Sinsdorf
110	27	50.421	Meridianpfahl
137	30	15.608	Baursberg
139	10	57.188	Baurswarte
139	30	54.788	Baurs chinesischer Thurm
142	46	33.288	Nienstedten
149	24	53.548	Moorburg
157	27	51.458	Wilsdorf
160	53	23.128	Harburg Kirchthurm
161	14	34.378	Ottensen
163	40	19.958	Altona. Schumachers Haus. Brett
163	58	44.788	Altona. Armenkirche
165	19	13.458	Harburg Rathhaus
166	0	57.708	Altona Hauptkirche
166	53	28.538	Altona Rathhaus
167	44	14.458	Harburg Schloss
170	48	40.508	Niendorf
173	43	34.958	*Hamburg Michaelis*
174	0	43.258	Hamburg Rosenthurm

174°	55′	49″738	Hamburg kleine Michaeliskirche
174	56	56.788	Hamburg Waisenhaus
176	45	22.538	Hamburg Nicolai
177	40	4.128	Hamburg Rathhaus
178	1	58.708	Hamburg Catharinen
178	45	16.958	Hamburg Petri
181	52	27.788	Hamburg St. Georg
188	33	10.958	Wilhelmsburg
194	28	33.128	Ham
195	58	25.038	Wandsbeck Schlossthurm
196	4	50.288	Wandsbeck Kirchthurm
196	52	20.788	Bergstedt
201	42	29.208	Hoisbüttel Pavillon
209	57	9.628	Moorfleth
220	21	11.458	*Syk*
220	50	37.788	Billwerder
225	53	55.628	Ochsenwerder
243	40	30.038	Bergedorf, grösster Thurm
254	20	35	Pfahlkanten $d = 2^m$ 293
260	5	35	$d = 2,$ 108
257	5	28	Pfahlmitte
257	16	12.078	*Hohenhorn*
260	47	15.208	Korslak
262	13	42.128	Neuengamme
269	1	10.128	Geesthacht
269	2	39.708	Altengamme
272	50	54.038	Drenhausen
274	13	48.368	Kirchwerder
278	2	25.358	*Lauenburg Signal*
279	15	45.738	Lauenburg Amtsthurm
297	40	10.538	Winsen
305	26	54.958	Lüneburg Nicolai
305	52	10.118	Lüneburg Johannis
306	23	35.038	*Lüneburg Michaelis*
306	52	0.458	Lüneburg Lamberti

ALTONA

vor dem Fenster in H. Conferenzrath Schumachers Wohnung

—224495.328 +16.354

1°	36′	53″450	Moorburg
13	34	19.830	Varendorf
20°	26′	15″391	Altenwerder
60	33	25.716	Apensen
64	36	22.633	Buxtehude
67	15	43.383	Neuenfelde
74	23	7.466	Estebrügge
273	34	23.591	Roosens Thurm in Hamburg
277	53	53.591	Steinbeck
285	19	17.341	Hohenhorn
292	26	29.191	Moorfleth
299	22	37.860	Bankthurm in Altona
299	52	11.591	Ferner Thurm
307	8	44.091	Dede's Balcon Fahnenstange
309	29	44.544	Ochsenwerder
316	0	42.291	Lüneburg
316	31	29.712	Lüneburg Johannis
317	2	38.291	Lüneburg
319	21	30.991	Winsen
323	17	20.541	Wilhelmsburg
341	29	28.091	Harburg Schloss
342	53	36.091	Harburg Rathhaus
343	39	45.759	Ronneburg Pfahl
343	40	18.891	Ronneburg Centrum
344	47	29.610	Wilsdorf
344	52	54.008	Harburg
350	57	2.108	Sinsdorf
354	57	42.091	Kohler's Thurm
359	59	56.610	Meridianpfahl

MERIDIANPFAHL FÜR DIE ALTONAER STERNWARTE

—212737.671 +16.168

191°	13′	14″142	Hamburg Michaelis
221	6	38.242	Harburg Schloss
224	9	33.442	Harburg Rathhaus
225	2	2.982	Harburg Kirchthurm
260	40	5.642	Wilsdorf
290	27	51.922	Rönneberg

ABRISSE DER VOM HAUPTMANN MÜLLER UND LIEUTENANT GAUSS IM JAHRE 1828 IM EICHSFELDE AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

SONNENSTEIN

Theodol.	+ 3330.629	— 30682.728
Pfahl	+ 3331.220	— 30683.287

27°	9′	33″155	Nebenplatz
86	22	45.054	Hohehagen
93	39	28.155	Euzenberg Pfahl
93	39	34.523	Euzenberg Theodolith
114	43	50.347	Lauseberg Pfahl
114	43	56.174	Lauseberg Theodolith
131	1	22.648	Hellberg
144	39	18.722	Wulften Thurm
144	39	20.430	Wulften Pfahl
205	4	9.569	Brocken
316	35	23	Pfahl, Entfernung = $0^{m}813$

LAUSEBERG

Theodol.	— 6335.1	— 9699.0
Pfahl	— 6334.675	— 9698.349

57°	2′	17″359	Pfahl, Entfernung $0^{m}772$
146	47	0.043	Tockenberg
212	28	38.147	Wulften Pfahl
212	28	49.610	Wulften Theodolith
236	51	36.734	Brocken
276	17	59.351	Hellberg
294	43	55.024	Sonnenstein Theodolith
294	43	57.727	Sonnenstein Pfahl
313	41	30.563	Euzenberg Pfahl
313	41	33.427	Euzenberg Theodolith

WULFTEN

Theodol.	— 16833.7	— 16382.2
Pfahl	— 16834.496	— 16381.887

0°	2′	13″194	Nebenplatz bei Wulften
32	28	51.964	Lauseberg Pfahl
32	28	46.648	Lauseberg Theodolith
81	15	20.210	Tockenberg
143	21	35.810	Nebenplatz bei Marke
324	39	18.177	Sonnenstein Pfahl
324	39	19.126	Sonnenstein Theodolith
352	12	54.559	Euzenberg Pfahl
352	13	1.107	Euzenberg Theodolith
158	30	29.394	Pfahl, Entfernung $0^{m}855$

EUZENBERG

Theodolith	+ 2585.7	— 19036.8
Pfahl	+ 2586.105	— 19037.483

133°	41′	19″724	Lauseberg Pfahl
133	41	32.065	Lauseberg Theodol.
172	12	56.879	Wulften Pfahl
172	12	58.859	Wulften Theodol.
194	24	29.000	Hellberg
219	46	31.858	Brocken
273	39	38.381	Sonnensteiu Theodolith
273	39	47.941	Sonnenstein Pfabl
300	38	25.441	Pfahl, Entfernung $0^{m}794$

TOCKENBERG

— 14939.2 — 4064.9

38°	11′	2″829	Hohehagen?
155	43	20.280	Hils
250	3	16.408	Brocken
261	15	5.936	Wulften Pfahl
261	15	19.741	Wulften Theodol.
326	47	0.511	Lauseberg Theodolith
326	47	15.996	Lauseberg Pfahl

NEBENPLATZ BEI WULFTEN

— 15910.2 — 16381.6

26°	1′	9″	Wulften Thurm
34	55	9	Lauseberg Signal
85	30	19	Tockenberg Signal
180	2	19	Wulften Signal
180	2	49	Wulften Theodolith

PLATZ BEI HELLBERG

— 7052.9 — 20631.6

9°	23′	36″	Euzenberg
86	14	21	Lauseberg
132	24	26	Hils
156	31	11	Wulften Signal
227	57	46	Brocken
315	56	26	Sonnenstein
349	9	6	Hellberg Signal

ABRISSE DER VOM LIEUTENANT GAUSS UND LIEUTENANT HARTMANN IM JAHRE 1829 IN WESTFALEN AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

ASENDORF

−138674.292 +63178.094

25°	49′	27″255	*Knickberg*
33	14	44.755	Nonnenstein
98	13	58.820	*Twistringen*
159	2	41.088	*Bremen Knopf*
216	16	52.932	*Steinberg*
264	5	5.757	*Bücken*

NONNENSTEIN

−82615.339 +99921.177

2°	1′	10″100	*Hünenburg*
73	3	40.106	*Dörenberg*
152	14	22.087	*Mordkuhlenberg*
191	23	31.393	Twistringen
213	14	20.018	Asendorf
217	16	22.768	*Knickberg*
274	35	55.464	Wittekindstein

DÖRENBERG

Platz 1. −73683.735 +129245.868

52°	33′	53″314	*Münster*
104	46	18.604	Bentheim, südlicher Schlossthurm
104	52	7.354	Bentheim, nordl. Schlossthurm
108	18	8.354	*Tecklenburg*
155	5	1.730	*Queckenberg*
177	33	20.938	*Osnabrück Catharinen*
196	10	16.957	*Mordkuhlenberg*
211	4	55.730	Twistringen
228	54	44.889	*Schledehausen*
306	46	9	Centrum, Abstand 0^{m}1136

DÖRENBERG

Platz 2. August −73683.920 +129245.965

52°	33′	52″186	*Münster*
104	48	41.565	*Bentheim Signal*
111	31	42.072	Nebenplatz
155	5	1.778	*Queckenberg*
196	10	17.645	*Mordkuhlenberg*
211	5	5.395	Twistringen
253	3	35.836	*Nonnenstein*
303	15	6.714	*Hünenberg*
323	17	46	Centrum, Abstand 0^{m}315
332	10	39	Platz vom Juni Abstand 0^{m}2083

Füsse des Signals

1.	+0.8179	+1.3988
2.	−1.3212	+0.3440
3.	−0.3001	−1.7650
4.	+1.8137	−0.7309
Centrum	+0.2526	−0.1883

Nebenplatz −73906.356 +129809.92

196°	58′	23″860	Mordkuhlenberg
291	32	38.443	Dörnberg

QUECKENBERG

−114710.274 +148300.732

59°	7′	20″679	*Bentheim*
107	3	39.817	*Kirchhesepe*
199	0	41.982	*Molbergen*
268	47	55.367	*Mordkuhlenberg*
335	5	28.167	*Dörenberg*
200	1	59.324	Centrum, Distanz 0^{m}1463

BENTHEIM

Platz 1. −89763.306 +190019.671

46°	31′	27″8	Centrum, Distanz 7^{m}6164
190	42	50.364	Kirchhesepe
239	7	5.849	Queckenberg
212	17	37.864	Bentheim nordl. Schlossthurm

BENTHEIM

Platz 2. −89755.454 +190018.902

112°	31′	40″8	Centrum, Distanz 6^{m}8165
239	6	35.572	Queckenberg
284	48	53.822	Dörenberg
348	5	25.819	Bentheim, Kirche

BENTHEIM

Platz 3. −89755.621 +190021.633

76°	15′	14″3	Bentheim südl. Thurm
124	26	16.8	Centrum, Distanz 4^{m}3219
190	42	53.150	Kirchhesepe
194	13	11.8	Platz 1.
274	2	6.8	Platz 2.

KIRCHHESEPE

Platz 1. — 125441.463 + 183265.532

10°	41′	25″619	Bentheim nordl. Schlossthurm
10	43	53.119	*Bentheim Signal*
10	51	3.432	Bentheim südl. Schlossthurm
60	55	54.115	*Ulsen*
69	18	0	Platz 2. Abstand 1^{m}689
147	48	40	Centrum, Abstand 0^{m}5655
183	20	46.963	*Steinbild*
287	3	44.404	*Queckenberg*

MORDKUHLENBERG

— 115363.309 + 117156.397

16°	10′	41″910	*Dörenberg*
88	47	56.842	*Queckenberg*
144	4	12	Nebenplatz. Abstand 0^{m}218
160	48	42.155	Krapendorf
227	24	45.823	*Twistringen*
267	27	20.832	*Knickberg*
332	14	41.904	*Nonnenstein*
104	30	0.552	Centrum, Abstand 0^{m}1021

NEBENPLATZ

— 115363.486 + 117156.525

88°	47′	55″655	Queckenberg
227	24	46.947	Twistringen

TWISTRINGEN

— 142250.951 + 87900.139

11°	24′	3″930	*Nonnenstein*
47	25	48.334	*Mordkuhlenberg*
199	19	46.504	Bremen Stephani
200	32	17.338	*Bremen Ansgarius Knopf*
200	52	5.713	Bremen Martini
201	5	24.213	Bremen Liebfrauen
201	16	59.838	Bremen Dom
278	13	51.157	*Asendorf*
330	2	38.792	*Knickberg*
142	19	56	Centrum, Abstand 0^{m}625

WINDBERG

— 153042.9 + 162456.4

37°	0′	41″25	Kirchhesepe
91	22	48.125	Clojter Ter Appel
119	21	56.25	Onstwedde
135	50	53.75	Midwolde?
141	12	46.25	Rhede

KINCKBERG

— 117302.184 + 73520.620

37°	16′	37″688	*Nonnenstein*
87	27	21.350	*Mordkuhlenberg*
150	2	26.706	*Twistringen*
205	49	20.060	*Asendorf*
297	56	54.511	*Stolzenau*
357	27	5.534	Wittekindstein

ABRISSE DER VOM LIEUTENANT HARTMANN IM JAHRE 1830 IN WESTFALEN UND IM JAHRE 1831 IN OSTFRIESLAND AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

WINDBERG

— 153045.029 + 162445.515

37°	1′	46″363	Kirchhesepe
91	23	54.555	Closter Ter Appel
119°	23′	0″944	Onstwedde
141	13	47.819	Rhede
174	5	38.466	Leer
214	9	0.887	Westerstede
278	32	59.881	Krapendorf
339	45	4.037	Queckenborg

KIRCHHESEPE

Hauptplatz 1830. — 125441.533 + 183265.498

10°	43′	53″102	Bentheim 1829
		53.217	Bentheim 1830
160	55	1.485	Terappel
166	14	9.686	Onstwedde
217	1	17.275	Windberg
287	3	46.653	Queckenberg 1829
287	3	47.095	Queckenberg 1830
25	51	22	Platz 1 von 1829
140	43	5	Centrum. Abstand $0^{m}5288$

NB. Es sind hier auch die neu reducirten Richtungen nach Bentheim, Uelsen, Steinbild, Queckenberg eingeschaltet wie sie sich aus den Messungen des Jahres 1829 ergeben haben.

QUECKENBERG

— 114710.274 + 148300.732

59°	7′	21″639	Bentheim
107	3	41.548	Kirchhesepe
159	44	34.456	Windberg
268	47	55.635	Mordkuhlenberg

KRAPENDORF.

— 147940.545 + 128941.591

0°	35′	16″292	Dörenberg
30	48	12.070	Queckenberg
98	32	56.522	Windberg
172	38	55.852	Westerstede
201	43	32.919	Oldenburg
258	20	6.197	Wildeshausen
277	58	55.934	Twistringen
340	49	2.985	Mordkuhlenberg
276	53	26	Centrum, Abstand $200^{mm}0$
			Noch einfach
139	16	52.2	Leer
244	15	40.2	Bremen Ansgar. Thurm
244	33	17.7	Bremen Liebfrauen Thurm

Nebenplatz — 147940.542 + 128491.882

294°	59′	15″355	Langfarden
340	49	1.337	Mordkuhlenberg
272	30		Centrum, Abstand $0^{m}490$
			Ohne Repetition
30	48	5.4	Queckenberg

LEER REFORMIRTE KIRCHE

Hauptplatz — 192086.840 + 166481.565

50°	43′	16″784	Leer luther. Kirche
53	4	4.322	Onstwedde
55	54	38.659	Leer kathol. Kirche
134	48	45.508	Emden reform. Kirche
135	35	15.508	Emden Rathhausthurm
135	41	13.633	Emden Nadelspitze
139	50	56.758	Pilsum
186	16	7.292	Aurich
266	4	22.766	Westerstede
354	6	18.850	Windberg
269	12	2.1	Centrum, Abstand $0^{m}489$

Centrum des Thurmes

— 192086.847 + 166481.076

LEER LUTHERISCHE KIRCHE

Platz 1. — 191948.019 + 166652.853

186°	35′	48″847	Aurich
201	37	39	Leer Gymnasium
226	16	29	Leer kathol. Kirche
231	2	9	Leer reform. Kirche

Platz 2. — 191944.651 + 166652.609

Platz 3. — 191945.714 + 166655.147

ONSTWEDDE

— 171064.885 + 194444.509

198°	25′	29″038	Emden
233	3	46.007	Leer ref. Kirche
233	4	46.507	Leer luth. Kirche
299	23	15.837	Windberg
346	14	55.976	Kirchhesepe
355	27	19.341	Kl. ter Appel
140	0	36	Centrum, Abstand $0^{m}277$

EMDEN RATHHAUSTHURM

— 208050.068 + 182119.457

18°	26′	17″755	Onstwedde
145	46	34.609	Pilsum
193	12	13.826	Hage
239	54	49.147	Aurich
315	35	27.276	Leer
122	11	50	Centrum, Abstand $0^{m}4202$

EMDEN NEUE KIRCHE

Platz 1. —208112.946 +181614.276

239°	22′	19″	Aurich
316	38	29	Leer reform. Kirche
316	50	19	Leer Gymnasium
316	55	19	Leer kathol. Kirche
316	58	49	Leer Wage
317	13	19	Leer luther Kirche
84	56	30	Centrum, Entfernung 1^m 360

WESTERSTEDE

—194284.694 +134467.455

34°	9′	29″275	Windberg
85	50	40.098	Leer luther. Kirche
86	4	21.973	Leer reform. Kirche
130	8	39.060	Aurich
178	54	3.102	Jever
223	17	55.049	Varel
223	21	10.049	Varel Nebenthurm
306	7	45.969	Oldenburg
352	39	23.890	Krapendorf
293	38	50	Centrum, Abstand 0^m 6211

TWISTRINGEN 1830

—142251.445 +87901.331

47°	24′	58″835	Mordkuhlenberg
87	34	27.587	Langfarden
97	58	57.587	Krapendorf
269	56	29	Centrnm, Entfernung 0^m 810

AURICH

Platz 1. —218808.844 —163542.859

6°	16′	39″773	Leer reform. Kirche
43	25	40	Aurich Schlossthurm
59	55	27.012	Emden Rathhausthurm
205	52	38.975	Esens
249	38	49.801	Jever Schlossthurm
310	8	56.005	Westerstede
132	4	40	Centrum, Abstand 2^m 500

AURICH

Platz 2. —218812.200 +163546.772

6°	16′	7″150	Leer
59	22	12.664	Emden neue Kirche
59	48	0.264	Emden Gasthofskirche
59	54	40.264	Emden Rathhausthurm
60	1	55.264	Emden reform. Kirche
95°	15′	34″264	Pilsum
140	42	55.326	Hage
172	7	10.326	Dornum Dorf
172	25	59.284	Dornum
205	53	26.388	Esens
205	55	40.388	(Esens?) goldner Knopf
249	39	18.534	Jever
309	14	6	Centrum, Abstand 2^m 655

DORNUM

Platz 1. —238863.423 +166209.448

14°	42′	20″1	Dornum Dorfkirche
63	53	0.436	Hage
242	15	12.019	Wangeroog
272	33	29.394	Esens
273	31	22.894	Esens Thurm a. Haus
287	1	59.353	Jever
352	26	0.436	Aurich
352	52	35.436	Aurich Schloss
121	18	40.1	Centrum, Abstand 0^m 424

DORNUM

Platz 2. —238863.454 +166210.318

63°	52′	48″826	Hage
67	33	13.826	Kl. Laternenthurm
272	10	53	Platz 1. Entfernung 0^m 870
352	25	56.326	Aurich

JEVER

Platz 1. —229345.683 +135137.833

69°	39′	9″565	Aurich
358	54	25.503	Westerstede ·
70	19	57.4	Centrum, Entfernung 0^m 335
80	45	5.4	Platz 2. Entfernung 3^m 455

JEVER

Platz 2. —229345.127 +135141.244

69°	28′	42″	Aurich Schlossthurm
69	39	5.402	Aurich
106	31	42	Dornum Kirchthurm
107	2	2.902	Dornum
115	22	12	Esens
141	27	2	Jever Stadtkirche
261	51	16	Centrum, Abstand 3^m 1265

JEVER

Platz 3. —229344.047 +135144.737

69°	39′	4″393	Aurich
107	2	13.843	Dornum
142	17	53.887	Jever, Stadtkirche

150°	2′	53″9	Grad-Messungs-Centrum, Abstand $0^{m}200$
236	35	43.9	Neuer Versicherungs-Punkt, Abstand $1^{m}453$
256	58	58.4	Centrum des Thurms, Abstand $6^{m}7602$
322	58	2.424	Varel
358	53	53.987	Westerstede

ESENS

Platz 1. — 238321.458 + 154076.788

25°	53′	14″335	Aurich
26	2	36.835	Aurich Schlossthurm
295	5	21.8	Jever Stadtkirche
295	21	41.835	Jever Schloss
172	57	1.8	Centrum Abstand $0^{m}310$

ESENS

Platz 2. — 238321.579 + 154077.316

25°	53′	15″150	Aurich
26	2	25.15	Aurich Schloss
78°	59′	50″15	Hage
91	13	55.15	Dornum Dorf
92	33	35.150	Dornum Schlosskirche
249	7	15.15	Centrum, Abstand $0^{m}524$

ESENS

Platz 3. — 238322.085 + 154076.203

62°	34′	15″525	Centrum Abstand $0^{m}7002$
226	21	15.525	Wangeroog Kirche
226	41	45.525	Wangeroog Leuchtthurm
295	21	45.525	Jever Schlossthurm

VAREL

— 209474.540 + 120153.185

43°	17′	59″438	Westerstede
142	58	41.271	Jever
43	17	59	Centrum, Abstand $0^{m}056$

ABRISSE DER VOM HAUPTMANN MÜLLER IM JAHRE 1831, UND VOM LIEUTENANT GAUSS IN DEN JAHREN 1831 UND 1832 IM LÜNERURGISCHEN AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

LÜNEBURG

— 191597.782 — 30574.270

174°	28′	39″022	Hohenhorn
215	56	36.728	Lauenburg Signal
216	50	17.389	Amtsthurm
265	4	34.857	Bretze
336	23	20.685	Tötendorf
344	1	56.	Centrum, Abstand $0^{m}5133$

LAUENBURG

— 206040.464 — 41045.627

16°	40′	21″938	Lauenburg Amtsthurm
35	56	29.438	Lüneburg
47	54	35.063	St. Nicolai
129	46	6.234	Hohenhorn
325	22	8.317	Bretze

BRETZE

— 193260.212 — 49872.299

22°	18′	11″087	Tätendorf
85	4	29.900	Lüneburg
142	58	1.351	Lauenburg Amtsthurm
145	22	9.474	Lauenburg Signal
289	53	32.394	Glienitz

TAETENDORF

— 169626.902 — 40177.793

10°	39′	51″042	Holxerberg
156	23	25.068	Lüneburg
202	18	15.323	Bretze
234	27	52.827	Glienitz
271	14	30.886	Hohen Mechthin
320	4	36.788	Pugelatz
342	50	37.618	Wieren

GLIENITZ

— 187641.574 — 65399.907

1°	42′	37″651	Hohen Mechthin
54	27	47.923	Tätendorf
109	53	34.153	Bretze
120	29	51.028	Hamburg
127	4	20.403	Lauenburg
128	1	43.841	Hohenhorn
293	19	21.436	Höbeck

HOHEN MECHTHIN

Hauptplatz — 169092.114 — 64845.685

17°	24′	55″661	Pugelatz
42	52	33.591	Wieren
56	30	7.091	Holxerberg
91	14	30.670	Tätendorf
181	42	44.220	Glienitz
264	31	4.451	Höbeck

HOHEN MECHTHIN

Andere Aufstellung — 169092.446 — 64846.770

181°	42′	32″276	Glienitz
264	31	5.755	Höbeck
73	0	27.276	Centrum, Abstand 1^{m} 1345

HÖBECK

— 172512.986 — 100488.736

59°	40′	56″079	Pugelatz
84	31	2.991	Hohen Mechthin
113	19	27.366	Glienitz

PUGELATZ

— 148039.910 — 58241.686

45°	36′	13″142	Hankensbüttel
96	2	28.994	Wieren Signal
106	49	34.994	Wieren Thurm
140	4	42.739	Tätendorf
197	25	2.144	Hohen Mechthin
239	55	5.463	Höbeck

WIEREN

— 149287.144 — 46456.701

11°	22′	52″133	Hankensbüttel
96	12	46.622	Holxerberg
160°	16′	42″878	Lüneburg Johannis
162	50	42.128	Tätendorf
220	55	6.558	Wieren Kirchthurm
222	52	39.610	Hohen Mechthin
276	2	28.308	Pugelatz
252	50	42.128	Centrum, Abstand 0^{m} 030

HOLXERBERG

— 150366.695 — 36550.632

190°	39′	57″544	Tätendorf
236	30	14.586	Hohen Mechthin
276	13	15.378	Wieren
0	20	33.003	Centrum, Abstand 1^{m} 315

HANKENSBÜTTEL

— 133361.111 — 43253.191

20°	54′	38″765	Wolenberg
46	28	22.999	Nebenplatz
191	22	25.663	Wieren
225	35	55.008	Pugelatz
243	52	44.179	Hankensbüttel Thurm
358	14	13.890	Brocken
113	9	30.661	Centrum, Abstand 2^{m} 432

Nebenplatz — 133168.0 — 43050.1

191°	55′	57″000	Wieren
241	6	44.500	Hankensbüttel Thurm
226	28	32.000	Hankensbüttel Postament

WOLENBERG

— 102753.219 — 31555.355

12°	7′	49″641	Lichtenberg Ruine
12	25	25.138	Lichtenberg
21	19	1.891	Woldenberg Ruine
21	22	26.016	Woldenberg Thurm
78	57	49.464	Hannover Marktthurm
130	23	20.663	Celle Schlossthurm 1
130	25	11.038	Celle Uhrthurm
130	26	9.288	Celle Schlossthurm 2
130	48	4.163	Celle Kirchthurm
200	54	38.811	Hankensbüttel
334	51	12.997	Festberg
348	24	10.944	Brocken
248	27	59.647	Centrum, Abstand 1^{m} 618.

STEINBERG

— 148667.0 — 44235.6

3°	40′	46″734	Hankensbüttel Signal
102	27	45.807	Holxerberg

ABRISSE DER VOM LIEUTENANT HARTMANN IM JAHRE 1833 IM HARZE AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

1. BROCKEN.

— 30310.087 — 46418.626

14°	22'	30"694	Lange Ecke Signal
14	26	19 652	Lange Ecke Spitze der Hütte
25	4	7 472	Sonnenstein
109	25	24 027	Bocksberg
313	10	17 826	Schallliethe
357	58	10 450	Eversberg

2. SONNENSTEIN

Pfahl + 3330.905 — 30681.570
Theod. + 3330.601 — 30681.085

177°	8'	6"081	Haspelkopf
177	8	2 183	Haspelkopf vom Pfahl aus (reducirt)
205	4	17.555	Brocken Signal
205	4	14.402	Brocken vom Pfahl
213	18	10.055	Langenecke Spitze der Hütte
213	19	56.463	Langenecke Signal
213	19	50.904	Langenecke vom Pfahl
219	22	41.335	Eversberg
219	22	36.760	Eversberg vom Pfahl.
247	9	1.066	Schallliethe
248	8	58.566	Schallliethe vom Pfahl
302	6	13	Pfahl, Distanz = 0^{m}572

3. SCHALLLIETHE

Signal — 11672.502 — 66284.731
Theod. — 11673.639 — 66284.503

67°	8'	48"706	Sonnenstein
67	8	54.774	Sonnenstein auf das Signal reducirt
96	29	22.854	Langenecke Signal
96	29	32.307	Langenecke vom Signal ab.
103	49	42.854	Eversberg Pfahl
103	49	53.710	Eversberg vom Signal ab
133	10	19.729	Brocken
133	10	24.831	Brocken vom Signal ab
348	40	55	Pfahl, Distanz = 1^{m}160

4. EVERSBERG

Signal — 16442.670 — 46910.145
Theod. — 16443.513 — 46910.091

39°	22'	27"119	Sonnenstein
39	22	31.771	Sonnenstein vom Signal ab
65	51	51.018	Langenecke Spitze der Hütte
65	52	32.268	Langenecke Signal
65	53	4.892	Langenecke vom Signal ab
106°	6'	11"524	Haspelkopf
106	6	20.542	Haspelkopf vom Signal ab
177	58	13.518	Brocken
177	58	13.154	Brocken vom Signal ab
283	50	1.137	Schallliethe
283	49	52.806	Schallliethe vom Signal ab
356	18	29	Pfahl, Distanz = 0^{m}845

5. LANGENECKE

Pfahl — 14397.360 — 42340.224
Theod. — 14398.231 — 42341.713

33°	19'	55"184	Sonnenstein
33	19	47.746	Sonnenstein vom Pfahl ab
194	22	17.684	Brocken Signal
194	22	33.035	Brocken vom Pfahl ab
194	22	20.747	Brocken Mitte
245	53	28.934	Eversberg
245	53	21.016	Eversberg vom Pfahl ab
276	29	41.559	Schallliethe
276	29	32.674	Schallliethe vom Pfahl ah
59	29	52	Signal Distanz 1^{m}725

6. HASPELKOPF

Pfahl — 21487.255 — 29438.938

126°	28'	9"491	Fahrenberg
176	36	58.946	Bocksberg
286	6	18.355	Eversberg
357	7	59.855	Sonnenstein
199	43	0	Stange 2^{m}42

7. BOCKSBERG

— 36612.665 — 28544.522

73°	39'	8"008	Fahrenberg
143	16	32.383	Hannover Marktthurm
289	25	22.591	Brocken Signal
289	25	25.508	Brocken Mitte
354	10	40.175	b. d. Haspelkopf
356	36	38.925	Haspelkopf Stange
356	36	55.175	Haspelkopf Pfahl

8. FAHRENBERG

— 32503.262 — 14534.999

253°	39'	6"657	Bocksberg
305	21	29.569	b. d. Haspelkopf
306	27	45.438	Haspelkopf Stange
306	28	10.063	Haspelkopf Pfahl
321	12	53.319	Fahrenberg Nebenplatz 1.

ABRISSE DER VON HERRN HAUPTMANN MÜLLER UND DEM LIEUTENANT GAUSS IM JAHRE 1833 AN DER MITTELWESER AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

KNICKBERG

— 117302.185 + 73520.620

37°	16'	44"275	Nonnenstein
259	55	37.641	Osterberg
357	27	11.242	Wittekindstein

WITTEKINDSTEIN

— 80356.285 + 71875.835

48°	57'	26"714	Hünenburg
94	36	10.892	Nonnenstein
177	26	56.302	Knickberg
211	3	48.925	Osterberg
270	29	32.770	Deister
326	17	7.472	Köterberg
172	1	42.4	Centrum, Abstand 1m209

OSTERBERG

— 122055.962 + 46755.553

31°	4'	4"784	Wittekindstein
53	30	58.811	Nonnenstein
79	55	42.725	Knickberg
337	52	14.709	Deister
230	43	16.	Centrum, Abstand 1m565

DEISTER

— 79993.559 + 29649.764

16°	37'	40"360	Kötersberg
90	29	36.540	Wittekindstein
157°	52'	6"841	Osterberg Heliotrop
157	52	13.634	Osterberg Signal
203	4	11.6	Centrum, Abstand 0m028

KÖTERBERG

— 36529.559 + 42629.094

12°	57'	58"276	Desenberg
59	31	31.844	Hausheide
107	40	21.409	Hünenburg
146	16	58.740	Wittekindstein
196	37	32.259	Deister
212	33	47.492	Osterwald
262	47	23.520	Hils

OSTERWALD

— 66770.032 + 22566.745

33°	33'	43"727	Köterberg
151	49	28.009	Deister
330	0	46.043	Hils
280	40	39.	Centrum, Abstand 1m880

HILS

— 40952.298 + 7668.304

82°	47'	24"755	Köterberg
150	0	53.262	Osterwald
281	7	59.620	Brocken

ABRISSE AUS DEN MESSUNGEN DES MAJOR MÜLLER AN DER OBERWESER VOM JAHR 1836.

[IM AUSZUGE.]

MERIDIANZEICHEN.

— 5019.756 0

0°	0'	1"212	Sternwarte
1	38	31.524	Göttingen, Albani
6	37	29.868	Göttingen, Jacobi
6°	56'	20"295	Göttingen, Rathhaus
8	6	14.179	Göttingen, Johannis südl. Thurm
8	7	16.320	Göttingen, Johannis nordl. Thurm
11	9	4.116	Göttingen, Mariae
15	45	13.755	Gieseberg
48	19	38.241	Hohehagen
143	41	13.812	Weper

KLEPER.

+ 220.895 — 1883.547

1°	12′	20″382	Diemarder Warte
5	39	47.632	Hanstein
14	11		Haus Arnstein
16	0	22.362	Hevenhausen
16	11	2.382	Friedland
16	40	34.632	Gross Schneen
19	40	30.319	Stockhausen
25	30	46.132	Klein Schneen
27	53	30.007	Ober Jesa
28	16	29.107	Geismar
28	22	1.819	Nieder Jesa
28	51	53.132	Gieseberg
32	33	13.257	Deiderode
42	21	31.667	Sieboldshausen
47	13	14.494	Steinberg
50	28	41.305	Volkerode
56	55	52.042	Meensen
57	25	27.667	Lembshausen
58	57	31.977	Meenserberg
60	46	7.334	Mengershausen
62	31	22.604	Rossdorf
67	49	55.917	Hohehagen
76	30	54.292	Sesebühl
77	10	1.365	Settmarshausen
78	57	48.208	Varmissen
84	46	11.229	Ellershausen
94	49	2.167	Hetgershausen
96	47	15.742	Sternwarte
100	31	44.542	Grone
103	23	16.979	Göttingen, Mariae
105	37	19.604	Göttingen, Johannis südl. Thurm
105	48	56.104	Göttingen, Rathhaus
105	55	35.229	Göttingen, Johannis nordl. Thurm
108	28	23.376	Kuhberg
111	7	51.855	Göttingen. Albani
111	20	37.542	Göttingen, Jacobi
112	41	1.917	Elliehausen
125	24	9.869	Holtensen
131	45	9.333	Fahlerstollen
132	7	25.166	Lenglern
136	54	36.250	Harste
141	43	5.057	Gladebeck
142	2	39.982	Gladeberg Signal
148	40	42.807	Weper
148	56	18.307	Weende
150	33	19.857	Lutterhausen
151	25	54.463	Hevensen
153	21	28.807	Wolbrechtshausen
153	50	57.119	Bovenden
155	19	26.994	Parensen
158	34	49.307	Moringen, oberes Dorf
160	13	24.869	Moringen
177	35	40.182	Plesse, dünner Thurm
178	0	8.057	Plesse, dicker Thurm
187	49	56.307	Clausberg
215	30	12.932	Roringen
324	13		Ruine auf der südlichen Gleiche
329°	26′	23″507	Einzelnes hohes Haus
351	6	40.819	Rusteberg
351	55	24.382	Reinhausen, Amthaus

HOHEHAGEN

+ 6060.027 + 12447.725

21°	37′	18″723	Steinberg, Signal
21	37	32.503	Steinberg, Postament
164	51	54.492	Fahlerstollen
240	27	33.131	Göttingen, Jacobi
240	36	44.131	Göttingen, Mariae
240	55	55.131	Göttingen, Johannis nordl, Thurm
241	0	1.131	Göttingen, Johannis südl. Thurm
241	14	9.131	Göttingen, Rathhaus
241	45	34.131	Göttingen, Albani
244	3	50.717	Sternwarte
247	49	54.626	Kleper
311	46	53.942	Gieseberg, Postament
311	47	11.835	Gieseberg, Signal
346	58	53.899	Meisner

GIESEBERG

+ 12712.662 + 5002.234 Postament
+ 12713.539 + 5002.747 Signal

67°	14′	59″701	Steinberg, Signal
67	15	15.495	Steinberg, Postament
131	46	62.528	Hohehagen
195	45	11.874	Meridianzeichen
198	14	52.204	Göttingen, Johannis nordl. Thurm
198	15	54.204	Göttingen, Johannis südl. Thurm
198	32	16.204	Göttingen, Jacobi
200	10	5.204	Göttingen, Albani
201	30	32.637	Sternwarte
208	51	52.263	Kleper
329	59	25.204	Weper

WEPER

— 15348.043 + 7590.451

12°	47′	0″582	Hohehagen
272	0	49.705	Tockenburg
323	41	13.840	Meridianzeichen
328	40	43.585	Kleper
333	13	39.705	Göttingen, Albani
334	9	22.510	Göttingen, Jacobi
334	55	43.705	Göttingen, Johannis nordl. Thurm
334	57	11.705	Göttingen, Johannis südl. Thurm
347	5	1.033	Weper, Nebenplatz 1

STEINBERG

+ 17782.597 + 17095.067 Postament
+ 17783.447 + 17094.498 Signal

176°	51′	7″042	Fahlerstollen
201	37	30.748	Hohehagen

221°	54′	6″841	Göttingen Jacobi
221	58	39.841	Göttingen Johannis nordl. Thurm
221	59	58.841	Göttingen Johannis südl. Thurm
222	46	29.841	Göttingen Albani
227	13	14.341	Kleper
247	15	13.857	Gieseberg Postament

FAHLERSTOLLEN

— 18501.058 + 19090.605 Postament
— 18502.084 + 19091.158 Brett

311°	45′	10″978	Kleper
344	51	57.333	Hohehagen
356	51	8.659	Steinberg

STERNWARTE

Platz auf der südlichen Dachbrüstung

+ 2.998 — 6.528

0°	1′	54″826	Südliches Meridianzeichen
5	47	29.576	Stockhausen
6	7	29.516	Gross Schneen
11	9	7.176	Niederjesa
14	38	51.326	Oberjesa
20	34	39.751	Dreckwarte
21	30	32.411	Gieseberg Postament
21	30	34.726	Gieseberg Signal
30	34	24.026	Sieboldshausen
41	51	3.146	Volkerode
47	40	34.209	Rossdorf
51	22	34.993	Mengershausen
64	3	48.639	Hohehagen
73	11	48.776	Sesebühl
76	51	6.126	Jägers Haus
117	59	30.376	Elliehausen
126	52	35	Johannis südl. Thurm
127	40	54	Johannis nordl. Thurm
130	8	13	Rathhaus
276	37	20.176	Kleper
334	57	5.516	Geismar
355	49	41.001	Heidelbachs (jetzt Reibsteins) Gartenhaus.

ABRISSE AUS DEN MESSUNGEN DES MAJOR MÜLLER IN DER ALLERGEGEND VOM JAHR 1838.

[IM AUSZUGE.]

FALKENBERG

— 146621.055 + 5142.634 Theodolithplatz 1838
— 146621.421 + 5141.523 Signal

9°	21′	15″182	Hannover Aegidius
9	41	19.303	Hannover Marktthurm
9	54	34.553	Hannover Kreuzthurm
10	9	50.053	Hannover Neustädter Thurm
10	31	42.803	Hannover Waterloosäule
22	44	15.130	Brelingerberg
82	12	10.312	Asendorf
176	42	49.434	Epailly's Signal, Dist. 3^m^764
251	46	19.062	Signalpfahl, Dist. 1^m^170
329	36	26.184	Celle Stadtkirche
329	59	9.312	Celle feine Thurmspitze
330	3	45.312	Celle Schlosskuppel 1.
330	4	46.562	Celle Schlosskuppel 2.
353	9	1.592	Osterberg
353	58	51.057	Windmühle unfern des Osterberges
65°	42′	24″889	Schloss S. O. Pavillon
67	58	42.305	Südwestliche Schlosskuppel
73	53	59.805	Schlossthurm Spitze
73	54	51.639	Schlossthurm Theodolithplatz
78	15	3.618	Brelingerberg
149	36	27.221	Falkenberg
284	18	44.611	Centrum des Thurms, Distanz 0^m^258

CELLE STADTKIRCHE

— 121931.416 — 9338.299 Theodolithplatz
— 121931.352 — 9338.549 Thurmknopf

37°	55′	58″611	Osterberg
39	54	11.361	Hannover Marktthurm

OSTERBERG

— 109129.937 — 639.143

41°	28′	14″360	Hannover Marktthurm
40	24	35.571	Hannover Aegidius
42	10	47.360	Hannover Kreuzthurm
42	18	16.360	Hannover Neustädter Kirchthurm
112	31	58.497	Brelingerberg
217	56	0.291	Celle Stadtkirche
228	31	39.322	Kirchendach

HANNOVER AEGIDIUS

— 93577.384 + 13880.010

130°	43′	57″301	Eckberg
170	3	13.749	Brelingerberg
220	24	35.099	Osterberg

BRELINGER BERG

— 116274.663 + 17860.071

83°	47′	14″456	Eckberg
136	0	8.276	Heliotropplatz von 1822. Entfernung = $1^{m}000$
202	44	13.455	Felkenberg
258	15	4.823	Celle
292	31	58.223	Osterberg
350	3	15.658	Hannover Aegidius
350	37	20.757	Hannover Marktthurm
350	59	36.007	Hannover Kreuzthurm
352	4	49.846	Hannover Waterloosäule
308°	34′	1″192	Osterwald
310	39	34.817	Hannover Kreuzthurm
310	41	51.817	Hannover Marktthurm
310	43	58.284	Hannover Aegidiusthurm
311	21	20.817	Hannover Neustädterthurm
312	7	2.692	Hannover Waterloosäule

ECKBERG

— 114112.108 + 37726.256

263°	47′	15″851	Brelingerberg

CELLE SCHLOSSTHURM

— 121866.539 — 9114.015 Spitze
— 121866.604 — 9114.015 Theodolithplatz

78°	18′	9″528	Brelingerberg
149	13	57.528	Nordwestliche Schlosskuppel
253	54	49.028	Stadtkirche Theodolithplatz
253	56	44.245	Stadtkirche Knopf des Thurmes
350	9	49.528	Südöstliche Schlosskuppel

ABRISSE AUS DEN MESSUNGEN DES MAJOR MÜLLER IM JAHRE 1841 IN OSTFRIESLAND AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

DORNUM

— 238863.867 + 166209.747 Hauptplatz
— 238864.081 + 166209.734 Platz 2

25°	51′	18″418	Platz B Entfernung $479^{m}104$
63	52	40.281	*Hage*
110	13	11.120	Nordernei Logierhaus
110	25	43.979	Nordernei Conversationshaus
113	4	29.749	Platz A. Entfernung $330^{m}779$
116	40	59.877	*Nordernei*
154	9	25.197	*Baltrum*
164	36	24.356	Baltrum Ostende Schorstein
165	56	39.123	Baltrum Signal 2
197	52	3.849	*Langeoog*
197	52	4.800	Langeoog aus Platz 2
213	0	39.110	Langeoog Signal 3. Melkhörn
218	41	36.568	Langeoog Signal 4. Ostende
225	59	41.622	Langeoog, Ostende Belvedere
226	4	54.955	Langeoog, Ostende, Nebenhaus Schorstein
235	24	33.138	*Spikeroog*
135	24	34.635	Spikeroog aus Platz 2.
242	15	13.747	Waogeroog
272	33	29.372	*Esens*
272	33	33.006	Esens aus Platz 2
287	1	59.070	*Jever*
352	52	25.308	*Aurich*
14	30	28.	Mitte der Kuppel. Abstand $0^{m}2037$
15°	44′	27″	Centrum. Abstand $0^{m}2326$
16	34	25	Knopf. Abstand 0. 2615
183	36	44.349	Platz 2 Abstand 0. 2141

Als Centrum ist die Mitte zwischen dem Knopf und der Mitte der Kuppel angenommen.

ESENS

— 238321.641 + 154076.973 Theodolith Hauptplatz
— 238321.918 + 154076.389 Nebenplatz 1
— 238321.638 + 154076.937 Nebenplatz 2

63°	5′	57″896	*Ostecl*
78	59	43.073	*Hage*
91	13	47.729	Dornum Dorfkirche
92	33	27.717	*Dornum*
119	54	5.254	*Baltrum*
142	56	40.263	*Langeoog*
147	9	48.626	Langeoog Signal 2
199	19	54.176	Spikeroog Weisse Düne
203	37	13.053	Spikeroog Kirche, westl. Giebel
203	39	36.918	Spikeroog Kirche, östl. Giebel
206	53	35.490	*Spikeroog*
230	49	28.490	Nebenplatz B. Abstand $337^{m}504$
275	5	40.763	Nebenplatz 2. Abstand 0. 0365
295	21	33.361	*Jever*
301	28	3.791	Nebenplatz A. Abstand $314^{m}570$
229	30	43	Centrum. Abstand 0. 1928

Nebenplatz 1.

64°	39′	35″675	Hauptplatz. Abstand $0^m 646$
142	56	31.143	Langeoog
165	7	25.209	Langeoog. Ostende Signal
206	53	30.175	Spikeroog
208	52	30.779	Spikeroog Signalpfahl

Nebenplatz 2.

142°	56′	39″848	Langeoog
175	44	22.848	Langeoog Ostende Belvedere Haus südl. Giebel
175	45	34.348	Langeoog Ostende Belvedere
175	52	53.515	Langeoog Ostende Nebenh. Schorst.
295	21	33.485	Jever

SPIKEROOG

— 252022.819 + 147127.531

26°	53′	45″625	*Esens*
55	24	39.465	*Dornum*
81	40	43.331	*Langeroog*
259	20	47.214	*Wangeroog*
332	8	13.990	*Jever*

LANGEOOG

— 249744.732 + 162701.816

0°	52′	49″318	*Accumersiel*
17	52	12.655	*Dornum*
30	43	11.403	*Dreihausen Signal*
40	19	11.222	*Hage*
75	55	57.451	*Baltrum*
78	46	55.947	*Nordernei*
260	48	21.037	*Wangeroog*
261	40	39.437	*Spikeroog*
322	56	47.881	*Esens*

BALTRUM

— 247783.213 + 170529.605

21°	47′	10″150	*Hage*
81	0	28.793	*Nordernei*
236	13	51.166	Baltrum Signal I.
255	55	54.819	*Langeoog*
277	11	14.563	Baltrum Signal II.
299	54	10.148	*Esens*
334	9	35.804	*Dornum*

NORDERNEI

— 246167.305 + 180740.759

22°	47′	50″204	*Pilsum*
77	49	27.078	Juist Hausgiebel
78°	57′	0″828	*Juist*
82	53	56.540	Logirhaus
87	24	8.453	Nordernei Kirche, östl. Giebel
184	56	25.294	*Weisse Düne*
258	46	57.453	*Langeroog*
261	0	26.203	*Baltrum*
286	23	49.172	*Esens*
296	41	10.640	*Dornum*
338	41	34.580	*Hage*

HAGE

— 234055.117 + 176016.098

50°	1′	46″479	*Pilsum*
50	2	40.279	Pilsum Theodolithplatz
116	43	54.103	*Juist*
158	41	20.529	*Nordernei*
201	46	56.692	*Baltrum*
209	35	22.310	Baltrum Signal II.
243	52	42.678	*Dornum*
245	2	53.928	Dornum Dorfkirchthurm
258	59	39.261	*Esens*
321	18	14.656	*Aurich*
34	12	12	Centrum oder grosser Knopf. Abstand $0^m 2182$
43	24	38	Kleiner Knopf. Abstand $0^m 2183$
286	43	5	Centrum der Laterne

JUIST

— 243448.055 + 194665.145

67°	3′	41″515	*Borkum*
82	29	52.304	*Grosse Bill*
258	56	58.802	*Nordernei*
279	9	10.304	*Dornum*
296	44	5.506	*Hage*
351	0	34.287	*Pilsum*

PILSUM

— 221356.366 + 191172.737

72°	55′	33″962	*Uithuiser Medem*
116	38	4.476	*Borkum*
171	0	48.975	*Juist*
194	44	31.355	Nordernei Conversationshaus
230	2	27.355	*Hage*
349	51	13.796	*Wibelsum*
303	0	39	Centrum. Abstand $5^m 3212$

BORKUM

— 234136.959 + 216657.589

45°	37′	58″181	*Hornhuizen*
247	3	7.607	*Juist*

249°	58'	19"274	Nordernei Conversationshaus
270	6	54.479	*Hage*
296	38	11.551	*Pilsum*
355	13	53.888	*Uithuizer Medem*
141	9	52.638	Centrum, Abstand 2^m 4313

BALTRUM

Nebenplatz 2. —247511.594 +168375.439

29°	35'	21"455	Hage
97	11	10.838	Baltrum
123	6	15.678	Nebenplatz 1
123	7	6.988	Signal 1
302	43	49.371	Esens

345°	56'	31"938	Dornum
279	2	37.838	Centrum oder Signal 2. Abstand 0^m 8523

BALTRUM

Nebenplatz 1. —248356.833 +169671.862

29°	34'	27"897	Baltrum Kirche östl. Giebelstange
29	53	4.647	Baltrum Kirche westl. Giebelstange
56	13	37.772	Baltrum Signalpostament
303	5	27.055	Baltrum Signal 2.
339	57	52.089	Dornum
244	4	3.772	Centrum oder Signal, Abstand 0^m 4822

ABRISSE DER VOM HAUPTMANN MÜLLER IM JAHRE 1839 UND VOM LIEUTENANT GAUSS IN DEN JAHREN 1843 UND 1844 IM BREMISCHEN AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

BREMERLEHE

—227663.471 +89453.766

103°	31'	21"124	*Langwarden*
191	33	4.726	*Holssel*
230	25	53.127	*Haye*
298	47	40.909	*Basdahl Heliotrop*
298	47	59.416	Basdahl Nebensignal
315	29		Centrum, Abstand 0^m 0126

HOLSSEL

—239585.808 +87017.163

11°	33'	9"676	*Lehe*
70	44	0.491	*Langwarden*
162	55	34.661	Holssel Kirche, Giebelstange
163	5	41.942	Holssel Kirche, Giebelstange des hohen Chors cf. Bederkesa 1.
163	26	17.577	*Midlum*
174	21	31.285	*Krempel*
232	49	21.255	*Bederkesa* 1.
292	44	39.796	*Haye*
333	48	51.928	

HAYE

—232806.443 +83230.289

50°	25'	54"830	*Lehe*
150	48	49.711	*Holssel*

176°	49'	21"689	*Altenwalde*
191	24	12.026	*Krempel*
243	12	5.053	*Silberberg*
262	14	28.882	*Bederkesa*
314	25	46.973	*Basdahl*

BEDERKESA I

—234080.187 +73882.941

82°	14'	30"535	*Haye*
112	44	36.581	*Holssel*
145	8	33.533	*Krempel*
233	54	32.924	*Silberberg*

KREMPEL

—244200.869 +80932.188

11°	24'	15"385	*Haye*
27	15	48.171	*Lehe*
52	49	23.108	*Holssel*
162	25	28.709	Windmühle bei Altenwalde
163	9	45.026	*Altenwalde*
165	1	46.976	Altenwalde
267	10	46.622	*Silberberg*
297	44	9.185	*Dolosenberg*
323	42	32.491	Windmühle bei Bederkesa
325	8	36.473	*Bederkesa* I.

ILBERBERG

· 245307.475 + 58481.723

8°	38'	38"694	*Basdahl*
29	32	25.779	*Wüstenwohlde*
50	26	54.420	*Bederkesa* 2.
50	52	39.382	Windmühle bei Bederkesa
53	54	37.945	*Bederkesa* 1.
63	12	8.342	*Haye*
87	10	46.075	*Krempel*
111	40	22.908	Windmühle bei Altenwalde
112	26	2.719	*Altenwalde*
120	9	31.284	Neuwerk
216	48	37.649	*St. Margareth*
247	59	21.158	Krempe
288	39	15.908	Hamburg
297	42	47.267	*Stade*
297	47	10.783	Stade Rathhaus
297	51	53.408	Wilhadi
329	47	29.960	*Kikenberg*
350	55	42.681	*Dolosenberg*

DOLOSENBERG

— 231213.792 + 56230.888

21°	40'	26"755	*Basdahl*
78	24	59.774	*Wüstewohlde*
97	21	11.117	*Bederkesa* 2.
98	51	39.413	Bederkesa Glockenthurm
98	53	29.413	Bederkesa Kirchthurm
117	44	5.307	*Krempel*
130	48	7.596	Windmühle bei Altenwalde
131	17	23.474	*Altenwalde*
131	42	58.846	Altenwalde
170	55	37.372	*Silberberg*
190	6	15.638	*Kikenberg*
270	54	36.816	*Stade*

BEDERKESA 2.

— 233369.169 + 72936.603

130°	19'	10"147	Nahe Bederkesaer Windmühle
152	27	43.147	Windmühle bei Altenwalde
152	57	9.453	*Altenwalde*
153	47	49.814	Altenwalde
230	26	51.049	*Silberberg*
277	21	11.722	*Dolosenberg*
311	29	4.174	*Wüstewohlde*
334	26	24.339	*Basdahl*

ALTENWALDE

— 256057.755 + 84520.796

6°	45'	7"828	Windmühle von Altenwalde
44	46	33.111	*Langwarden*
134°	53'	13"976	Neuwerk dicker Thurm
135	11	25.351	Neuwerk Leuchtthurm
135	55	38.488	*Norderbake*
211	26	51.951	*Cuxhaven Leuchtthurm*
269	20	0.244	Altenwalde
292	26	7.236	*Silberberg*
332	22	59.462	Bederkesa Kirchthurm
332	26	20.712	Bederkesa Glockenthurm
332	57	17.242	*Bederkesa* 2.
343	,9	47.686	*Krempel*
356	49	34.088	*Haye*

WÜSTENWOHLDE

— 228839.250 + 67813.678

131°	29'	3"658	*Bederkesa* 2.
209	32	20.088	*Silberberg*
258	24	57.400	*Dolosenberg*
305	27	29.652	*Bremervörde*
343	56	31.156	*Basdahl*
343	57	13.506	Basdahl Nebensignal

BASDAHL

— 213313.852 + 63343.996

118°	47°	36"279	*Lehe*
134	25	38.700	*Haye*
154	26	17.978	*Bederkesa* 2.
163	56	25.045	*Wüstewohlde*
188	38	29.172	*Silberberg*
201	40	21.792	*Dolosenberg*
241	40	21.519	*Stade*

STADE

— 230811.995 + 30884.995

90°	54'	34"174	*Dolosenberg*
117	42	39.319	*Silberberg*
165	20	9.993	*Assel*
280	18	26.903	*Hamburg*
339	25	45.558	*Littberg*
43	0	46.	Centrum, Abstand 0ᵐ581
87	28	13.993	Nebenplatz, Abstand 3. 050
286	46	19.993	Nebenplatz 2. Abstand 2. 430

NEUE WERK

— 229392.658 + 30815.096

177°	11'	39"660	Stade Cosmae
177	12	49.660	Stade Cosmae Centrum der Laterne
181	43	34.160	Stade Wilhadi

ABRISSE AUS DER VEREINIGUNG DER MESSUNGEN VOM JAHRE 1843 UND 1844.

[IM AUSZUGE.]

LITBERG

— 206867.045 + 21896.054

66°	0′	41″986	Zeven
159	25	27.299	Stade
233	35	15.882	Hamburg

HAMBURG

— 224765.616 — 2368.668

53°	35′	11″434	Litberg
100	18	16.153	Stade
135	0	0.840	Crempe
289	18	46.153	Centrum, Abstand 1m 340

STADE

— 230811.734 + 30884.678

61°	40′	19″633	Basdahl Signal
61	40	21.032	Basdahl Postament
90	54	32.920	Dolosenberg
117	42	38.017	Silberberg
182	20	46.381	Crempe Rathhaus
182	31	35.756	Crempe
229	47	35.756	Nebenplatz, Abstand 3m 180
280	18	20.066	Hamburg
339	25	28.111	Litberg
333	44	10.995	Centrum, Abstand 0m 1825
53	44	51.982	Nebenplatz 1.
300	43	25.066	Nebenplatz 2.
12	50	5	Hülfsplatz *D* Abstand 2m 705
143	44	5	Hülfsplatz *B* Abstand 3. 250
219	13	5	Hülfsplatz *C* Abstand 3. 750
320	48	5	Hülfsplatz *E* Abstand 3. 330

CREMPE

— 256864.392 + 29737.939

2°	31′	13″562	Stade
68	5	49.269	Silberberg
111	19	14.812	Crempe Rathhaus
111	28	7.312	Crempe Rathhaus Theodol. Platz
211	52	24.718	Centrum, Abstand 6m 126
314	59	34.261	Hamburg

SILBERBERG

— 245307.475 + 58481.723

8°	38′	49″830	Basdahl Signal
8	38	33.087	Basdahl Postament
248	5	21.779	Crempe
297	42	43.920	Stade
350	55	36.402	Dolosenberg

BASDAHL

— 213313.852 + 63343.996

57°	33′	18″284	Signal, Abstand 3m 4874
188	38	23.253	Silberberg
201	40	16.909	Dolosenberg
241	40	18.284	Stade

DOLOSENBERG

— 231213.792 + 56230.888

21°	40′	22″764	Basdahl Postament
170	55	33.380	Silberberg
270	54	32.824	Stade

[BERICHT ÜBER DIE RESULTATE DER TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.]

— — —

Von den Rechnungen, durch die der Übergang von dem rohen Messungs-Material [in den Journalen, welche 35 Hefte in der Reinschrift füllen] zu den Endresultaten [im Coordinaten-Verzeichniss] gemacht ist, habe ich nur einen dem Umfange nach sehr kleinen Theil unter meine jetzigen Vorlagen aufnehmen können.

In der That, wenn es möglich wäre, alle jene Rechnungen in extenso vollständig wieder aufzustellen, so möchten solche leicht vier oder sechsmal so viele Bände füllen [als jetzt die Journale bilden]. Allein theils der Umstand, dass der grössere Theil der Details jener Rechnungen gar nicht aufbewahrt ist, theils die Form, in der sich die noch immer sehr voluminösen Fascikel der aufbewahrten Papiere befinden, haben zur Folge, dass eine vollständige und geordnete Wiederherstellung *aller* Rechnungen fast dasselbe bedeuten würde, wie eine nochmalige Wiederholung meiner ganzen Arbeit. Ich habe mich demnach auf die geordnete Extrahirung desjenigen Theils der Zwischenrechnungen beschränkt, der als der prägnanteste und nützlichste betrachtet werden muss, nemlich auf die tabellarische Zusammenstellung aller an den verschiedenen Beobachtungsplätzen festgelegten und orientirten Richtungswinkel, wobei eine Parallele mit dem Göttinger Meridian den Nullpunkt oder Ausgangspunkt bildet. Diese tabellarischen Darstellungen sind unter der Benennung von *Abrissen* *) in sechs Heften zusammengeordnet, wobei ich von dem Professor GOLDSCHMIDT mehrfache Beihülfe erhalten habe, welcher zugleich die Reinschriften grösstentheils selbst gemacht hat. — — —

Zur Entschuldigung der so sehr verspäteten Beendigung dieses Geschäfts muss ich noch bemerken, dass die Verspätung hauptsächlich daher entstanden ist, dass zur Erledigung der sowohl bei den Abschriften als noch mehr bei der Anfertigung der Abrisse aufstossenden zahlreichen Zweifel nicht selten erst langwierige Nachforschungen gemacht werden mussten. — — —

Sowie Zeit, Gesundheit und Kräfte es verstatten, werden meinen beiden ersten auf die geodätischen Probleme bezüglichen Abhandlungen noch ein Paar andere den speciellen Gegenständen noch näher tretend nachfolgen.

Göttingen den 15. März 1848.

C. F. GAUSS.

*) Die ganze Anzahl wird etwas über fünftehalbhundert betragen.

[ENTWURF ZUR GRADMESSUNG.]

— — — Über Gradmessungen überhaupt, und in wie fern sie einen der interessantesten Gegenstände des menschlichen Wissens begründen, darf ich in einem Schreiben an Ew. — — nichts sagen. Allein die grossen Vortheile und neuen Aufklärungen noch dunkler Punkte, welche von der Vervielfältigung solcher Operationen zu erwarten sind, beruhen doch mit auf der Bedingung, dass diese so viel als möglich ins Grosse gehen. Isolirte Gradmessungen in Europa, die nur einen kleinen Umfang umfassen, könnten jetzt, nach den grossen Arbeiten in Frankreich und England, nur einen sehr untergeordneten Werth haben: wogegen noch eine oder ein Paar andere ähnliche Messungen in Europa, von einer bedeutenden Ausdehnung, gewiss für die Kenntniss der Gestalt der Erde ungemein wichtig sein würden.

Ein Blick auf die Karte von Europa, und auf den Culturzustand der verschiedenen Nationen, zeigt dass ausser der grossen Linie von den Balearischen bis zu den Orkneys Inseln, nur noch in zwei Richtungen ähnliche Operationen ausführbar sein werden 1) im Russischen Reiche und 2) durch die Jütische Halbinsel und ganz Deutschland bis zum Mittelländischen Meere. Zur Ausführung einer Messung in ersterm Reiche scheinen, mir zugekommenen Nachrichten zufolge, einige Aussichten zu sein. Allein für die andern ist mehr als Aussicht: der erste Hauptschritt ist bereits wirklich geschehen. Die von dem Könige von Dänemark befohlene Gradmessung, von der Nordspitze Jütlands bis Lauenburg ist bereits seit zwei Jahren im Gange; dass dieselbe ganz so wird ausgeführt werden, wie es der heutige Zustand der Wissenschaften und Künste möglich und nothwendig macht, dafür bürgt die Geschicklichkeit und Einsicht des dänischen Astronomen, die Vortrefflichkeit seiner Instrumente, und die Liberalität, womit der König von Dänemark alles, was zur Vollkommenheit der Messung nothwendig oder wünschenswerth gefunden wird, genehmigt.

Die dänische Gradmessung soll, ausser dem erwähnten Meridianbogen, auch noch die Messung des Bogens eines Parallelkreises von der Westküste Jütlands bis Koppenhagen umfassen. Natürlich kann hier nur von dem erstern Theile des Planes die Rede sein. Jener Bogen umfasst für sich schon $4\frac{1}{2}$ Grad, und die Messung ist daher, schon isolirt betrachtet, von einer respectabeln Ausdehnung. Allein ohne Vergleich wichtiger erscheint dieselbe, wenn sie als der Anfang jener grossen Messung betrachtet wird, die einer Ausdehnung bis zur Insel Elba, also bis auf 16°, fähig ist. Dass, früh oder spät, diese Operation in einer solchen Ausdehnung einmal werde ausgeführt werden, ist wohl mehr als eine chimärische Hoffnung, besonders da in einigen dazwischen liegenden Ländern, namentlich in Thüringen und Bayern, bereits manche Vorarbeiten wirklich geschehen sind. Die Fortsetzung der dänischen Messung durch das Königreich Hannover ist aber die erste und wesentlichste Bedingung zur dereinstigen Realisirung jenes Planes. Durch diese Fortsetzung allein würde der Bogen schon um 2 Grad vergrössert werden. Würde dann auch noch die Gothaische Sternwarte durch ein Dreiecksnetz mit der Göttingischen in Verbindung gebracht, was auch in mancher andern Rücksicht sehr wünschenswerth und leicht ausführbar sein würde, so wäre dadurch schon ein Bogen von 7 Graden realisirt.

Nur kurz brauche ich zu berühren, dass die Messung eines Meridianbogens von Hamburg bis Göttingen auch noch in andern Beziehungen, als der reinwissenschaftlichen, von grosser Wichtigkeit sein würde. Das zu diesem Zweck geführte Dreiecksnetz würde, wenn über kurz oder lang eine den heutigen Forderungen entsprechende Vermessung des ganzen Königreichs Hannover beschlossen werden sollte, die sicherste Grundlage abgeben, um die weitern Triangulationen östlich und westlich an dasselbe anzuschliessen. Und falls zu einer solchen Generalvermessung nahe Aussicht sein sollte, könnte durch die Gradmessung noch der Nebenzweck erreicht werden, dass diese mit zur Vorbereitung tauglicher Personen für jenes Geschäft benutzt werden könnte.

Ich habe noch hinzuzufügen, dass ich über diesen Gegenstand bereits vor einem Jahre Sr. — — — ein ausführliches Memoire vorgelegt habe, und dass dieser, die Wichtigkeit der Fortsetzung der dänischen Messungen nicht verkennend, wenigstens sofort die Möglichkeit derselben sicherte, indem er mir den Befehl ertheilte, Lüneburg an die zum Theil in vergänglichen Signalpunkten bestehenden südlichen Punkte jener Messung anzuschliessen. Dies ist im vorigen Herbst geschehen, und dadurch die künftige Fortsetzung von dem Untergang der precären Punkte unabhängig gemacht.

Wenn Ew. — — diesen Ideen Ihren Beifall schenken, und sie würdig halten, für ihre Realisirung zu wirken, so muss ich schon die Beabsichtigung einer möglichst vollkommenen und neben jeder andern ehrenvoll bestehenden Ausführung voraussetzen, und in dieser Hinsicht würde ich mich der Ausführung, wenn sie mir anvertrauet würde, mit Vergnügen unterziehen, und eine vielleicht länger als Einen Sommer dauernde Unterbrechung meiner rein astronomischen Arbeiten für kein Opfer halten.

Was den zur Verlängerung der dänischen Gradmessung durch das Königreich Hannover erforderlichen Kostenaufwand betrifft, so ist es wegen seiner Abhängigkeit von mancherlei nicht vorherzusehenden Umständen freilich unmöglich, denselben mit einiger Genauigkeit im Voraus anzugeben. So hat die Witterung auf die Zeitdauer, und dadurch auf die Kosten einen wesentlichen Einfluss. Ich wüsste nicht, dass von irgend einer Gradmessung die Kosten öffentlich bekannt gemacht wären, und wenn ich gleich von dem Dänischen Astronomen über die bisherigen Kosten seiner Gradmessung Mittheilung erhalten konnte, so würden sich doch daraus die Kosten ähnlicher Operationen im Königreich Hannover, wegen der grossen Verschiedenheit der Localverhältnisse, nur sehr unsicher schätzen lassen. So werden z. B. im Hannöverschen die Kosten für Fuhren Behuf Transports der Personen und Instrumente einen sehr bedeutenden Theil der Gesammtkosten austragen, da jene im Dänischen, wo die Fuhren *ex officio* in natura geleistet werden, fast ganz aus der Rechnung wegfallen. Doch glaube ich, alles wohl erwogen, dass die Summe von 1500 Pfund Sterling zur Bestreitung aller Kosten hinreichen würde, und versteht sich von selbst, dass darüber demnächst Rechnung abgelegt werden würde.

Der Professor Schumacher hat bei seiner Gradmessung ausser ein Paar Amanuensen, zwei Officiere von Capitains Rang zu Gehülfen, deren Geschäft es ist, die Gegend vorher zu bereisen, schickliche Punkte für Dreiecksstationen auszusuchen, um sie, nach vorläufig daselbst gemachten Messungen dem Prof. S. zur Auswahl vorzuschlagen, hernach auf den ausgewählten Punkten die Errichtung von Signalen, wo es nöthig ist, und andere nöthige Vorkehrungen zu betreiben, mit einem Wort, alle Vorbereitungen zu machen, dass der Astronom überall ohne vielen Zeitverlust zum Beobachten schreiten kann; endlich da, wo es nöthig ist, bei den Beobachtungen die Nebenoperationen zu übernehmen. Die erforderlichen Eigenschaften für solche Gehülfen sind daher, nicht sowohl besonders tiefe mathematische oder astronomische Einsichten, als vielmehr reger Eifer für die Sache, die grösste Pünktlichkeit und Sinn für die grösste Genauigkeit, eine gewisse praktische Anstelligkeit, einige Kenntnisse vom Bauwesen, einige Bekanntschaft mit dem Geschäftsgange in unserm Lande bei denjenigen Behörden, mit welchen in solchen Angelegenheiten Berührungen vorkommen. Ein grösseres Personal als bei der Dänischen Gradmessung würde auch bei der Hannöverschen nicht nöthig sein, und ich würde mir sogleich, sobald eine Resolution gefällt ist, angelegen sein lassen, taugliche Gehülfen selbst auszusuchen. Natürlich würde es aber von Ew. — — Ermessen abhängen, ob vielleicht rathsam erachtet würde, in *der oben erwähnten* Beziehung noch mehrere Personen als Volontairs den Messungen beiwohnen zu lassen, um sich zu feinern geodätischen Arbeiten vorzubereiten. — —

Göttingen den 30. Mai 1819.

Carl Friedrich Gauss.

[ENTWURF ZUR GRADMESSUNG.]

— — —

Durch ein Schreiben des Professors Schumacher bin ich benachrichtigt, dass der Dänische Gesandte in London Graf Bourke, bei Gelegenheit von des erstern Aufenthalt daselbst, mit dem Grafen Münster über den Nutzen der Fortsetzung der Dänischen Gradmessung durch das Königreich Hannover gesprochen, und dass letztrer verlangt habe, dass ich über diesen Gegenstand an ihn schreiben möchte. Wenn ich diese Anzeige wie einen Befehl habe betrachten müssen, so verpflichtet mich das warme Interesse, welches Ew. — — an dieser wissenschaftlichen Angelegenheit genommen, und bereits im vorigen Jahre, durch die die Möglichkeit einer solchen Fortsetzung sichernden Maassregeln bethätigt haben, Ew. — — sofort von diesem Umstande zu benachrichtigen, und bürgt mir für die gütige Aufnahme meiner Bitte, die Sache nach Möglichkeit in London zu unterstützen. Ich darf mich um so weniger scheuen, diese Bitte zu thun, da ich dabei bloss aus reiner Liebe zur Wissenschaft handle, und ohne diese und ohne die lebhafte Überzeugung von der hohen Wichtigkeit einer solchen Operation, nach meiner individuellen Neigung, eine längere Entfernung von den rein astronomischen Arbeiten eher als ein Opfer betrachten würde. Auch der ehrwürdige Sir Joseph Banks hat, wie mir Professor Schumacher schreibt, die Idee der weitern Fortsetzung dieser Gradmessung auf dem Continent, mit grosser Wärme ergriffen, und alle Mitwirkung versprochen.

Der Professor Schumacher wird bei seiner Durchreise durch Hannover Ew. — — selbst gesagt haben, dass der Zweck seiner Reise nach England die Empfangnahme des berühmten grossen Zenithsectors war, welcher bei der englischen Gradmessung gebraucht ist, und ihm für seine astronomischen Beobachtungen geliehen wird. Er wird sogleich nach seiner Zurückkunft, diese Beobachtungen am südlichen Endpunkte seiner Messungen in Lauenburg anfangen. Bei der Aussicht zu einer Fortsetzung der Dänischen Gradmessung durch das Königreich Hannover würde es ohne Zweifel in vielfacher Hinsicht für beide Gradmessungen sehr wünschenswerth sein, wenn ich *diese* Beobachtungen mit ihm gemeinschaftlich machte. *Ohne* diese Vereinigung ist der Fall leicht denkbar, dass in Zukunft diese oder jene Discordanzen oder Zweifel eintreten könnten, die sich dann nur schwer würden aufklären lassen, und denen *durch* dieselbe vorgebeugt werden würde. So sind ja gerade über die astronomischen Beobachtungen, welche am nördlichen Endpunkte der französischen Gradmessung in Dünkirchen angestellt waren, späterhin Bedenklichkeiten entstanden, derentwegen es nöthig gefunden wurde, dass im vorigen Herbst mit dem gedachten Zenithsector neue Beobachtungen durch englische und französische Commissarien gemeinschaftlich, angestellt wurden; und wie ich höre, soll eben dieser Zenithsector, sobald ihn Professor Schumacher wieder abgegeben haben wird, zu einer nochmaligen Wiederholung der Beobachtungen auf den Balearischen Inseln, dahin eingeschifft werden. Nur durch eignes Beobachten an diesem Instrumente, und durch Vergleichung mit den Erfahrungen, die ich an dem Repsoldschen Meridiankreise gemacht habe, und noch mehr mit denen, welche ich mit dem Reichenbachschen Kreise in Zukunft machen werde, würde ich im Stande sein, zu beurtheilen, ob eine künftige Zuziehung eben jenes Zenithsectors für die Beobachtungen im Königreich Hannover nöthig oder vorzüglich wünschenswerth sein wird. Und selbst den Fall angenommen, dass die Fortsetzung der Gradmessung nicht zur Ausführung käme, würden die von mir an dem Zenithsector, einem in seiner Art einzigen Instrumente, gemachten Erfahrungen für meine künftigen Beobachtungen an den Meridian-Instrumenten der hiesigen Sternwarte nicht ohne wesentlichen Nutzen sein. Als einen Beweis, wie wichtig die Beobachtungen in Lauenburg geachtet werden, darf ich noch anführen, dass der Doctor Olbers mir von seiner Absicht geschrieben hat, nach Lauenburg kommen zu wollen, um das Instrument kennen zu lernen und den Beobachtungen beizuwohnen.

Ich gebe Ew. — — unterthänigst anheim, diese Gründe zu prüfen und darüber zu entscheiden, und füge nur noch hinzu, dass freilich diese Abwesenheit mich in Beziehung auf die zwei Collegia, welche ich in diesem Sommer zu halten habe, mich etwas beengen würde, dass ich jedoch bei der kleinen Anzahl der Zuhörer mit diesen ein Arrangement treffen könnte, die ausfallenden Stunden theils vorher theils nachher einzubringen. Und um die Zeit der Abwesenheit nach Möglichkeit zu beschränken, würde ich mit dem Prof. Schumacher (welchen ich jeden Tag hier zurückerwarte) vorläufig mündliche Abrede nehmen, damit er in Lauenburg vorher alle Vorbereitungen treffen und die Beobachtungen unmittelbar nach meiner Ankunft ihren Anfang nehmen können. Da in dieser Jahreszeit das Wetter den Beobachtungen nicht ungünstig zu sein pflegt, so wäre zu erwarten, dass die Zeit meiner Abwesenheit nicht länger zu sein brauchte, als etwa die Badereisen, welche manche meiner Collegen um dieselbe Zeit wohl machen.

Ich benutze diese Gelegenheit, um Ew. — — noch anzuzeigen, dass ich von dem Mechanikus Rumpf verfertigte Maschine zur Umlegung des Reichenbachschen Mittagsfernrohrs nunmehr in diesen Tagen angeschlagen wird, und dass dann sofort auch an diesem Instrumente die regelmässigen Beobachtungen ihren Anfang nehmen werden.

— — —

Göttingen den 1819.

C. F. Gauss.

ANZEIGE DES HOFR. GAUSS, BETREFFEND DIE FORTSETZUNG DER DÄNISCHEN GRADMESSUNGEN DURCH DAS KÖNIGREICH HANNOVER.

— — —

Zenithsectoren wurden bisher auch für die ersten Sternwarten als ein wesentliches Bedürfniss angesehen. Allein gegenwärtig machen die neuconstruirten Meridiankreise, namentlich die Reichenbachschen, jene Instrumente gewissermassen entbehrlich. Wenigstens leistet, nach meinen bisherigen Erfahrungen der hiesige seit Februar d. J. im Gebrauch befindliche Meridiankreis alles was ein Zenithsector leisten könnte, ebenso vollkommen. Es könnte daher überflüssig scheinen, bei der Gradmessung noch an einen Zenithsector zu denken, wenn nicht folgende zwei wichtige Umstände noch zu berücksichtigen wären.

1) Der Meridiankreis erfordert eine sehr solide Aufstellung, die ihm nur auf einer eigentlichen Sternwarte gegeben werden kann, und ist überhaupt als ein fixes, nicht als ein transportables Instrument zu betrachten. Obgleich nun aber die *wichtigsten* Beobachtungen, wozu ein Zenithsector oder der Meridiankreis in Bezug auf die Gradmessung verwandt werden, die auf der hiesigen Sternwarte anzustellenden sein werden, die in sofern als südlicher Endpunkt betrachtet werden muss, und obgleich diesseitige Beobachtungen der Art am nordlichen Ende deswegen überflüssig sind, oder scheinen können, weil dazu schon die Dänischer Seits in Lauenburg gemachten dienen können, so konnte sich doch beim Verfolg der Arbeit die Nothwendigkeit zeigen, und auf alle Fälle wird es wissenschaftlich interessant sein, dass ähnliche Beobachtungen auf einem Zwischenpunkte des Königreichs Hannover, z. B. in Celle oder Hannover, angestellt wurden, was nur mit Hülfe eines transportabeln Zenithsectors geschehen könnte.

2) Da der Gebrauch, der bei einer Gradmessung von den hier in Rede stehenden Beobachtungen gemacht wird, ganz auf der *Vergleichung* der an den verschiedenen Hauptpunkten gemachten Beobachtungen unter *einander* beruht, und also demnächst die Göttinger und vielleicht Celler oder andere diesseitige Beobachtungen mit denen, die Dänischer Seits in Lauenburg, Lysabbel (auf der Insel Alsen) und

Skagen angestellt sind, werden verglichen werden müssen, so könnte es dem Zutrauen, welches die Resultate für sich fordern sollen, nachtheilich werden, wenn jene Beobachtungen nicht bloss mit verschiedenen, sondern sogar mit ganz verschiedenartigen Instrumenten gewonnen wären. Am besten wird es daher sein, wenn die hiesigen Beobachtungen nicht bloss am Meridiankreise, sondern überdiess noch am Zenithsector, und zwar an dem *nämlichen* Zenithsector, womit an allen andern Orten observirt wurde, angestellt werden.

Der Zenithsector womit die Dänischen Bestimmungen in Lauenburg, Lysabbel und Skagen, auch in Kopenhagen, in den Jahren 1819 und 1820 gemacht sind, ist eben derselbe, womit bei der englischen Gradmessung im Jahre 1802 vom verst. General Mudge beobachtet ist. Mit eben dem Instrumente wurde im Jahre 1818 gemeinschaftlich von englischen und französischen Gelehrten in Dünkirchen als dem nördlichsten Endpunkt der französischen Gradmessung eine Reihe von Beobachtungen gemacht, und nachher dasselbe vom engl. Gouvernement zu der Dänischen Gradmessung auf 2 Jahre geliehen. Alle diese Umstände machen es um so wünschenswerther, dass dieses Instrument auch bei der Hannoverschen Gradmessung gebraucht werde, und es wird dabei besonders wichtig und lehrreich sein, dasselbe mit dem hiesigen Reichenbachschen Meridiankreise vermittelst gleichzeitiger und in Einem Ort gemachten Beobachtungen zu vergleichen.

Es ist nicht zu zweifeln, dass für die Hannoversche Gradmessung dieses Instrument mit derselben Bereitwilligkeit werde hergeliehen werden, wie für die Dänische, — — — Ich füge noch folgende Umstände bei. Dieser von Ramsden verfertigte Zenithsector gehört dem Board of Ordnance, und steht in letzter Instanz unter dem Herzog von Wellington, mittelbar aber, nach dem vor kurzem erfolgten Tode des General Mudge, unter dem Oberstlieutenant Colby.

Aus vorstehender Darstellung geht hervor, dass die Zeit des Anfangs der grössern zur Gradmessung gehörigen Operationen, die besondere Vorkehrungen erfordern, in diesem Augenblick sich noch nicht bestimmt angeben lässt. Auf alle Fälle aber wird im Laufe des gegenwärtigen Jahres nichts weiter geschehen können, als ein Theil der astronomischen Beobachtungen auf hiesiger Sternwarte (womit ich auch bereits einen Anfang gemacht habe) und höchstens einige Vorarbeiten in hiesiger Umgegend.

Göttingen den 21. August 1820.

C. F. Gauss.

P. M. BETREFFEND DIE GEGENWART DES HOFR. GAUSS, BEI EINEM THEIL DER OPERATION DER DÄNISCHEN GRADMESSUNG.

Über die in dem königl. Dänischen Gebiete angeordnete und dem Dänischen Astronomen Schumacher übertragene Gradmessung, ihren Zweck, die Vortheile, die man für die Wissenschaften davon zu erwarten berechtigt ist, so wie über die dabei angewandten Hülfsmittel habe ich schon früher die Ehre gehabt, Ew. — — einen unterthänigsten Bericht abzustatten. Es gereicht mir um so mehr zum Vergnügen, dass eben jetzt ein anderer Astronom, der Doctor Olbers, der auch im vorigen Jahre von den Operationen in Lauenburg Augenzeuge gewesen, in der Zeitschrift Allgemeine Geographische Ephemeriden (Bd. 17 Stück 3) mit den meinigen ganz übereinstimmende Ansichten dieser Unternehmung bekannt gemacht hat, da mein eignes Urtheil über die Persönlichkeit des Dänischen Astronomen insofern vielleicht befangen scheinen könnte, weil dieser früher (1809) seine letzte Ausbildung auf hiesiger Universität erhalten hatte.

Im bevorstehenden Sommer wird derselbe zuerst auf der Nordspitze von Jütland die astronomischen Beobachtungen anstellen, und nachher theils in Lauenburg mit neuen Instrumenten die vorigjährigen Messungen wiederholen und die Azimuthalbestimmungen machen, theils bei Hamburg eine Grundlinie, einige Meilen lang, messen. Nur für einen Theil der Operationen in Lauenburg und die Basismessung, nicht aber für die Operationen auf der Nordspitze von Jütland, wird meine Gegenwart gewünscht. Das Dänische Gouvernement, indem es meine Anwesenheit bei diesen delicaten Operationen gewünscht hat, scheint mir von der Ansicht ausgegangen zu sein, dass vereinte Berathung bei diesem lediglich zum Besten der Wissenschaft unternommenen Geschäft, förderlich sein werde, was durch blossen Briefwechsel der Natur der Sache nach nur unvollkommen oder gar nicht erreicht werden könne. Zweitens, da in Zukunft die ganze Gradmessung in extenso in einem eignen Werke der gelehrten Welt bekannt gemacht werden soll, wird die Anwesenheit eines Zeugen bei einigen der wichtigsten Operationen dazu dienen, die Authenticität zu verstärken. So wurden im Jahre 1798 zu der Basismessung bei Paris alle damals mit Frankreich nicht im Krieg begriffene Staaten von Frankreich eingeladen, qualificirte Astronomen abzuschicken, was auch von Dänemark, der Schweiz, Holland, Spanien und andern Staaten geschah. Diese beiden Rücksichten beziehen sich zunächst nur auf die Dänischen Gradmessungen für sich allein genommen. In der Voraussetzung, dass früh oder spät eine weitere Fortsetzung durch das Hannöversche angeordnet werden könnte, scheint es aber noch besonders wichtig zu sein, dass durch einen diesseitigen Astronomen das Vertrauen gehörig gewürdigt werden könne, welches diejenigen Operationen besonders verdienen, an welche eine solche Fortsetzung unmittelbar sich anschliessen müsste.

Nach diesen Betrachtungen bin ich sehr gern bereit, der mir schmeichelhaften Aufforderung Folge zu leisten, und werde ich den Dänischen Astronomen ersuchen, mich von der Zeit, wo jene Operationen werden vorgenommen werden, so früh als möglich zu benachrichtigen, damit ich mich bei meinen anderweitigen Geschäften danach einrichten könne. Mit den Vorlesungen wird dies wol keine Schwierigkeiten haben, da doch jene Operationen erst im Spätsommer anfangen werden. Leid wird es mir zwar thun, aller Wahrscheinlichkeit nach die in ihrer Art einzige am 7. Sept. eintreffende grosse ringförmige Sonnenfinsterniss hier nicht mehr beobachten zu können; allein ich werde mich damit beruhigen, dass theils dieselbe hier doch durch den Prof. Harding wird beobachtet werden können, theils, dass dieselbe auch im Holsteinischen gleichfalls ringförmig erscheinen und es leicht thunlich sein wird, dort gute, wenn auch den hiesigen nicht ganz gleich kommende Hülfsmittel zur Beobachtung dieses merkwürdigen Phänomens herbeizuschaffen. — — —

Göttingen den 27. Februar 1820.

C. F. Gauss.

P. M. BETREFFEND DIE HANNOVERSCHE GRADMESSUNG.

— — — Ich habe bereits in meinem frühern Bericht das für dieses Geschäft unentbehrliche Bedürfniss mehrerer Hauptinstrumente auseinandergesetzt. Solange es sogar noch ungewiss war, woher dieselben zu erhalten stehen würden, konnte natürlich mit den Operationen selbst noch kein Anfang gemacht werden, einige astronomische Vorarbeiten auf hiesiger Sternwarte, womit ich schon im vorigen Sommer angefangen, abgerechnet. Inzwischen habe ich jene Hauptbedürfnisse, namentlich einen grössern möglichst vollkommenen Theodolithen und ein sogenanntes Universalinstrument bei dem ersten jetzt lebenden Künstler, von Reichenbach in München, bestellt, welcher nicht nur diese Bestellung angenommen, sondern auch diese Instrumente resp. Anfang Mai und im Juli d. J. zu liefern versprochen hat.

Ich habe inzwischen auf mehrern Wegen solche Nachrichten einzuziehen gesucht, die in mehrfacher Beziehung für die Hannoversche Gradmessung wichtig sein werden. So wie diese ihre grössere Wichtigkeit dadurch erhält, dass sie einerseits die Fortsetzung der ausgedehnten Dänischen Messung ist, und andrerseits einer noch viel ausgedehntern Fortsetzung nach Süden fähig ist, gereicht es mir zur Freude, jetzt anführen zu können, dass ein bedeutender Theil der letztern Operationen, die früher nur als möglich und wünschenswerth dargestellt werden konnten, bereits wirklich gemacht ist. Das Königl. Preussische Gouvernement nemlich, welches mehrere Hauptprovinzen der preussischen Monarchie vermessen zu lassen beabsichtigt, und dieser Vermessung, nach den gegenwärtig als allein zulässig anerkannten Grundsätzen zuvörderst eine grosse Triangulation zur Grundlage dienen lässt, hat bereits diejenige Triangulation *wirklich* ausführen lassen, wodurch die preussischen Rheinprovinzen mit den ältern verbunden werden, und die sich durch das Nassau'sche, Kurhessen, Thüringen u.s.w. bis Halle erstreckt. Durch den K. Pr. Generallieutenant von Müffling habe ich diese Triangulation vollständig mitgetheilt erhalten, und mich, nach eigner sorgfältiger Prüfung überzeugt, dass sie mit grosser Sorgfalt und Genauigkeit ausgeführt ist, so dass sie den Triangulationen bei den besten Gradmessungen nicht nur beigestellt werden kann, sondern einige selbst noch übertrifft. Diese Dreiecke gehen nun zum Theil ganz nahe an den südlichen Grenzen des Königr. Hannover vorbei, und wenn daher meine eignen künftigen Messungen gehörig an jene angeschlossen werden, wozu der General-Lieut. von Müffling mir bereits die nöthigsten Renseignements ertheilt hat, so wird die Dänisch-Hannoversche Gradmessung bereits von selbst bis zur Sternwarte Seeberg bei Gotha und bis zum Inselsberge fortgesetzt sein, so wie in S. W. dadurch und durch die Darmstädtschen und Französischen Messungen die Verbindung mit den Sternwarten von Mannheim und Paris erzielt sein wird.

Auch über die während der französischen Occupation in den Jahren 1803—1805 durch den franz. Obersten Epailly im Kurfürstenthum Hannover ausgeführten Messungen, deren vollständige Mittheilung auf diplomatischem Wege zu erhalten, früher vergeblich versucht ist, habe ich auf mehrern Wegen und zum Theil direct von dem Dépot de la guerre, mehrere wichtige wenn gleich unvollständige Nachrichten erhalten, und ich habe noch einige Hoffnung, die *sämmtlichen* Dreiecke mitgetheilt zu bekommen. Sollte in Zukunft einmal eine allgemeine Triangulirung des ganzen Königreichs Hannover beschlossen werden, wozu die Gradmessung von Hamburg bis zur südlichen Grenze des Königreichs die solideste Grundlage liefern wird, so würde unstreitig der Besitz jener Epailly'schen Messungen überaus nützlich werden können: das, was ich davon mitgetheilt erhalten habe, setzt mich zum wenigsten in den Stand, auf eine solche eventuelle Benutzung bei der Anordnung meiner eigenen Dreiecke im Voraus Rücksicht zu nehmen, und solche gewissermassen vorzubereiten. — Unter den Actenstücken, die Epailly'sche Messung betreffend, die mir zu Händen gekommen sind, befindet sich übrigens auch ein Rapport des Obersten Epailly selbst, an den General Sanson gerichtet, wodurch ich freilich schon im Voraus mit den grossen durch mancherlei Localumstände besonders im Lüneburgischen entstehenden *Schwierigkeiten* der Triangulationen bekannt geworden bin; Schwierigkeiten, die der Französische Geodät selbst im 'pays conquis' fast unüberwindlich fand, und die ich nur unter kräftiger Unterstützung des Gouvernements und der betreffenden Behörden, zu besiegen hoffen darf.

Auch wegen mannigfaltiger anderer Bedürfnisse für die bevorstehenden Messungen habe ich im Laufe dieses Winters angemessene Vorkehrungen getroffen. Der erwartete grosse Reichenbach'sche Theodolith ist für die definitive allerschärfste Messung der Winkel bestimmt. Allein für die Aufsuchung der Standpunkte, die Recognoscirung der von jedem sichtbaren Punkte und die vorläufigen Messungen ist ein anderer Theodolith erforderlich, der leicht zu transportiren, schnell aufzustellen und zu handhaben ist, nicht zu gedenken, dass das Hauptinstrument auch die grösste Schonung erfordert. Zu jenem Zwecke

sind die Theodolithen, wie sie der englische Künstler TROUGHTON verfertigt, am bequemsten und brauchbarsten. Der Prof. SCHUMACHER hat die Gefälligkeit gehabt, mir den seinigen zu diesem Behuf für den Einkaufspreis wieder abzutreten, indem er bis zu der Zeit, wo er selbst wieder in diesem Jahre einen solchen nöthig hat, einen andern aus England zu erhalten hofft. — Manche Winkelmessungen werden sich nicht gut anders, als bei Nacht durch Argandsche Lampen mit parabolischen Reverberes, die auf sehr grosse Weiten sichtbar gemacht werden können, anstellen lassen. Damit es in vorkommenden Fällen daran nicht fehle, habe ich mehrere solche Reverberes bei einem sehr geschickten Künstler, der auch ähnliche Arbeiten für die preussischen Messungen geliefert hat, dem Hof-Mechanikus KÖRNER in Jena, bestellt, der solche auf Ostern zu vollenden versprochen hat. Mehrerer anderer in Voraus besprochener Apparate hier nicht zu gedenken.

Nach allen diesen Vorkehrungen glaube ich nun die Arbeiten im bevorstehenden Frühjahr anfangen zu können. Wenn die Künstler alle ihre Versprechungen gehörig inne halten, wird das Werk dann immer rasch fortschreiten können. Auf alle Fälle aber werden die mannigfaltigen Vorarbeiten, Bereisungen der Gegenden, Aussuchung der Stationen, Erbauungen von Signalthürmen, vorläufige Messungen u. dergl. — (der vorhinerwähnte Theodolith von TROUGHTON ist bereits in meinen Händen) — erst mehrere Monate ausfüllen, und selbst den widrigen Fall angenommen, dass, nachdem die Vorarbeiten so weit vorgeschritten wären, dass die Messungen selbst beginnen könnten, doch der erwartete grössere REICHENBACH'sche Theodolith noch nicht abgeliefert wäre, würde die Arbeit nicht still zu stehen brauchen, da ich im Nothfall mit denjenigen Winkelmessungen anfangen könnte, wozu die anderweitigen Hülfsmittel der Sternwarte zureichen. Ja im allerschlimmsten Fall, der hoffentlich nicht eintreten wird, dass die Ablieferung des Theodolithen *noch* länger verzögert würde, würde ich nur in der Ordnung der Arbeiten die Abänderung eintreten lassen, dass ich den Rest des Sommers zu den astronomischen Arbeiten mit dem Zenithsector hier in Göttingen verwende, die sonst, wenn der ganze Sommer dem Triangulationsgeschäft gewidmet werden kann, einer spätern Zeit vorbehalten bleiben.

Göttingen, den 20. März 1821.

C. F. GAUSS.

DRUCKFEHLER.

Seite 296 statt:

$Q+q$	$P+p$	$\log m$ $+$	k
52° 30′	52° 32′ 1″78428		0″006

lies:

$Q+q$	$P+p$	$\log m$ $-$	k
52° 30′	52° 32′ 1″78428		0″006

INHALT.

GAUSS WERKE BAND IV.

WAHRSRHEINLICHKEITSRECHNUNG UND GEOMETRIE.

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG.

GEOMETRIE.

GÖTTINGEN,
GEDRUCKT IN DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTS-DRUCKEREI
W. FR. KAESTNER.



